منطق گزاره‌ای

ارائه دهنده:

حمزه محمدی

۲۷ آبان ۱۳۹۵

الفباي زبان منطق گزاره‌ای (L_P):

- نمادهای گزاره‌ای: $\{p_۱, p_۲, p_۳, \ldots\}$
- رابط‌های گزاره‌ای: $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- نمادهای پرانتز: $($, $)$

فرمول‌های گزاره‌ای:

- فرمول اتمی: $\{p_۱, p_۲, p_۳, \ldots\}$
- α و β فرمول گزاره‌ای $\Leftarrow$ $(\neg\alpha)$، $(\alpha \wedge \beta)$، $(\alpha \vee \beta)$، $(\alpha \rightarrow \beta)$ و $(\alpha \leftrightarrow \beta)$

مثال

۱) ۵ عددی اول است.
۲) π عددی گویا است یا ۵ عددی اول است.
۳) اگر n زوج باشد آن‌گاه $n+۲$ نیز زوج است.

یک مدل یا تعبیر برای فرمول‌های گزاره‌ای، چیزی جز یک وضعیت ممکن برای راست یا غلط بودن آن‌ها نیست.

v : تابع ارزشگذار $\{\text{فرمول‌ها}\} \longrightarrow \{۰, ۱\}$

$$
\begin{aligned}
v(\alpha) &\neq v(\neg\alpha),\\
v(\alpha \wedge \beta) = 1 &\Longleftrightarrow v(\alpha) = 1, v(\beta) = 1,\\
v(\alpha \vee \beta) = 0 &\Longleftrightarrow v(\alpha) = 0, v(\beta) = 0,\\
v(\alpha \rightarrow \beta) = 0 &\Longleftrightarrow v(\alpha) = 1, v(\beta) = 0,\\
v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 0 &\Longleftrightarrow v(\alpha) = v(\beta).
\end{aligned}
$$

جدول ارزش

مثال

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \rightarrow \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

تعریف

فرض کنید α یک فرمول گزاره‌ای باشد.

- α را تناقض (یا دروغگو) نامیم هرگاه به ازای هر تابع ارزشگذار v، $v(\alpha) = ۰$.
- α را ارضا شدنی نامیم هرگاه تابع ارزشگذار v موجود باشد به طوری که $v(\alpha) = ۱$.
- α را توتولوژی یا راستگو نامیم هرگاه به ازای هر تابع ارزشگذار v، $v(\alpha) = ۱$.

مثال

- $(\alpha \wedge \neg\alpha)$ یک تناقض است.
- $(\alpha_۱ \to \alpha_۲)$ یک فرمول گزاره‌ای ارضا شدنی است ولی راستگو نیست.
- $(\alpha \vee \neg\alpha)$ یک راستگو است.

مثال

فرمول‌های زیر توتولوژی هستند.

۱) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
۲) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
۳) $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$
۴) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
۵) $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma))$

تعریف

دو فرمول گزاره‌ای α و β را هم‌ارز گوییم هرگاه به ازای هر تابع ارزشگذار v، داشته باشیم $v(\alpha) = v(\beta)$. در این حالت می‌نویسیم $\alpha \equiv \beta$

مثال

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$$
$$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$$
$$(\alpha \to \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee \beta$$

تعریف

- نظریه: مجموعه‌ای از فرمول‌های گزاره‌ای است.
- مدل: یک تابع ارزشگذار است.
- $v \models \alpha$: $v(\alpha) = ۱$،
- $v \models \Sigma$: برای هر $\alpha \in \Sigma$، $v \models \alpha$.

تعریف

برای نظریه گزاره‌ای Σ و فرمول گزاره‌ای α، گوییم α یک نتیجه معنایی Σ است و می‌نویسیم $\Sigma \models \alpha$، هرگاه برای هر مدل $v \models \Sigma$ داشته باشیم $v \models \alpha$.

مثال

$$\{p_1, (p_1 \to p_2)\} \models p_2$$
$$\{p_2, (p_1 \to p_2)\} \not\models p_1$$

قضیه

(فشردگی) هر نظریه گزاره‌ای متناهیاً ارضاشدنی، ارضاشدنی است.

