

مروری بر پژوهش های ریاضی مریم میرزاخانی

ایمان افتخاری

۱. مقدمه

کارهای ریاضی دکتر مریم میرزاخانی با معرفی ایده‌هایی کاملاً جدید و پیوند دادن شاخه‌های مختلفی از ریاضیات، پیشرفت‌های بسیار مهمی را در مطالعه رویه‌های ریمان و خانواده آنها رقم زده است. شاخه‌هایی نظیر هندسه هذلولوی، آنالیز مختلط، توپولوژی، سیستم‌های دینامیکی و هندسه جبری شمارشی در کارهای میرزاخانی به هم پیوند می‌خورند.

رساله دکتری مریم میرزاخانی، در کنار نتایج مهم و ارزنده دیگر و نوآوری‌های فراوان، اثباتی جدید از حدس ادوارد ویتن^۱ - که ماکسیم کنتسویچ^۲ به خاطر اولین اثبات از آن در سال ۱۹۹۸ جایزه فیلدز را دریافت کرد - در خود داشت. این رساله خیلی زود مورد توجه تعداد زیادی از ریاضیدانان قرار گرفت. در سالهای بعد، میرزاخانی موفق به اثبات ارگودیک بودن شار ترستن^۳ (۲۰۰۸) شد و سپس در پروژه‌ای مشترک با اسکین^۴ (و در بخشی مشترک با محمدی) نظریه راتنر^۵ را توسعه داد و نتایج مختلفی از آن گرفت (۲۰۱۲).

این پژوهش‌های ارزشمند باعث شد که یکی از مدال‌های فیلدز^۶ سال ۲۰۱۴ از سوی کنگره بین‌المللی ریاضیدانان به میرزاخانی تعلق گیرد، تا او اولین زن و اولین ایرانی دریافت کننده این جایزه لقب گیرد.

در این نوشتار برخی از پیش‌نیازهای لازم برای صورت‌بندی تعدادی از قضایای مهم میرزاخانی را به طور خلاصه مرور خواهیم کرد. بیان ایده‌های به‌کاررفته در مقالات ایشان از حوصله این نوشتار کاملاً خارج است و آشنایی بیشتر خواننده با برخی از نظریات ریاضی را می‌طلبد. با این وجود امیدواریم خواننده ایرانی علاقمند به مطالعه این نوشتار، آشنایی حداقلی با کارهای ریاضی میرزاخانی پیدا کند.

نوشته با طرح دو مسأله با صورت‌های ساده آغاز می‌شود. سپس در چند بخش (بخش‌های ۳، ۴ و ۵) تلاش خواهیم کرد که این مسایل را به کارهای میرزاخانی گره بزنیم.

۲. دو مسأله با ظاهرهای متفاوت

۱.۲. حدس اپنهایم. فرض کنید Q یک فرم مربعی با حداقل ۳ متغیر باشد. مثالی که خوب است خواننده در ذهن داشته باشد، فرم مربعی

$$Q_0(x, y, z) = x^2 - \sqrt{2}xy + \sqrt{3}z^2$$

^۱Edward Witten

^۲Maxim Kontsevich

^۳Thurston

^۴Eskin

^۵Ratner

^۶Fields

است. در حالت کلی فرم مربعی Q دارای متغیرهای x_1, \dots, x_n است و به صورت

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

داده می شود. می توان فرض کرد که برای هر i, j تساوی $a_{ij} = a_{ji}$ برقرار است.

فرم مربعی Q با ماتریس متقارن $A = [a_{ij}]$ در تناظر است و ناتباهیده خوانده می شود اگر ماتریس A ناتباهیده باشد. اگر Q ناتباهیده باشد همه مقادیر ویژه A حقیقی و ناصفر هستند. Q را غیرمعین گوئیم اگر علامت همه این مقادیر ویژه یکسان نباشد. به عنوان مثال ماتریس وابسته به فرم مربعی Q که در بالا به آن اشاره شد، ماتریس غیر معین و ناتباهیده

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

است. حدس اینهایم که نهایتاً توسط مارگولیس به اثبات رسید [۵] بدین شرح است:

(۱-۲): حدس اینهایم^۷ (۱۹۲۹) - قضیه مارگولیس^۸ (۱۹۸۶):
 اگر فرم مربعی Q ناتباهیده و غیرمعین باشد، تصویر \mathbb{Z}^n تحت Q در \mathbb{R}^n چگال است اگر و تنها اگر Q مضربی از یک فرم مربعی با ضرایب صحیح نباشد.

مثلاً فرم مربعی ناتباهیده و غیر معین

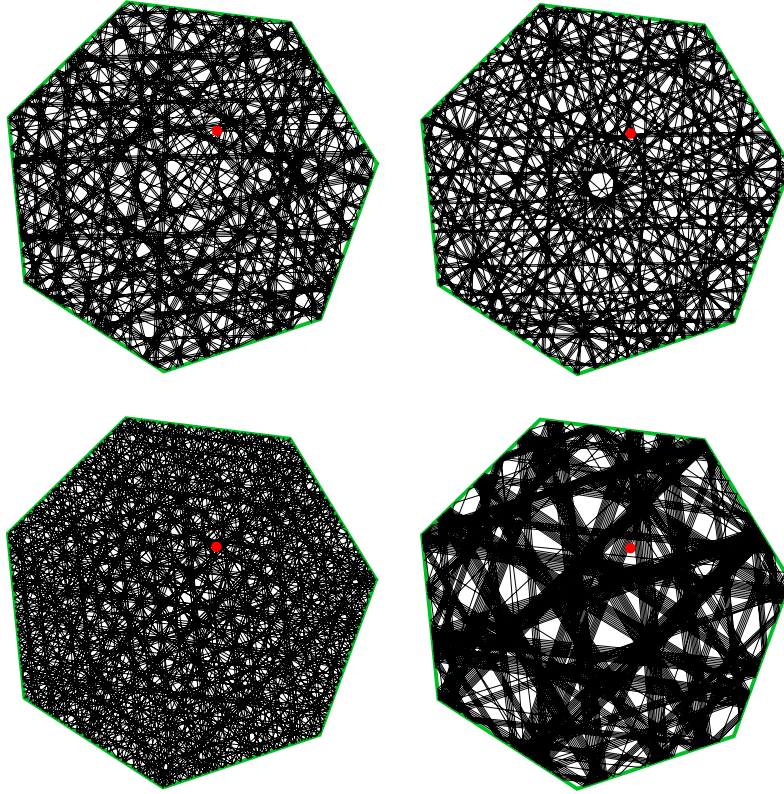
$$Q_0(x, y, z) = x^2 - \sqrt{2}xy + \sqrt{3}z^2$$

به وضوح مضربی از یک فرم مربعی با ضرایب صحیح نیست، اما نشان دادن این که تصویر \mathbb{Z}^3 تحت Q_0 در \mathbb{R}^3 چگال است بسیاری از دشواری های اثبات مارگولیس را در خود پنهان دارد.

