دوره آموزشی آشنایی با منطق ریاضی، فلسفی و محاسباتی

منطق مرتبه اول و ساختار های ریاضی

علی ولی زاده
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

بهمن ماه ۱۳۹۵

پژوهشگاه دانش های بنیادی، شعبه اصفهان

چند مثال:

- اگر فردی برادر علی و برادر مریم باشد، آنگاه مریم خواهر علی است.

در منطق گزاره ها: $p \wedge q \to r$

بررسی دقیق تر: «اگر فردی باشد که برادر علی و برادر مریم است، آنگاه مریم خواهر علی است.»

۱- امکان استفاده از متغیر و ثابت: $x,\ \mathbf{a},\ \mathbf{m}$
۲- امکان استفاده از محمول: $B(-,-),\ S(-,-)$
۳- امکان استفاده از سور: $\exists$

در منطق مرتبه اول:

$$\left(\exists x\big(B(x,\mathbf{a}) \wedge B(x,\mathbf{m})\big)\right) \to S(\mathbf{a},\mathbf{m})$$

- این استدلال را در نظر بگیرید:

همه انسان ها توانایی درک حقیقت را دارند.

علی یک انسان است.

علی توان درک حقیقت را دارد.

در منطق گزاره ها:

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{r}$$

در منطق مرتبه اول، با معرفی مناسب ثوابت، متغیر ها و محمول ها:

$$\frac{\begin{array}{l} \forall x\big(H(x) \rightarrow C(x, \mathbf{t})\big) \\ H(\mathbf{a}) \end{array}}{C(\mathbf{a}, \mathbf{t})}$$

- هر کس که اصفهان را دوست دارد، زاینده رود پرآب را هم دوست دارد:

$$\forall x\left(L(x,\mathbf{i}) \rightarrow \left(FW(\mathbf{z}) \rightarrow L(x,\mathbf{z})\right)\right)$$

- هر کس که جوینده حقیقت است، آن را پیدا خواهد کرد:

$$\forall x(S(x,\mathbf{t}) \rightarrow F(x,\mathbf{t}))$$

- هر چیز که در جستن آنی، آنی (مولانا):

$$\forall x\forall y(S(x,y) \rightarrow x = y)$$

بعد از چرا، چگونه؟

- یادآوری:

زبان منطق گزاره ها شامل:

۱- بی نهایت شمارش پذیر نماد برای گزاره های اتمی $p_0, \ p_1, \dots$

۲- پنج رابط منطقی: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$

۳- نمادهای کمکی: $(, \ )$

فرمول های قابل پذیرش (یا خوش ساخت) به صورت استقرایی به شکل زیر تعریف می شوند:

۱- هر گزاره اتمی یک فرمول خوش ساخت است.

۲- اگر α و β دو فرمول خوش ساخت باشند، آنگاه عبارات زیر نیز فرمولی خوش ساخت هستند:

$$(\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta), (\neg\alpha)$$

- مثال از عباراتی که فرمول خوش ساخت نیستند:

$$p_0 \neg p_1, \ \wedge p_2, ((p_2 \rightarrow p_4$$

- زبان منطق مرتبه اول، شامل نماد های منطقی:

۱- پنج رابط منطقی: $\wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow , \neg$

۲- نمادهای کمکی: $(,)$

۳- سورها: $\forall , \exists$

۴- بی نهایت شمارش پذیر متغیر: $x_0, \; x_1, \ldots$

و نمادهای غیرمنطقی (!) شامل:

۱- بی نهایت شمارش پذیر نماد برای **ثوابت**: $c_0, c_1, \ldots$

۲- بی نهایت شمارش پذیر نماد برای **توابع**: $f_0^1, f_1^1, \ldots, f_0^n, f_1^n, \ldots$

۳- بی نهایت شمارش پذیر نماد برای **محمولات**: $R_0^1, R_1^1, \ldots, R_0^n, R_1^n, \ldots$

- در هر بررسی منطقی، لزوما همه نمادهای دسته دوم به کار برده نمی شوند. به عنوان مثال اگر میخواهیم به بررسی گراف ها بپردازیم تنها به دو رابطه دو تایی احتیاج داریم.