قضیه

(فشردگی) هر نظریه گزاره‌ای متناهیاً ارضاشدنی، ارضاشدنی است.

اثبات: فرض کنید Σ یک نظریه متناهیاً ارضاپذیر باشد و $X_۰, X_۱, X_۲, \ldots$ همه فرمول‌های گزاره‌ای باشند.

قضیه

(فشردگی) هر نظریه گزاره‌ای متناهیاً ارضاشدنی، ارضاشدنی است.

اثبات: فرض کنید Σ یک نظریه متناهیاً ارضاپذیر باشد و $X_۰, X_۱, X_۲, \ldots$ همه فرمول‌های گزاره‌ای باشند.
دنباله‌ی $\Delta_۰ \subseteq \Delta_۱ \subseteq \Delta_۲ \subseteq \ldots$ از مجموعه‌های متشکل از فرمول‌های گزاره‌ای به صورت بازگشتی تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \Delta_۰ = \Sigma \\ \Delta_{n+۱} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{X_n\} & \text{اگر } \Delta_n \cup \{X_n\} \text{ متناهیاً ارضاپذیر باشد.} \\ \Delta_n \cup \{\neg X_n\} & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \end{cases}$$

قضیه

(فشردگی) هر نظریه گزاره‌ای متناهیاً ارضاشدنی، ارضاشدنی است.

اثبات: فرض کنید Σ یک نظریه متاهیاً ارضاپذیر باشد و $X_0, X_1, X_2, \ldots$ همه فرمول‌های گزاره‌ای باشند.
دنباله‌ی $\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \ldots$ از مجموعه‌های متشکل از فرمول‌های گزاره‌ای به صورت بازگشتی تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \Delta_0 = \Sigma \\ \Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{X_n\} & \text{اگر } \Delta_n \cup \{X_n\} \text{ متناهیاً ارضاپذیر باشد.} \\ \Delta_n \cup \{\neg X_n\} & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \end{cases}$$

قرار دهید $\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$. که متناهیاً ارضا شدنی است. چون $\{X, \neg X\}$ ارضا شدنی نیست هر دو نمی‌توانند در Δ باشند.

حال تابع v را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$v(x) = \begin{cases} ۱ & X \in \Delta \text{ اگر} \\ ۰ & X \notin \Delta \text{ اگر} \end{cases}$$

v خواص تابع ارزشگذاری را دارد، برای مثال اگر $v(X_۱ \to X_۲) = ۰$ آن‌گاه $v(X_۱) = ۱, v(X_۲) = ۰$. فرض کنید $v(X_۱) = ۰$ پس $\neg X_۱ \in \Delta$، بنابر فرض $\neg(X_۱ \to X_۲) \in \Delta$ این ناممکن است زیرا $\{\neg X_۱, \neg(X_۱ \to X_۲)\}$ ارضا شدنی نیست.

$v(\Delta) = ۱$ و $\Sigma \subseteq \Delta$ پس $v(\Sigma) = ۱$ ■

مثال

آیا هر نقشه از کشورها را می‌توان حداکثر با ۴ رنگ متفاوت، طوری رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو کشور هم‌مرز رنگ مشابه‌ای نداشته باشند؟

مثال

آیا هر نقشه از کشورها را می‌توان حداکثر با ۴ رنگ متفاوت، طوری رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو کشور هم‌مرز رنگ مشابه‌ای نداشته باشند؟

مثال

آیا هر نقشه از کشورها را می‌توان حداکثر با ۴ رنگ متفاوت، طوری رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو کشور هم‌مرز رنگ مشابه‌ای نداشته باشند؟

فرض کنید $\{C_۱, C_۲, \ldots\}$ مجموعه کشورها و $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ چهار رنگ موجود باشند.

فرض کنید $\{C_۱, C_۲, \ldots\}$ مجموعه کشورها و $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ چهار رنگ موجود باشند.
به ازای هر i و j، فرض کنید گزاره $C_{i,j}$ به معنای آن باشد که کشور C_i رنگ j دارد.