پیش از آن که در مورد اثبات مارگولیس و ارتباط آن با پژوهش های میرزاخانی صحبت کنیم می خواهیم نگاهی به یک مسأله در ظاهر متفاوت داشته باشیم.

۲.۲. مسأله بیلپارد در چند ضلعی های محدب. یک چند ضلعی P در نظر بگیرید. برای ساده تر شدن مسأله فرض کنید تمام زوایای P مضارب گویایی از π باشند. P را به عنوان صفحه بیلپارد در نظر بگیرید. اگر یک توپ بیلپارد در صفحه شلیک شود پس از هر بار برخورد با کناره ها (یعنی اضلاع P) با زاویه ای برابر و در جهت معکوس منعکس می شود و مسیر خود را ادامه می دهد. با فرض شرایط ایده آل (عدم وجود اصطکاک و اتلاف انرژی در برخوردها) مسیر توپ تا بی نهایت ادامه پیدا می کند. در شکل ۱ مسیر یک توپ بیلپارد که در یک هفت ضلعی منتظم با چند زاویه مختلف شلیک شده است پس از بیش از ۴۰۰ بار برخورد با اضلاع هفت ضلعی به تصویر کشیده شده است. در مورد مسیر توپ سؤال های مختلفی می توان پرسید. از جمله این که در چه صورت توپ در یک مسیر متناوب طی مسیر خواهد کرد.

توجه کنید که اگر دو توپ در فاصله ای نزدیک به هم و در یک جهت شلیک شوند مسیر آنها تا مدتی نزدیک به هم، به موازات یکدیگر و با حفظ فاصله ای ثابت ادامه پیدا می کند. البته ممکن است پس از گذشت زمان طولانی به دلیل برخورد با اضلاع مختلفی از P این دو مسیر کاملاً متفاوت شوند. این موضوع باعث پیچیده شدن بررسی این مسأله می شود.



شکل ۱: مسیر توپ بیلیارد در یک ۷ ضلعی منتظم برای چهار زاویه شلیک متفاوت و پس از حدود ۴۰۰ برخورد.

با این وجود، اگر یک مسیر تناوبی برای توپ پیدا کنیم، به موازات آن و در فاصله کم از آن بی نهایت مسیر تناوبی دیگر یافت خواهد شد که در واقع با هم معادل هستند. تعداد مسیرهای متناوب غیرمعادل با طول حداکثر ℓ در صفحه بیلیارد P را با $n_P(\ell)$ نشان می دهیم. با این مقدمه، یکی از اولیه ترین سوال ها در مورد مسأله بیلیارد را می توان به صورت زیر فرمول بندی کرد.

(۲-۲) حدس:

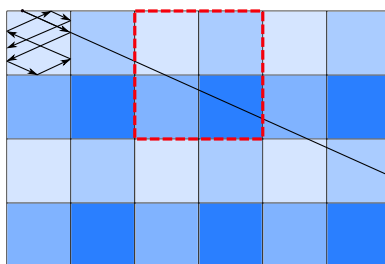
برای هر صفحه بیلیارد چندضلعی P با زوایای گویا (نسبت به π) با بزرگ شدن ℓ رفتار مجانبی $n_P(\ell)$ به صورت

$$n_P(\ell) \sim c_P \cdot \ell^2$$

توصیف می شود که در آن c_P یک مقدار ثابت وابسته به چند ضلعی P است.

با وجود پیشرفت های قابل توجه در راستای حدس (۲-۲)، این حدس همچنان باز است. در میان نتایج مهمی که در راستای این حدس به دست آمده است، می توان به قضیه زیر از هاوارد میزور^۹ اشاره کرد [۶].

^۹Howard Masur



شکل ۲: مسیر توپ بلیارد در یک مستطیل در شبکه ای که از انعکاس های مستطیل نسبت به اضلاع آن به دست می آید به یک خط مستقیم تبدیل می شود.

[۷]:

(۳-۲) قضیه میزور:

برای هر چند ضلعی P با ضرایب گویا اعداد ثابت c_1 و c_2 وجود دارند به طوری که

$$c_1 \ell^2 < n_P(\ell) < c_2 \ell^2$$

قضیه زیر [۲] بهترین نتیجه دانسته شده در مورد حدس (۲-۲) است:

(۴-۲) قضیه اسکین- میرزاخانی- محمدی (۲۰۱۲):

حدس ۲-۲ برای هر چند ضلعی P با زوایای گویا به طور میانگین برقرار است. به عبارت دیگر حد

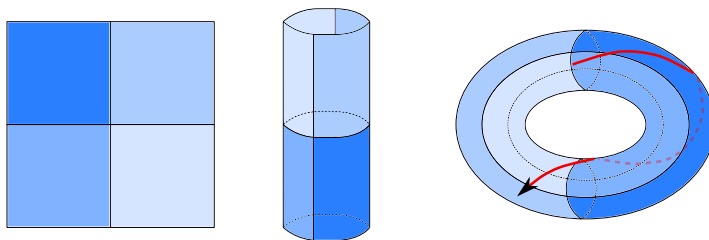
$$c_P = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \ell} \int_0^\ell \frac{n_P(x)}{x^2} dx$$

برای هر چند ضلعی P وجود دارد.