دو مفهوم استقرایی

- **ترم ها (terms):** که نهایتا به اشیاء جهان تعبیر می شوند. شبیه اسم ها و برخی ترکیبات اسمی در زبان طبیعی هستند، مانند «علی»، «برادر علی»، «شخص» و ... این مفهوم به شکل استقرایی تعریف می شود:

۱- همه ثوابت و متغیر ها ترم هستند.

۲- به ازای هر n، اگر $t_1, \ldots, t_n$ ترم هایی باشند و f_k^n یک نماد تابعی، آنگاه عبارت زیر نیز یک ترم است

$$f_k^n(t_1, \ldots, t_n)$$

- **فرمول ها (formulas)**: که ارزش درستی و غلطی میگیرند و به شکل استقرایی تعریف می شود:

۱- به ازای هر n، اگر $t_1, \dots ,t_n$ ترم هایی باشند و R_k^n یک نماد محمولی، آنگاه عبارت زیر یک فرمول است

$$R_k^n(t_1, \dots ,t_n)$$

۲- اگر φ_1 و φ_2 فرمول هایی باشند، عبارات زیر نیز فرمول خواهند بود

$$(\neg\varphi_1), (\varphi_1 \wedge \varphi_2), (\varphi_1 \vee \varphi_2), (\varphi_1 \rightarrow \ \varphi_2), (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$$

و

$$(\forall x(\varphi)), (\exists x(\varphi))$$

کمی معناشناسی!

- چگونه بفهمیم که یک فرمول مرتبه اول **درست** است؟ مثلا این فرمول را در نظر بگیرید

$$\forall x_1 \exists x_2 R_1^2(x_1, x_2)$$

- معنای یک فرمول مرتبه اول چیست؟
- فرض کنید در اعداد طبیعی هستیم و مشغول صحبت درباره ترتیب موجود در آن:

$$0 < 1 < 2 < 3 < \cdots < n < \cdots$$

- کمی دقیق تر، فرض کنید درباره اعداد طبیعی و رابطه کوچکتری (کوچکتر بودن x_1 از x_2) صحبت می کنیم. در این صورت **معنای** فرمول فوق می شود:

«برای هر عدد طبیعی عدد طبیعی وجود دارد که از آن بزرگتر است»

❖ پس فرمول فوق **درست** است.

❖ عجله نکنید!

- حال فرض کنید داریم درباره انسان ها و رابطه برادری صحبت می کنیم. در این صورت معنای فرمول مورد بحث این خواهد بود:

«هر انسانی را برادریست»

❖ پس فرمول فوق **غلط** است.

❖ مطمئنید؟

- نتیجه ای نگرفتیم. بیایید فرمول دیگری را در نظر بگیریم:

$$\left(\exists x_1 R_1^1(x_1) \wedge \exists x_2 R_2^1(x_2)\right) \rightarrow \exists x_3 \left(R_1^1(x_3) \wedge R_2^1(x_3)\right)$$

- اگر اندیس ها برایتان ناخوشایند است این فرمول را در نظر بگیرید

$$\left(\exists x R_1(x) \wedge \exists y R_2(y)\right) \rightarrow \exists z\left(R_1(z) \wedge R_2(z)\right)$$

- فرض کنید در اعداد صحیح هستیم و درباره زوج و فرد بودن اعداد صحبت می کنیم. به طور دقیق تر فرض کنید **معنای** $R_1(-)$ و $R_2(-)$ را به ترتیب زوج بودن و فرد بودن در نظر گرفته ایم. در این صورت **معنای** فرمول مورد بحث این است:

«اگر عدد صحیحی وجود دارد که زوج است و عدد صحیحی وجود دارد که زوج است،

آنگاه عدد صحیحی وجود دارد که هم زوج و هم فرد است»

- می دانیم که ۲ زوج و ۳ فرد است. اما هیچ عددی نمیتواند هم زوج و هم فرد باشد.

- ❖پس در **جهانی** که در نظر گرفتیم و با **معنایی** که بر فرمول فوق **حمل** کردیم، ارزش آن فرمول **غلط** شد.
- ❖مطمئن هستید؟
- ❖بله

- بنابراین **درست** بودن یا **غلط** بودن یک فرمول مرتبه اول به دو عامل بستگی دارد:
  ۱- **جهانی** که در آن مشغول بررسی آن فرمول هستیم.
  ۲- به **معنایی** که در آن جهان **بر** آن فرمول **حمل** می کنیم.