فرض کنید $\{C_۱, C_۲, \ldots\}$ مجموعه کشورها و $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ چهار رنگ موجود باشند.
به ازای هر i و j، فرض کنید گزاره $C_{i,j}$ به معنای آن باشد که کشور C_i رنگ j دارد.
گزاره زیر به معنای آن است که کشور C_i دارای حداقل یک رنگ است:

$$C_{i,۱} \vee C_{i,۲} \vee C_{i,۳} \vee C_{i,۴}$$

فرض کنید $\{C_۱, C_۲, \ldots\}$ مجموعه کشورها و $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ چهار رنگ موجود باشند.
به ازای هر i و j، فرض کنید گزاره $C_{i,j}$ به معنای آن باشد که کشور C_i رنگ j دارد.
گزاره زیر به معنای آن است که کشور C_i دارای حداقل یک رنگ است:

$$C_{i,۱} \vee C_{i,۲} \vee C_{i,۳} \vee C_{i,۴}$$

کشور C_i دو رنگ ندارد:

$$(C_{i,1} \wedge \neg C_{i,2} \wedge \neg C_{i,3} \wedge \neg C_{i,4}) \vee (\neg C_{i,1} \wedge C_{i,2} \wedge \neg C_{i,3} \wedge \neg C_{i,4} \vee$$
$$(\neg C_{i,1} \wedge \neg C_{i,2} \wedge C_{i,3} \wedge \neg C_{i,4}) \vee (\neg C_{i,1} \wedge \neg C_{i,2} \wedge \neg C_{i,3} \wedge C_{i,4}) \vee$$

فرض کنید $\{C_۱, C_۲, \ldots\}$ مجموعه کشورها و $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ چهار رنگ موجود باشند.
به ازای هر i و j، فرض کنید گزاره $C_{i,j}$ به معنای آن باشد که کشور C_i رنگ j دارد.
گزاره زیر به معنای آن است که کشور C_i دارای حداقل یک رنگ است:

$$C_{i,۱} \vee C_{i,۲} \vee C_{i,۳} \vee C_{i,۴}$$

کشور C_i دو رنگ ندارد:

$$(C_{i,1} \wedge \neg C_{i,2} \wedge \neg C_{i,3} \wedge \neg C_{i,4}) \vee (\neg C_{i,1} \wedge C_{i,2} \wedge \neg C_{i,3} \wedge \neg C_{i,4} \vee$$
$$(\neg C_{i,1} \wedge \neg C_{i,2} \wedge C_{i,3} \wedge \neg C_{i,4}) \vee (\neg C_{i,1} \wedge \neg C_{i,2} \wedge \neg C_{i,3} \wedge C_{i,4}) \vee$$

فرض کنید کشورهای C_i و C_j همسایه باشند:

$$((C_{i,1} \wedge \neg C_{j,1}) \vee (C_{j,1} \wedge \neg C_{i,1})) \vee ((C_{i,2} \wedge \neg C_{j,2}) \vee (C_{j,2} \wedge \neg C_{i,2})) \vee$$
$$((C_{i,3} \wedge \neg C_{j,3}) \vee (C_{j,3} \wedge \neg C_{i,3})) \vee ((C_{i,4} \wedge \neg C_{j,4}) \vee (C_{j,4} \wedge \neg C_{i,4}))$$

تعریف

اصول موضوعه دستگاه H عبارتند از:

$$\mathrm{AX}_1 : A \to (B \to A)$$
$$\mathrm{AX}_2 : (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$
$$\mathrm{AX}_3 : (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$$

تنها قاعده دستگاه H، قاعده وضع مقدم است:

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \quad \mathrm{MP}$$

تعریف

فرض کنید Σ یک مجموعه از فرمول‌های گزاره‌ای و α یک فرمول گزاره‌ای باشد. گوییم Σ، α را ثابت می‌کند (یا α یک نتیجه منطقی Σ است) و می‌نویسیم $\Sigma \vdash \alpha$، هرگاه دنباله‌ای چون $\alpha_1, \ldots, \alpha_n = \alpha$ موجود باشد به طوری که هر یک از α_iها در حداقل یکی از شرایط زیر صدق کند:

- α_i عضوی از Σ است.
- α_i یکی از اصول موضوعه است.
- α_i از دو عضو قبلی دنباله بنا به قاعده وضع مقدم، استنتاج شده است.