ابزار لازم برای اثبات قضیه ۴-۲ شباهت های زیادی به ابزاری دارد که برای اثبات حدس اپنهیم مورد استفاده قرار گرفت. این ابزار که به نظریه راتنر^{۱۰} معروف است در سال ۲۰۱۲ توسط اسکین و میرزاخانی به میزان قابل ملاحظه ای تعمیم یافت تا امکان حمله به مسائلی از جنس حدس (۲-۲) را ایجاد کند. در فصل های بعدی و پس از مرور پاره ای از مقدمات لازم به این موضوع باز خواهیم گشت. با این وجود مفید خواهد بود که قبل از اتمام این بخش کمی در مورد مثال کلاسیک صفحه بلیارد مستطیل شکل صحبت می کنیم.

فرض کنید مسیر توپ برای اولین بار به یکی از اضلاع مستطیل بلیارد برسد. به جای آن که توپ را نسبت به ضلع منعکس کنیم، می توانیم صفحه بلیارد را نسبت به ضلع منعکس کنیم و به توپ اجازه دهیم مسیر مستقیم خود را در صفحه جدید طی کند. با ادامه این روند به مسیری مستقیم در صفحه می رسیم که از مستطیل های مختلفی می گذرد. هر یک از این مستطیل ها با تعدادی انعکاس از مستطیل اولیه به دست آمده اند. همان گونه که در شکل نیز دیده می شود چهار نوع مستطیل در صفحه قابل تشخیص است. از این مستطیل های در کنار هم چیده شده می توان شبکه ای تشکیل داد و آن را با \mathbb{Z}^2 یکی گرفت به طوری که هر ناحیه به شکل

^{۱۰}Ratner theory



شکل ۳: از یکی کردن اضلاع روبرو در مربعی که توسط $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ مشخص می شود، یک چنبره به دست می آید که خطوط شبکه به ژئودزیک های آن تبدیل می شوند.

$[m, m+1] \times [n, n+1]$ در \mathbb{R}^2 اجتماعی از ۴ صفحه بیلبارد از انواع مختلف باشد. به سادگی می توان مشاهده کرد که $n_P(\ell)$ در این حالت برابر است با تعداد نقاط با مختصات صحیح در گوی یا بیضی به مساحت $\lambda_P \ell^2$ که در آن ثابتی است که به مستطیل انتخاب شده بستگی دارد. با توجه به این نکته، اثبات حدس (۲-۲) در این حالت دشوار نیست.

با یکی کردن اضلاع مقابل یکی از مربع های 1×1 که توسط $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ مشخص می شود، به یک چنبره یک سوراخه می رسمیم که با فضای خارج قسمتی $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ یکریخت است. مسیر توپ در واقع مسیری مستقیم یا به عبارت دیگر یک ژئودزیک روی این چنبره است. به این بیان، آنچه در بالا مشاهده کردیم آن است که تعداد ژئودزیک های بسته (یعنی نگاشتن های \mathbb{R} توسط ایزومتري های موضعی روی چنبره) که غیر معادل هستند و طولی کمتر از ℓ دارند مجانب است با $c\ell^2$.

۳. شمارش مسیرهای تناوبی روی رویه ها

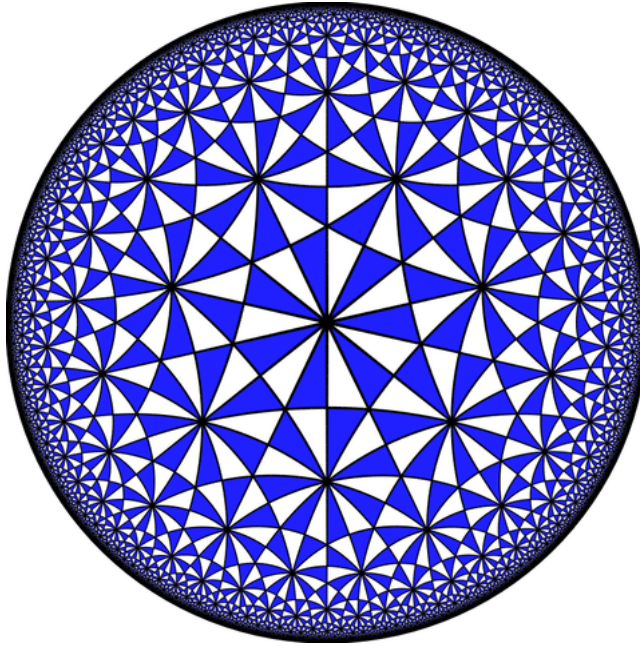
چنبره تک حفره ای که در انتهای بخش قبل با آن مواجه شدیم تنها رویه بسته (فشرده و بدون مرز) جهت دار است که روی آن می توان ساختاری تخت قرار داد. در واقع هر شبکه $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ چنبره \mathbb{R}^2 / Λ را مشخص می کند و ساختار تخت روی \mathbb{R}^2 هم یک ساختار تخت روی چنبره یاد شده می دهد. چنین شبکه هایی در تناظر با نقاط $GL_2(\mathbb{R}) / GL_2(\mathbb{Z})$ هستند.

رویه های بسته دو بعدی جهت پذیر البته متنوع تر هستند و با گونه (یا تعداد حفره های) آنها مشخص می شوند. این گونه معمولاً با g نشان داده می شود. اگر $g > 1$ هیچ ساختار تختی روی رویه نمی توان گذاشت مگر آنکه در تعدادی از نقطه ها تباهدگی مشاهده شود. اگر ساختار تخت دقیقاً در n نقطه تباهدگی باشد و دنباله اعداد صحیح (d_1, \dots, d_n) تباهدگی ساختار تخت را نشان دهد (به تعریف این تباهدگی باز خواهیم گشت) خواهیم داشت:

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2g - 2$$

در واقع ساختار طبیعی روی رویه های با گونه $g > 1$ یک ساختار هذلولوی است: یعنی رویه های با گونه $g > 1$ دارای هندسه ای هستند که موضعاً با هندسه نیم صفحه بالا

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$$



شکل ۴: دیسک پوانکاره و هندسه هذلولوی روی آن.

و متریک $\frac{dx^2+dy^2}{1-x^2-y^2}$ روی آن و یا معادلا دیسک واحد پوانکاره

$$\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

با متریک هذلولوی $\frac{dx^2+dy^2}{1-x^2-y^2}$ روی آن داده می‌شود. در دیسک پوانکاره خطوط مستقیم (ژئودزیک‌ها) قطاع‌های دایره‌هایی هستند که بر دایره واحد عمودند. برخی از این دایره‌ها در شکل ۴ نمایش داده شده‌اند. در هندسه هذلولوی مجموع زوایای یک مثلث کمتر از π است و این تفاوت دقیقاً در تناسب با مساحت مثلث یاد شده است.