به طور دقیق تر

«**صدق** یک فرمول به **تعبیر** آن بستگی دارد»

تعبیر (Interpretation) و صدق (Truth)

- **ابتدا یک تعریف.** یک ***زبان مرتبه اول*** مثل $\mathcal{L}$ مجموعه ای است شامل همه نمادهای منطقی زبان منطق مرتبه اول به همراه

  ۱- زیر مجموعه ای (متناهی، نامتناهی یا تهی) از نمادهای ثوابت.

  ۲- زیر مجموعه ای (متناهی، نامتناهی یا تهی) از نمادهای توابع.

  ۳- زیر مجموعه ای **ناتهی** (متناهی یا نامتناهی) از نمادهای محمولات.

- بنابر این در یک زبان مرتبه اول، ممکن است هیچ نماد ثابت یا تابعی وجود نداشته باشد. مثلا برای بررسی گراف ها، در وهله اول داشتن زبانی که تنها شامل دو محمول دو موضعی است کفایت می کند. یکی برای بیان تساوی و دیگری برای بیان اتصال دو راس. اما یک زبان مرتبه اول را همواره ملزم میکنیم که حداقل یک نماد محمولی داشته باشد. باقی عناصر تشکیل دهنده آن به مفهوم یا ساختارهایی که قصد بررسی آنها را داریم بستگی خواهد داشت.

- **تعریف.** برای زبان مرتبه اول $\mathcal{L}$، یک **تعبیر** یا یک $\mathcal{L}$-ساخت $(\mathcal{L}-\mathrm{structure})$ مثل $\mathfrak{M}$ از عناصر زیر تشکیل شده است:

۱- مجموعه ای ناتهی مثل M که به آن **جهان** یا **دامنه سخن** میگویند.

۲- برای هر نماد محمولی مثل R_k^n در زبان $\mathcal{L}$ ، رابطه ای n موضعی روی M که آنرا با $(R_k^n)^{\mathfrak{M}}$ نمایش می دهیم.

۲ - برای هر نماد تابعی مثل f_k^n در زبان $\mathcal{L}$ ، تابعی n متغیره روی M که آنرا با $(f_k^n)^{\mathfrak{M}}$ نمایش می دهیم.

۲- برای هر نماد از ثوابت مثل c_k در زبان $\mathcal{L}$ ، عضوی از M که آنرا با $(c_k)^{\mathfrak{M}}$ نمایش می دهیم.

- یک تعبیر را به این شکل نمایش می دهیم:

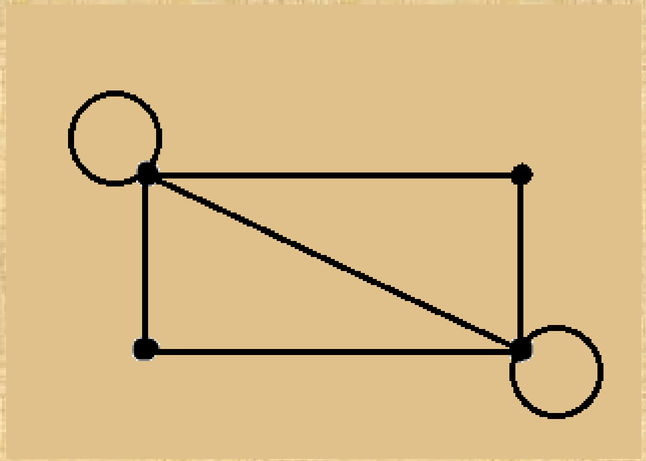
$$\mathfrak{M}=\langle M,(R_1^1)^{\mathfrak{M}},\dots,(f_1^1)^{\mathfrak{M}},\dots,(c_1)^{\mathfrak{M}},\dots\rangle$$

- **چند مثال:**

۱- برای زبان مرتبه اول $\mathcal{L} = \{R_1^2, R_2^2\}$ که شامل دو محمول دو موضعی است می توان تعبیر های متعددی مثال زد:

الف) $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{Q}, = , < \rangle$ که در آن جهان سخن اعداد گویا و محمولات R_1^2 و R_1^2 به ترتیب با «تساوی» و «رابطه کمتر بودن» تعبیر شده اند.