در این حالت، دنباله فوق را یک استنتاج α از Σ گوییم.

اگر $\emptyset \vdash \alpha$، آن‌گاه گوییم α یک قضیه است و می‌نویسیم $\vdash \alpha$.

مثال

$$\vdash \alpha \to \alpha$$

$1)(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$	اصل موضوع
$2)\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)$	اصل موضوع
$3)(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$	از ۱ و ۲ و وضع مقدم
$4)\alpha \to (\alpha \to \alpha)$	اصل موضوع
$5)\alpha \to \alpha$	از ۳ و ۴ و وضع

قضیه

(استنتاج) فرض کنید Σ یک مجموعه از فرمول‌های گزاره‌ای، α و β دو فرمول گزاره‌ای باشند. در این صورت، اگر $\Sigma, \alpha \vdash \beta$ آن‌گاه $\Sigma \vdash \alpha \to \beta$.

قضیه

(تعدی) اگر $\Sigma \vdash \alpha \to \beta$ و $\Sigma \vdash \beta \to \gamma$، آن‌گاه $\Sigma \vdash \alpha \to \gamma$

مثال

$$\vdash \neg Y \to (Y \to X)$$

اصل	$1) \neg Y \to (\neg X \to \neg Y)$
اصل	$2) (\neg X \to \neg Y) \to (Y \to X)$
۱ و ۲ و تعدی	$3) \neg Y \to (Y \to X)$

مثال

$$\vdash \neg\neg X \to X$$

$1)\neg\neg X \to (\neg X \to \neg\neg\neg X)$	مثال قبل
$2)(\neg X \to \neg\neg\neg X) \to (\neg\neg X \to X)$	اصل
$3)\neg\neg X \to (\neg\neg X \to X)$	از ۱ و ۲
$4)(\neg\neg X \to (\neg\neg X \to X)) \to ((\neg\neg X \to \neg\neg X) \to (\neg\neg X \to X))$	اصل
$5)(\neg\neg X \to \neg\neg X) \to (\neg\neg X \to X)$	از ۳ و ۴
$6)\neg\neg X \to \neg\neg X$	قضیه
$7)\neg\neg X \to X$	از ۵ و ۶

مثال

$$(\neg X \to X) \to X$$

بنا به قضیه استنتاج، کافی است ثابت کنیم که $\neg X \to X \vdash X$

$1)\neg X \to X$	فرض
$2)\neg X \to (\neg\neg(\neg X \to X) \to \neg X)$	اصل
$3)(\neg\neg((\neg X \to X) \to \neg X) \to (X \to \neg(\neg X \to X))$	اصل
$4)\neg X \to (X \to \neg(\neg X \to X))$	از ۲، ۳ و تعدی
$5)(\neg X \to (X \to \neg(\neg X \to X))) \to ((\neg X \to X) \to (\neg X \to \neg(\neg X \to X))$	اصل
$6)(\neg X \to X) \to (\neg X \to \neg(\neg X \to X))$	۴ و ۵ وضع مقدم
$7)\neg X \to \neg(\neg X \to X)$	۱ و ۶ وضع مقدم
$8)(\neg X \to \neg(\neg X \to X)) \to ((\neg X \to X) \to X)$	اصل
$9)(\neg X \to X) \to X$	۷ و ۸ وضع مقدم
$10)X$	۱ و ۹ وضع مقدم