متریک یاد شده روی نیم صفحه بالا که به متریک هذلولوی معروف است گروه نسبتاً بزرگی از ایزومتري‌ها دارد. این گروه از ایزومتري‌ها (با فرض جهت‌پذیر بودن) قابل انطباق بر گروه

$$PSL_2(\mathbb{R}) = \frac{SL_2(\mathbb{R})}{\pm \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}} = \frac{\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}}{\pm \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}}$$

است. عمل عضو $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ از این گروه روی نقطه z از $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{C}$ با نگاشتن این نقطه به $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{C}$ تعریف می‌شود. توجه کنید که شرط $1 = ad - bc$ نتیجه می‌دهد $\sigma(z) \in \mathbb{H}$.

به ازای هر رویه S با گونه $g > 1$ می‌توان زیر گروه‌هایی مانند Λ از $PSL_2(\mathbb{R})$ یافت که اولاً عمل Λ روی \mathbb{H} گسسته باشد و ثانیاً حجم $\text{vol}(\mathbb{H}/\Lambda)$ منتهای باشد و ثالثاً یک یکریختی از \mathbb{H}/Λ به S موجود باشد. چنین زیرگروه‌هایی البته بسیار متنوع هستند. توجه کنید که Λ به عنوان یک گروه مجرد، ایزومورف با گروه بنیادی S است. ساختار هذلولوی \mathbb{H} یک ساختار هذلولوی (و از جمله یک متریک) روی $S = \mathbb{H}/\Lambda$ القا می‌کند. برعکس، هر ساختار هذلولوی روی S متناظر است با یک زیر گروه Λ با شرایط بالا. خانواده چنین ساختارهایی خود ساختار هندسی غنی و زیبایی دارد و خمینه‌ای است از بعد $6g - 6$. به این معنا ساختار

طبیعی هندسی روی یک رویه با گونه $g > 1$ ساختاری هذلولوی است و نه ساختاری تخت.

اگر به مسأله بیلارد بازگردیم، مسیرهای روی رویه تخت $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ که به میز بیلارد مستطیل شکل نسبت داده می شود در واقع ژئودزیک های این چنبره هستند و مسیرهای متناوب، ژئودزیک های بسته آن. یادآوری می کنیم که ژئودزیک ها ایزومتري های موضعی از \mathbb{R} به رویه هستند. در مورد تعداد ژئودزیک های بسته با طول کمتر از ℓ روی یک رویه به شکل $S = \mathbb{H}/\Lambda$ از بیش از هفتاد سال پیش ریاضیدانان می دانستند که این تعداد که آن را با $N_\Lambda(\ell)$ نشان می دهیم مجانب است با e^ℓ/ℓ . این قضیه، به علت تشابه آن به قضیه اعداد اول، به قضیه اعداد اول برای ژئودزیک ها معروف است.

اما اگر همین سوال را در مورد ژئودزیک هایی بپرسیم که ساده هستند، یعنی خود را قطع نمی کنند، مسأله بسیار پیچیده می شود. رفتار مجانبی تعداد ژئودزیک های ساده و بسته که طول آنها کمتر از ℓ است، و آن را با $n_\Lambda(\ell)$ نشان می دهیم، با رفتار مجانبی $N_\Lambda(\ell)$ متفاوت خواهد بود. قضیه زیبای زیر یکی از دستاوردهای مهم و عمیق رساله دکتری مریم میرزاخانی است [۱۰].

(۱-۳) قضیه میرزاخانی (۲۰۰۴):
 $n_\Lambda(\ell)$ مجانب است با $c_\Lambda \ell^{6g-6}$ که در آن c_Λ یک ثابت است.

قضیه (۱-۳) در واقع قضیه اعداد اول برای ژئودزیک های ساده بسته روی رویه های هذلولوی است!

هرچند این قضیه به یک ساختار هذلولوی خاص مربوط می شود، و نه همه چنین ساختارهایی، اثبات مریم میرزاخانی از قضیه بالا از طریق مطالعه خانواده چنین ساختارهایی است که به آن فضای تاشمولر^{۱۱} گفته می شود. اتومورفیسم های این فضا که همان گروه رده های نگاشت^{۱۲} برای یک رویه گونه g ، یا Mod_g است روی فضای تاشمولر T_g عمل می کند و خارج قسمت آن فضای پرمایش^{۱۳} رویه های ریمان گونه g است:

$$M_g = T_g / \text{Mod}_g$$

هر نقطه از M_g را به طور معادل می توان کلاس ایزومورفیسم یک ساختار مختلط روی S فرض کرد. یک رویه دو بعدی به همراه یک ساختار مختلط را یک رویه ریمان می گویند. ریمان مشاهده کرده بود که انتخاب یک رویه ریمان به $6g - 6$ پارامتر یا (Modulus) بستگی دارد. لذا M_g بدین معنا فضای پرمایش رویه های ریمان گونه g است.

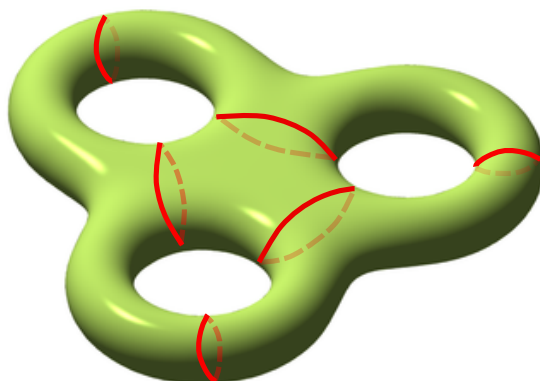
T_g و M_g ساختارهای هندسی جالب و اسرارآمیزی دارند و موضوع مطالعات ریاضی بسیار عمیقی بوده اند. تعداد مدال های فیلدزی که به مطالعه M_g مرتبط هستند نسبتاً زیاد است و کارهای مریم میرزاخانی از جمله مهم ترین آنهاست. در اینجا و به این بهانه به شرح قسمتی از ریاضیات مربوط به M_g و T_g می پردازیم.