ب) $\mathfrak{M} = \langle V, = , E \rangle$ که در آن جهان سخن مجموعه ای از نقاط و محمولات R_1^2 و R_1^2 به ترتیب با «تساوی» و «رابطه اتصال نقاط» تعبیر شده اند. مثلا شبیه به شکل زیر



۲- برای زبان مرتبه اول $\mathcal{L} = \{R_1^2, R_2^2, f_1^2, f_2^2, c_1, c_2\}$ که شامل دو محمول دو موضعی، دو تابع دو متغیره و دو نماد ثابت است می توان تعبیر های زیر را مثال زد:

الف) $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{R}, =, <, +, \times, 0, 1 \rangle$ که در آن جهان سخن اعداد حقیقی و محمولات R_1^2 و R_1^2 به ترتیب با «تساوی» و «رابطه کمتر بودن»، توابع با جمع و ضرب و ثوابت به ترتیب با «صفر» و «یک» تعبیر شده اند.

ب) $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{Z}, \equiv_5, <, +, \times, 0, 1 \rangle$ که در آن جهان سخن اعداد صحیح و محمولات R_1^2 و R_1^2 به ترتیب با «همنهشتی به پیمانه ۵ » و «رابطه کمتر بودن»، توابع با جمع و ضرب و ثوابت به ترتیب با «صفر» و «یک» تعبیر شده اند.

صدق (Truth)

- **تعریف.** یک فرمول مرتبه اول را یک ***جمله*** میگویند هرگاه همه متغییر های حاضر در آن در دامنه یک سور قرار گیرند.
- **مثال:**

۱- فرمول های $\left(R_1^2(x_1,c_1) \rightarrow \exists x_2 R_1^1(x_2)\right)$ $R_1^2(c_1,c_2), \forall x_1$ جمله هستند.

۲- فرمول های $\left(R^2(x_2,c_2) \rightarrow \neg R_1^2(x_1,x_2)\right)$ $R_1^1(x_1), \exists x_2$ جمله **نیستند**.

- در حالت کلی مفهوم صدق برای هر فرمولی قابل تعریف است اما نهایتا صدق برای جمله هاست که اهمیت اساسی دارد. در واقع صدق فرمول ها با صدق جمله ای که از بستن همه متغییر های آزاد فرمول مورد نظر با سورهای عمومی بدست می آید تعریف می شود.

- **تعریف.** تعریف دقیق صدق با استفاده از توابع ارزش گذاری انجام می شود که ما به پیچیدگی های تکنیکی آن اشاره نمی کنیم. تنها بیان می کنیم که تعریف صدق با برداشت شهودی ما از رابط های منطقی و سور ها همخوان است.

- **مثلا،** اگر می خواهیم صدق جمله $\forall x_1 \exists x_2 (R_2^2(x_1,x_2) \wedge \neg R_2^2(x_2,x_2))$ را در ساختار $\mathfrak{M}$ $= \langle V, =, E \rangle$ که قبلا معرفی شد بررسی کنیم. باید بررسی کنیم که آیا برای **هر** راس دلخواه مثل a ، راسی مثل b **وجود** دارد که b به خودش متصل نباشد **و** به a متصل باشد. که با بررسی ساختار مورد نظر می بینیم که این جمله در $\mathfrak{M}$ **ارضاء** نمی شود یا **صادق** نیست.

- در صورتی که جمله ای مثل φ در ساختاری مثل $\mathfrak{M}$ **صدق** کند (یا معادلا، ساختار $\mathfrak{M}$ فرمول φ را **ارضاء** کند)، این موضوع را با نماد زیر نشان می دهیم

$$\mathfrak{M} \vDash \varphi$$

همچنین می گوییم $\mathfrak{M}$ **مدلی** برای φ است.