دستگاه استنتاج طبیعی:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \quad & \vdots\\ A & & B\end{matrix}}{A \wedge B}\ \mathrm{I}\wedge \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \wedge B\end{matrix}}{A}\ \mathrm{E}\wedge \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \wedge B\end{matrix}}{B}\ \mathrm{E}\wedge$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix}}{A \vee B}\ \mathrm{I}\vee \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ B\end{matrix}}{A \vee B}\ \mathrm{I}\vee \qquad \dfrac{\begin{matrix} & [A] & [B]\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ A \vee B & C & C\end{matrix}}{C}\ \mathrm{E}\vee$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A \longrightarrow B}\ \mathrm{I}\!\rightarrow \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots & \quad & \vdots\\ A \longrightarrow B & & A\end{matrix}}{B}\ \mathrm{E}\!\rightarrow \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \bot\end{matrix}}{A}\ \bot$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg A}\ \neg I \qquad \dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ A & \neg A\end{array}}{\bot}\ \neg E \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{A}\ \text{برهان خلف}$$

مثال

$$1) \vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to A \to C)$$
$$2) \vdash (A \to C) \to (B \to C) \to (A \vee B \to C)$$
$$3) (\neg A \to B) \to ((A \to B) \to B)$$

قواعد حساب رشته‌ها

$$\frac{\Gamma \vdash A,\Delta \qquad \Gamma \vdash B,\Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B,\Delta}\ R\wedge \qquad \frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}\ L\wedge$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B,\Delta}{\Gamma \vdash A \vee B,\Delta}\ R\vee \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}\ L\vee$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash B,\Delta}{\Gamma \vdash A \longrightarrow B,\Delta}\ R\rightarrow \qquad \frac{\Gamma \vdash A,\Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \longrightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}\ L\rightarrow$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A,\Delta}\ R\neg \qquad \frac{\Gamma \vdash A,\Delta}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}\ L\neg$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ \mathrm{LW} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ \mathrm{RW}$$

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ \mathrm{LC} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ \mathrm{RC}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ \mathrm{Cut}$$

قضیه

صحّت: اگر $\Sigma \vdash X$، آن‌گاه $\Sigma \models X$.

قضیه

تمامیت: اگر $\Sigma \models X$، آن‌گاه $\Sigma \vdash X$.

تعریف

۱ - مجموعه‌ای مثل Γ از گزاره‌ها را سازگار گویند اگر $\Gamma \nvdash \bot$.
۲ - اگر $\Gamma \vdash \bot$، آن‌گاه Γ را ناسازگار گویند.

لم

حکم‌های زیر معادل هستند.

۱ - Γ *سازگار است.*
۲ - *هیچ گزاره‌ای مثل A نیست که $\Gamma \vdash A$ و $\Gamma \vdash \neg A$.*
۳ - *حداقل یک گزاره مثل A هست که $\Gamma \nvdash A$.*

قضیه

دو حکم زیر معادل هستند.

۱) قضیه تمامیت (اگر $\Gamma \vDash A$ آن‌گاه $\Gamma \vdash A$).

۲) هر مجموعه سازگار از گزاره‌ها مدل دارد.

قضیه

دو حکم زیر معادل هستند.

۱) قضیه تمامیت (اگر $\Gamma \vDash A$ آن‌گاه $\Gamma \vdash A$).

۲) هر مجموعه سازگار از گزاره‌ها مدل دارد.

اثبات: ۱ $\Leftarrow$ ۲) فرض کنید Γ مجموعه‌ای سازگار باشد پس $\Gamma \nvdash \bot$. بنابر ۱)، $\Gamma \nvDash \bot$ پس مدلی مثل I وجود دارد که $I \vdash \Gamma$ و $I \nvdash \bot$ یعنی Γ مدل دارد.

قضیه

دو حکم زیر معادل هستند.

۱) قضیه تمامیت (اگر $\Gamma \vDash A$ آن‌گاه $\Gamma \vdash A$).

۲) هر مجموعه سازگار از گزاره‌ها مدل دارد.