اگر رویه S ساختاری هذلولوی به صورت \mathbb{H}/Λ داشته باشد، این ساختار با کلاس ترویج زیرگروه Λ از $PSL_2(\mathbb{R})$ مشخص می شود. اگر γ یک خم ساده بسته روی S باشد که کلاس هموتوبی نابدیهی دارد یک ژئودزیک یکتا در کلاس γ روی S به دست می آید. با این مقدمه اگر مجموعه $3 - 3g$ خم ساده بسته ای که در شکل ۵ نشان داده شده است را روی S در نظر بگیریم، در کلاس هر یک از آنها یک ژئودزیک به دست می آید که طول آنها مجموعه طول های $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{3g-3})$ را می دهد. اگر S را روی $3 - 3g$ ببریم تعداد $2g - 2$ قطعه به دست می آید که هر یک شبیه یک شلوارک است، ساختار هذلولوی دارد و مرز آن از ۳ ژئودزیک ساده بسته تشکیل شده است. قضیه نه چندان دشواری در هندسه هذلولوی می گوید که ساختار هذلولوی هر

^{۱۱}Teichmüller space

^{۱۲}Mapping Class Group

^{۱۳}Moduli space



شکل ۵: یک رویه هذلولوی از گونه g را می توان از روی $3 - 2g$ ژئودزیک ساده بسته برید و به $2g - 2$ شلوارک هذلولوی تجزیه کرد.

شلوارک با طول ۳ مؤلفه مرزی آن به طور یکتا مشخص می شود. به این ترتیب، دنباله $(\ell_1, \dots, \ell_{2g-2})$ ساختار هذلولوی را روی شلوارکها تعیین می کند.

برای بازچسباندن شلوارکها روی خم های $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g-2}$ اما آزادی عملی در حد یک دوران وجود دارد. اگر پارامتر مربوط به دوران γ_i را با θ_i نشان دهیم، هرچند مبدأ مرجحی برای سنجیدن زاویه θ_i وجود ندارد، اما این پارامتر در حد اضافه کردن یک ثابت خوش تعریف است. به این ترتیب دستگاه مختصات

$$(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2g-2}, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2g-2})$$

روی T_g به دست می آید که هر ℓ_i عددی حقیقی و مثبت است و هر θ_i عددی حقیقی. از اینجا معلوم می شود که T_g یک خمینه $6g - 6$ بعدی است که با استفاده از دستگاه مختصات یاد شده می توان آن را با

$$(\mathbb{R}^{>0})^{2g-2} \times \mathbb{R}^{2g-2}$$

یکی گرفت. به این دستگاه مختصات، دستگاه مختصات نیلسن^{۱۴} یا فنشل-نیلسن^{۱۵} گفته می شود.

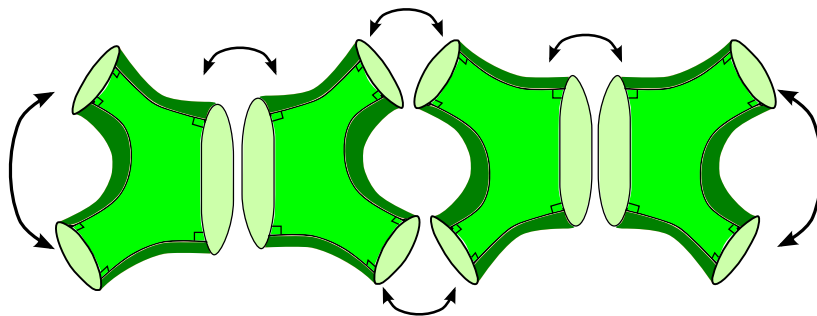
اگر $f : S \rightarrow S$ یک پیکریختی S باشد، ساختار هذلولوی روی برد f را می توان بر روی دامنه آن عقب کشید و ساختار هذلولوی دیگری به دست آورد. اگر f ایزوتوپ باهمانی باشد، تفاوت ساختار هذلولوی جدید با ساختار هذلولوی اولیه در حد عوض کردن دستگاه مختصات در \mathbb{H} است. چنین تفاوت هایی را در T_g نادیده می گیریم. لذا آنچه در ساختار هذلولوی جدید با قبل متفاوت است تنها به کلاس ایزوتوپی f بستگی دارد. مجموعه چنین کلاس های ایزوتوپی گروه رده های نگاشت یک رویه گونه g را تشکیل می دهند که آن را با Mod_g نشان می دهیم. Mod_g یک گروه گسسته است و لذا $M_g = T_g / \text{Mod}_g$ هم خمینه ای است از بعد $6g - 6$ که، همچنان که اشاره کردیم، به آن فضای پرمایش رویه های ریمان از گونه g گفته می شود.

روی T_g می توان ۲- فرم بسته

$$\omega = d\ell_1 \wedge d\theta_1 + d\ell_2 \wedge d\theta_2 + \dots + d\ell_{2g-2} \wedge d\theta_{2g-2}$$

^{۱۴}Nielsen coordinates

^{۱۵}Fenchel-Nielsen coordinates



شکل ۶: از چسباندن $2g - 2$ شلوارک هذلولوی که مولفه های مرزی متناظر در پروسه چسباندن طول برابری دارند یک رویه هذلولوی از گونه g به دست می آید. هنگام چسباندن دو مولفه مرزی آزادی عملی در حد انتخاب زاویه دوران وجود دارد.

را در نظر گرفت که ناتباهیده است. یعنی عبارت زیر

$$\underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega}_{\text{بار } 2g-2}$$

یک عنصر حجم برای T_g است. از آنجا که Mod_g این فرم را حفظ می کند، به فرم همنافته ای طبیعی روی M_g می رسمیم که به نوبه خود عنصر حجم ω^{2g-2} را روی M_g مشخص می کند.