- قبل تر جملاتی را دیدیم که برای آنها ساختارهایی هستند که آنها را ارضاء می کنند و ساختارهایی هستند که آنها را ارضاء نمی کنند.
- سوالی که مطرح می شود این است که آیا جملاتی هستند که در هر ساختار مرتبه اولی صدق کنند؟
- **تعریف.**

۱- جمله φ در زبان منطق مرتبه اول را ***منطقا معتبر*** (**Logically Valid**) می نامیم هرگاه به ازای هر ساختاری مانند $\mathfrak{M}$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \vDash \varphi$.

۲-جمله φ در زبان منطق مرتبه اول را یک ***تناقض*** (**Contradiction**) می نامیم هرگاه φ در هیچ ساختار مرتبه اولی ارضاء نشود.

۳- جمله φ را **صدق پذیر** یا **ارضاء شدنی** (**Satisfiable**) می نامیم هرگاه ساختاری مرتبه اول مانند $\mathfrak{M}$ وجود داشته باشد که داشته باشیم $\mathfrak{M} \vDash \varphi$.

۴- جمله φ را **نتیجه منطقی** (**Logical Consequence**) مجموعه ای از جملات مثل Γ می نامیم هرگاه به ازای هر ساختاری مانند $\mathfrak{M}$ که مدلی برای همه جملات Γ باشد داشته باشیم $\mathfrak{M} \vDash \varphi$. در این صورت می نویسیم

$$\Gamma \vDash \varphi$$

- جملاتی که در مثال های قبل دیدیم همگی صدق پذیر بودند.
- مثالی از جمله ای منطقا معتبر: $\forall x_1 R_1^1(x_1) \rightarrow \exists x_1 R_1^1(x_1)$
- مثالی از یک تناقض: $\exists x_1 \left(R_1^1(x_1) \land \neg R_1^1(x_1)\right)$

- بررسی اینکه یک جمله منطقا معتبر است در مقایسه با منطق گزاره ها بسیار دشوار (و حتی شاید بتوان گفت نا ممکن) است. چرا که برای این کار میبایست همه ساختارهای مرتبه اول مورد بررسی قرار گیرند!

- به همین دلیل برخلاف منطق گزاره ها که سیستم اثبات عملا ره آوردی برای آن منطق نداشت، داشتن سیستم اثبات برای منطق مرتبه اول ضروری و کارساز است.

سیستم اثبات و نظریه های مرتبه اول

- **اصول موضوعه منطقی (شمای اصل موضوع):**

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$
3. $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \psi)$
4. $\forall x_i \varphi(x_i) \to \varphi(t)$ (*)
5. $\forall x_i(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x_i \psi)$ (**)

(*) در صورتی که t **جایگزاری** به جای x_i در $\varphi(x_i)$ **آزاد** باشد. نهایتا به این مفهوم که متغیری در t بکار نرفته باشد که با جایگزاری در $\varphi(x_i)$ بسته شود. مثلا جایگزاری $f_1^1(x_2)$ به جای x_1 در $\exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)$ آزاد نیست.

(**) در صورتی که φ شامل **حضور آزادی** از x_i نباشد.

• قواعد استنتاج:

1. Modus Ponens (MP)

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi}$$

2. Generalization (Gen)

$$\frac{\varphi}{\forall x_i \varphi}$$

- **تعریف**. در یک زبان مرتبه اول مثل $\mathcal{L}$ می گوییم مجموعه ای از جملات مانند Γ جمله φ را ***اثبات*** می کند هرگاه دنباله ای متناهی از جملات مانند $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ در زبان $\mathcal{L}$ وجود داشته باشد که $\varphi_n \leftrightharpoons \varphi$ و به ازای هر i برای φ_i یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱- φ_i یک اصل موضوع منطقی باشد.

۲- φ_i در Γ باشد.

۳- φ_i حاصل به کاربردن یکی از قواعد استنتاج روی فرمول های قبلی در دنباله باشد.