اثبات: ۱ $\Leftarrow$ ۲) فرض کنید Γ مجموعه‌ای سازگار باشد پس $\Gamma \nvdash \bot$. بنابر ۱)، $\Gamma \nvDash \bot$ پس مدلی مثل I وجود دارد که $I \vdash \Gamma$ و $I \nvdash \bot$ یعنی Γ مدل دارد.
۲ $\Leftarrow$ ۱) فرض کنید $\Gamma \vDash A$ و $\Gamma \nvdash A$. پس $\Gamma \cup \{\neg A\}$ سازگار است پس مدلی مثل I دارد که یعنی $I \vDash \Gamma$ و $I \vDash \neg A$ این خلاف فرض است. ■

لم

(وجود مدل) اگر Γ سازگار باشد، آن‌گاه مدل I وجود دارد که $I \models \Gamma$.

اثبات: بنابر لم زرن، $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ وجود دارد که Γ^* مجموعه سازگار ماکسیمال است. تابع ارزش v را به صورت

$$v(p_i) = ۱ \text{ اگر و فقط اگر } p_i \in \Gamma^*$$

تعریف کنید و I را مدل تولید شده به وسیله v در نظر بگیرید. با استقرا نشان می‌دهیم که برای هر گزاره مثل A، $I \vDash A$ اگر و فقط اگر $A \in \Gamma^*$.

اثبات: بنابر لم زرن، $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ وجود دارد که Γ^* مجموعه سازگار ماکسیمال است. تابع ارزش v را به صورت

$$v(p_i) = ۱ \text{ اگر و فقط اگر } p_i \in \Gamma^*$$

تعریف کنید و I را مدل تولید شده به وسیله v در نظر بگیرید. با استقرا نشان می‌دهیم که برای هر گزاره مثل A، $I \vDash A$ اگر و فقط اگر $A \in \Gamma^*$.
اگر A اتمی باشد، ادعا بنابر تعریف درست است.

اثبات: بنابر لم زرن، $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ وجود دارد که Γ^* مجموعه سازگار ماکسیمال است. تابع ارزش v را به صورت

$$v(p_i) = ۱ \text{ اگر و فقط اگر } p_i \in \Gamma^*$$

تعریف کنید و I را مدل تولید شده به وسیله v در نظر بگیرید. با استقرا نشان می‌دهیم که برای هر گزاره مثل A، $I \models A$ اگر و فقط اگر $A \in \Gamma^*$.
اگر A اتمی باشد، ادعا بنابر تعریف درست است.
اگر $A = B \wedge C$،

$$I \models B \wedge C \leftrightarrow I \models B \text{ و } I \models C \leftrightarrow$$
$$B \in \Gamma^* \text{ و } C \in \Gamma^* \leftrightarrow B \wedge C \in \Gamma^*$$

اثبات: بنابر لم زرن، $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ وجود دارد که Γ^* مجموعه سازگار ماکسیمال است. تابع ارزش v را به صورت

$$v(p_i) = ۱ \text{ اگر و فقط اگر } p_i \in \Gamma^*$$

تعریف کنید و I را مدل تولید شده به وسیله v در نظر بگیرید. با استقرا نشان می‌دهیم که برای هر گزاره مثل A، $I \vDash A$ اگر و فقط اگر $A \in \Gamma^*$.
اگر A اتمی باشد، ادعا بنابر تعریف درست است.
اگر $A = B \wedge C$،

$$I \vDash B \wedge C \leftrightarrow I \vDash B \text{ و } I \vDash C \leftrightarrow$$
$$B \in \Gamma^* \text{ و } C \in \Gamma^* \leftrightarrow B \wedge C \in \Gamma^*$$

اگر $A = \neg B$،

$$I \vDash A \leftrightarrow I \vDash \neg B \leftrightarrow I \nvDash B \leftrightarrow B \notin \Gamma^* \leftrightarrow \neg B \in \Gamma^*. \quad \blacksquare$$

مراجع

۱ - منطق ریاضی، دکتر محمد اردشیر
۲ - مبانی ریاضی دکتر مجتبی آقایی
۳- منطق و محاسبه، دکتر سعید صالحی و دکتر مرتضی منیری

پایان

تشکر از توجه شما