با همین روش می توان ساختارهای هذلولوی روی رویه های با گونه g و n مولفه مرزی ژئودزیک که طول آنها از قبل برابر با L_1, \dots, L_n تعیین شده است را بررسی کرد. حاصل کار فضای تاشمولر $T_g(L_1, \dots, L_n)$ است که ساختار خمینه ای از بعد $6g - 6 + 2n$ دارد و روی آن مختصات نیلسن

$$(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2g-2+n}, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2g-2+n})$$

و دو فرم همنافته (یعنی بسته و ناتباهیده) ω هم داده شده است. به علاوه، فضای پرمایش چنین رویه هایی با تقسیم فضای تاشمولر به عمل گروه رده های نگاشت رویه ای با گونه g و n مولفه مرزی، یعنی $\text{Mod}_{g,n}$ قابل تعریف است:

$$\mathcal{M}_g(L_1, \dots, L_n) = T_g(L_1, \dots, L_n) / \text{Mod}_{g,n}.$$

دو فرم همنافته ω یک دو فرم همنافته که همچنان با ω نمایش داده می شود را روی $\mathcal{M}_g(L_1, \dots, L_n)$ القاء می کند و فرم همنافته اخیر هم به نوبه خود عنصر حجم ω^{2g-2+n} را روی $\mathcal{M}_g(L_1, \dots, L_n)$ تعیین می کند.

به این ترتیب می توان حجم $\mathcal{M}_g(L_1, \dots, L_n)$ را تعریف کرد:

$$\begin{aligned} P_{g,n}(L_1, \dots, L_n) &= \text{vol}(\mathcal{M}_g(L_1, \dots, L_n)) \\ &= \int_{\mathcal{M}_g(L_1, \dots, L_n)} \omega^{2g-2+n}. \end{aligned}$$

به عنوان مثال، یکی از محاسبات میرزاخانی نشان میدهد

$$P_{1,1}(L) = \frac{1}{24} (L^2 + 4\pi^2)$$

تا قبل از رساله دکتری میرزاخانی تنها $P_{g,n}(\circ, \circ, \dots, \circ)$ دانسته شده بود. میرزاخانی روابطی بازگشتی برای محاسبه $P_{g,n}(L_1, \dots, L_n)$ به دست آورد. از جمله نتایج این روابط بازگشتی قضیه جالب توجه زیر است [۸]:

(۲-۳) قضیه میرزاخانی (۲۰۰۴):

$P_{g,n}(L_1, \dots, L_n)$ یک چند جمله‌ای با متغیرهای L_1, \dots, L_n و ضرایب در $Q[\pi]$ است. به عبارت دیگر اعداد گویای $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ وجود دارند به طوری که

$$P_{g,n}(L_1, \dots, L_n) = \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = N-d \\ d \geq 0}} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \pi^d (L_1^{\alpha_1} \dots L_n^{\alpha_n})$$

که در آن $N = 3g - 3 + n$. چند جمله‌ای های $P_{g,n}$ با روشی بازگشتی قابل محاسبه هستند.

قضیه میرزاخانی در مورد رفتار مجانبی $n_{\Lambda}(\ell)$ به طرز شگفت‌آوری به این محاسبه حجم مرتبط است و از آن نتیجه می‌شود. اما این ارتباط، تنها شگفتی پنهان در محاسبه حجم $\mathcal{M}_g(L_1, \dots, L_n)$ نیست. اگر همه طول‌های L_1, \dots, L_n صفر باشند فضای رده بندی رویه های ریمان، یعنی $\mathcal{M}_{g,n} = \mathcal{M}_g(0, \dots, 0)$ به دست می‌آید که موجودی آشنا در هندسه جبری است. در هندسه جبری معمولاً فشرده‌سازی خاص $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ از $\mathcal{M}_{g,n}$ در نظر گرفته می‌شود که شبیه یک وارپته جبری است. هر یک از مولفه های مرزی که اکنون به یک نقطه تبدیل شده است یک کلاس کوهومولوژی روی $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ تعیین میکند که با روشی هندسی ساخته می‌شود. این کلاس های کوهومولوژی را با ψ_1, \dots, ψ_n نشان می‌دهیم.

(۳-۳) حدس ویتن - قضیه کنتسویچ (۱۹۹۲):

انتگرال های

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{\alpha_1} \dots \psi_n^{\alpha_n}$$

برای دنباله های $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ از اعداد صحیح نامنفی که در رابطه $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 3g - 3 + n$ صدق می‌کنند با روشی بازگشتی قابل محاسبه هستند.

حدس ویتن در سال ۱۹۹۲ توسط کنتسویچ به اثبات رسید [۴] و این اثبات از دلایل مهم اعطای مدال فیلدز به کنتسویچ در سال ۱۹۹۸ بود. میرزاخانی نشان داد که این انتگرال ها در واقع تعدادی از ضرایب چندجمله ای های حجم $P_{g,n}(L_1, \dots, L_n)$ هستند که او راه روشنی برای محاسبه بازگشتی آن یافته بود. به این ترتیب، با استفاده از قضیه (۲-۳)، حدس (۳-۳) نتیجه سریع قضیه زیر [۹] از اوست.

(۴-۳) قضیه میرزاخانی (۲۰۰۴):

اگر $N = 3g - 3 + n$ و $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = N - d$ آنگاه داریم

$$c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \pi^d = \frac{1}{2^{N-d} d! (N-d)!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{\alpha_1} \dots \psi_n^{\alpha_n} \omega^d.$$

۴. یک رهیافت برای چند مسأله

با وجود زیبایی ذاتی و سادگی دو مسأله مقدماتی که در بخش دوم به آنها اشاره مختصری کردیم، اهمیت آنها نزد ریاضیدانان شاید دلایل بسیار عمیق‌تری دارد. در این بخش سعی خواهیم کرد این دو مسأله را از منظری دیگر طرح کنیم که برخی از این دلایل پنهان را نیز به ما نشان می‌دهد. به این ترتیب صورت دقیق‌تری از قضایای

میرزاخانی و همکاران او هم به دست خواهیم آورد.

ابتدا به سراغ مساله اول می‌رویم. قبل از مارگولیس ریاضیدانان متوجه شده بودند که اثبات حدس اپنهایم در حالت $n = 3$ حالت کلی آن را نتیجه خواهد داد. لذا در ادامه توجه خود را به فرم‌های مربعی با ۳ متغیر معطوف می‌کنیم.

اگر Q یک فرم مربعی با ۳ متغیر باشد، متناظر با Q می‌توان زیرگروه

$$H_Q = \{g \in SL_3(\mathbb{R}) \mid Q((x, y, z)g) = Q(x, y, z)\}$$

از $SL_3(\mathbb{R})$ را در نظر گرفت. H_Q یک گروه لی نسبتاً بزرگ است و بالاخص زیرگروهی دارد که با $SL_2(\mathbb{R})$ ایزومورف است. یادآوری می‌کنیم که $SL_k(\mathbb{R})$ گروه ماتریس‌های $k \times k$ با درایه در \mathbb{R} است که دترمینان آنها برابر است با ۱.