در این صورت می نویسیم

$$\Gamma \vdash \varphi$$

• **مثال**. برای اثبات $\forall x_1 \forall x_2 \varphi \vdash \forall x_2 \forall x_1 \varphi$ به این طریق عمل می کنیم

1.	$\forall x_1 \forall x_2 \varphi$	فرض
2.	$\forall x_1 \forall x_2 \varphi \to \forall x_2 \varphi$	(A4)
3.	$\forall x_2 \varphi$	1,2, MP
4.	$\forall x_2 \varphi \to \varphi$	(A4)
5.	φ	3,4, MP
6.	$\forall x_1 \varphi$	5, Gen
7.	$\forall x_2 \forall x_1 \varphi$	6,Gen

مثال هایی از نظریه های مرتبه اول

- **مثال ۱.** نظریه گراف های ساده بدون جهت

$\mathcal{L} = \{R_1^2, R_2^2\}$

- اصول موضوعه تساوی برای محمول R_1^2
- $\forall x \neg R_2^2(x,x)$ عدم وجود طوق
- $\forall x \forall y\ (R_2^2(x,y) \to R_2^2(y,x))$ عدم وجود جهت

- **مثال ۲.** نظریه ترتیب های جزئی

$\mathcal{L} = \{R_1^2, R_2^2\}$

- اصول موضوعه تساوی برای محمول R_1^2
- $\forall x \neg R_2^2(x,x)$ $\qquad$ $\forall x \neg (x < x)$
- $\forall x \forall y \left(R_2^2(x,y) \rightarrow \neg R_2^2(y,x) \right)$ $\qquad$ $\forall x \forall y \left(x < y \rightarrow \neg (y < x) \right)$
- $\forall x \forall y \forall z \left(R_2^2(x,y) \wedge R_2^2(y,z) \rightarrow R_2^2(x,z) \right)$

$\forall x \forall y \forall z \left(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z \right)$

- **مثال ۳.** نظریه ترتیب های خطی چگال

$\mathcal{L} = \{R_1^2, R_2^2\}$

- اصول موضوعه تساوی برای محمول R_1^2
- $\forall x \neg R_2^2(x,x)$
- $\forall x \forall y\, (R_2^2(x,y) \rightarrow \neg R_2^2(y,x))$
- $\forall x \forall y \forall z \left(R_2^2(x,y) \land R_2^2(y,z) \rightarrow R_2^2(x,z)\right)$
- $\forall x \forall y\, \left(R_2^2(x,y) \lor R_2^2(y,x) \lor R_1^2(x,y)\right)$

$\forall x \forall y (x < y \lor y < x \lor x = y)$

- $\forall x \forall y \exists\, z (R_2^2(x,y) \rightarrow \left(R_2^2(x,z) \land R_2^2(z,y)\right)$

$\forall x \forall y \exists z (x < y \rightarrow x < z \land z < y)$

- **مثال ۴.** نظریه گروه ها

$\mathcal{L} = \{R_1^2, f_1^2, c_1\}$

- R_1^2 اصول موضوعه تساوی برای محمول
- $\forall x \left(R_1^2(f_1^2(x,c),x) \wedge R_1^2(f_1^2(c,x),x) \right)$ $\quad \forall x(x * c = c * x = x)$
- $\forall x \exists y \left(R_1^2\left(f_1^2(x,y), f_1^2(y,x)\right) \wedge R_1^2(f_1^2(x,y),c) \right)$

$\forall x \exists y \, (x * y = y * x = c)$

- $\forall x \forall y \forall z \left(R_2^2\left(f_1^2\left(x, f_1^2(y,z)\right), f_1^2(f_1^2(x,y),z)\right) \right)$

$\forall x \forall y \forall z (x * (y * z) = (x * y) * z)$

- **مثال های دیگر** (با در نظر گرفتن زبان مناسب)

۱- نظریه گروه های مرتب

۲- نظریه حلقه ها، نظریه میدان ها، نظریه میدان ها با مشخصه p

۳- نظریه فضاهای برداری (بسته به میدان مورد نظر، ممکن است زبان مورد نیاز **ناشمارا** باشد)

۴- نظریه میدان های بسته جبری

۵- نظریه میدان های بسته حقیقی

۶- نظریه گراف های جهت دار

۷- نظریه گراف های تصادفی

۸- نظریه میدان های با ارزش گذاری (valued fields)

۹- نظریه حساب اعداد طبیعی

۱۰- نظریه مجموعه ها

۱۱- نظریه میدان های بسته جبری به همراه یک خودریختی

و ...