برای هر عضو $g \in H_Q$ ، تصویر \mathbb{Z}^3 تحت g که آن را با Λ_g نمایش می‌دهیم یک شبکه در \mathbb{R}^3 است، یعنی یک زیرگروه گسسته از \mathbb{R}^3 به طوری که حجم طبیعی فضای خارج قسمتی \mathbb{R}^3/Λ_g متناهی و در واقع برابر با ۱ است. در واقع اگر قرار دهیم

$$X_3 = \{\Lambda \subseteq \mathbb{R}^3 \mid \Lambda : \text{vol}(\mathbb{R}^3/\Lambda) = 1\},$$

H_Q - و در نتیجه $SL_3(\mathbb{R})$ به عنوان زیرگروهی از H_Q - روی X_3 عمل می‌کند. در این حالت، هدف ما این است که نشان دهیم برای فرم‌های Q که مضربی از یک فرم صحیح نیستند، مدار \mathbb{Z}^3 تحت عمل گروه $SL_3(\mathbb{R})$ در X_3 چگال است. به عبارت دیگر، مسأله مورد نظر قابل ترجمه به وضعیتی است که در آن $SL_2(\mathbb{R})$ روی یک فضای متقارن و همگن مانند X عمل می‌کند و بررسی مدار یک نقطه خاص $x \in X$ برای ما اهمیت دارد.

فعالاً صورت مسأله‌ای که مارگولیس با آن مواجه بود را در همین وضعیت رها می‌کنیم و به بیلبارد باز می‌گردیم. در مورد صفحات بیلبارد دلخواه هم می‌توان فرآیندی شبیه آنچه برای مستطیل انجام دادیم را تکرار کرد.

برای این مقصود فرض کنید P یک k ضلعی محدب باشد که زوایای آن در جهت پاد ساعتگرد با دنباله

$$\frac{n_1\pi}{m_1}, \frac{n_2\pi}{m_2}, \dots, \frac{n_k\pi}{m_k}$$

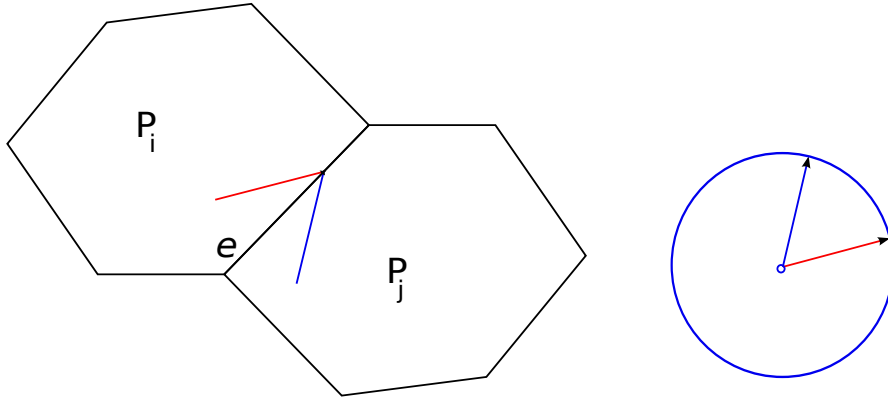
داده می‌شود. فرض کنید M کوچکترین مضرب مشترک اعداد صحیح m_1, \dots, m_k باشد. به این ترتیب می‌توان P را به گونه‌ای در صفحه اقلیدسی قرار داد که جهت اضلاع مختلف آن متناظر با زاویه‌هایی در مجموعه زوایای

$$\left\{ \frac{\pi i}{2M} \mid i = 0, 1, \dots, 2M - 1 \right\}$$

باشند.

زاویه دلخواه $0 < \theta < \frac{\pi}{M}$ را تثبیت کنید و $2M$ نسخه از چندضلعی P را با اعداد $1, \dots, 2M$ شماره گذاری کنید. جهت گذاری روی نسخه‌هایی که اندیس فرد دارند مطابق با جهت استاندارد اقلیدسی روی صفحه و جهت گذاری روی نسخه‌هایی که اندیس زوج دارند مخالف جهت استاندارد اقلیدسی انتخاب می‌شود. انعکاس‌های θ نسبت به جهت‌های مربوط به اضلاع چند ضلعی در مجموعه زوایای

$$\left\{ \theta \pm \frac{i\pi}{M} \mid i = 0, 1, \dots, M - 1 \right\}$$



شکل ۷: خطی که در چندضلعی P_i با زاویه θ_i مشخص می شود را نسبت به ضلع e انعکاس می دهیم تا خطی با زاویه θ_j به دست آید. در این صورت P_i و P_j را روی ضلع e به هم می چسبانیم.

قرار می گیرند. قرار می دهیم

$$\theta_j = \theta - (-1)^j \frac{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor \pi}{M}, \quad j = 1, \dots, 2M.$$

حال به یکی از اضلاع چندضلعی P_i که آن را e می نامیم نگاه می کنیم و خطی با جهت θ_i را نسبت به ضلع یاد شده انعکاس می دهیم. خط جدید در تناظر با یک زاویه θ_j خواهد بود. در این صورت ضلع e در چندضلعی P_i را به ضلع متناظر با e در چندضلعی P_j می چسبانیم. به این ترتیب اضلاع چندضلعی های P_1, \dots, P_{2M} دو به دو به هم می چسبند و رویه ای را به دست می دهند که در مکمل رئوس چندضلعی ها ساختاری تخت و هندسه ای اقلیدسی دارد. در رئوس چندضلعی ها ساختار تخت ممکن است تباهیده باشد. در واقع مجموع زوایا در نقطه هایی که با راس i ام چندضلعی P در تناظر هستند برابر است با $2n_i\pi$. با توجه به این که در مجموع $2M$ نسخه از راس i ام که هر یک زاویه ای برابر با $\frac{n_i\pi}{m_i}$ همراه خود دارند در رویه به هم می چسبند، مشاهده بالا نشان می دهد که پس از اتمام فرآیند چسباندن، دقیقاً $\frac{M}{m_i}$ نسخه از راس i ام روی رویه مشاهده می شود.

رویه ای که به این ترتیب به دست می آید را S_P می نامیم. توجه کنید که چند ضلعی های P_1, \dots, P_{2M} یک سلول بندی از رویه S_P را به دست می دهند که دارای $2M$ سلول دو بعدی، kM ضلع و $M(\frac{1}{m_1} + \dots + \frac{1}{m_k})$ راس است. به این ترتیب اگر گونه رویه S_P را با g_P دهیم با محاسبه شاخص اوپلر برای S_P رابطه زیر را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} 2 - 2g_P &= M \left(2 - k + \sum_{i=1}^k \frac{1}{m_i} \right) \\ &= M \sum_{i=1}^k \frac{1 - n_i}{m_i}. \end{aligned}$$

توجه کنید که برقراری آخرین تساوی نتیجه ای از این واقعیت است که مجموعه زوایا در k ضلعی P برابر است با $(k - 2)\pi$.

تباهدگی ساختار تخت در $\frac{M}{m_i}$ نقطه روی SP که در تناظر با راس i ام چندضلعی P هستند برابر است با $n_i - 1$. بنا بر این متناظر با P یک دنباله (d_1, \dots, d_n) از اعداد صحیح مثبت به دست آید که در آن $n_i - 1$ به شرط مثبت بودن، $\frac{M}{m_i}$ مرتبه تکرار می گردد. به عبارت دیگر SP رویه ای است که در مکمل n نقطه دارای ساختاری تخت است و متناظر با این نقطه ها مجموع زوایا در نقطه i ام برابر است با $2\pi(d_i + 1)$. در این صورت، گونه رویه SP در رابطه

$$g_S = \frac{2 + d_1 + \dots + d_n}{2}$$

صدق می کند.

خانواده تمام چنین رویه های تختی را که تباهدگی ساختار تخت آنها با دنباله (d_1, \dots, d_n) در تناظر است با $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_n)$ نمایش می دهیم. اگر چندضلعی P رویه $SP \in \mathcal{H}(d_1, \dots, d_n)$ را بدهد و $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ عضو دلخواه باشد، ساختار تخت روی چندضلعی P و در نتیجه ساختار تخت روی رویه SP را می توان با استفاده از σ تغییر داد. این کار البته تباهدگی ساختار تخت در نقاط تباهدگی را تغییر نمی دهد. به این ترتیب رویه جدید

$$\sigma(SP) \in \mathcal{H}(d_1, \dots, d_n)$$

به دست می آید. به عبارت دیگر، با این روش یک عمل گروه $SL_2(\mathbb{R})$ روی $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_n)$ به دست می آید.

ساختار تخت SP یک ساختار مختلط طبیعی روی آن به دست می دهد که در واقع از روی ساختار مختلط $P \subseteq \mathbb{C}$ ساخته می شود. این ساختار که در مکمل نقاط تباهدگی تعریف شده است به راحتی به این نقاط هم گسترش می یابد چرا که مجموع زوایا در این نقاط تباهدگی مضرب صحیحی از 2π است. به این ترتیب یک ساختار مختلط طبیعی روی SP ساخته می شود و می توان به SP عنوان عضو X_P از M_g هم فکر کرد که $g = \frac{2+d_1+\dots+d_n}{2}$. به علاوه، اگر z مختصات مختلط روی چندضلعی P باشد، فرم مربعی dz^2 قابل توسعه به یک فرم مربعی تحلیلی روی رویه ریمان X_P است که در نقاط تباهدگی از مرتبه d_i دارای صفری از مرتبه d_i است. به این ترتیب یک فرم مربعی تحلیلی خوش تعریف روی ریمان X_P (به عنوان عضوی از M_g) به دست می آید که آن را با σ_P نمایش می دهیم. اگر قرار دهیم

$$QM_g = \{ (X, \sigma) \mid X \in M_g, \sigma : X \text{ فرم مربعی تحلیلی روی } X \}$$

نگاشتی به صورت زیر را به دست می آوریم

$$\mathcal{H}(d_1, \dots, d_n) \longrightarrow QM_g$$

$$SP \longrightarrow (X_P, \sigma_P)$$

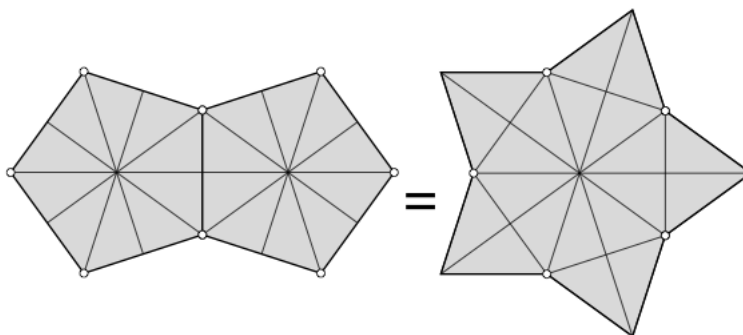
نکته جالب آن است که (X_P, σ_P) ساختار تخت روی SP را به طور یکتا مشخص می کند. لذا $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_n)$ در واقع زیر فضایی از QM_g است (که خود یک فضای تاروی روی M_g و در واقع فضای پادماس تحلیلی آن است).

زیرفضاهای $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_n)$ ، QM_g را افزای می کنند:

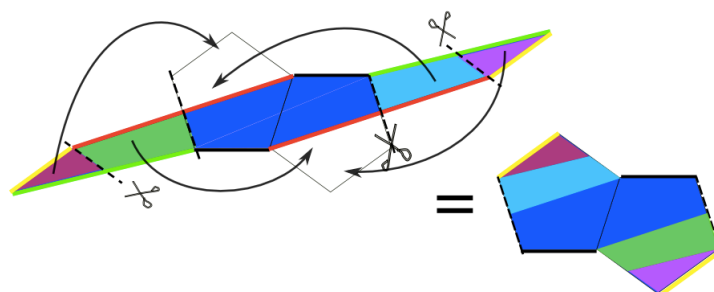
$$QM_g = \coprod_{d_1+\dots+d_n=2g-2} \mathcal{H}(d_1, \dots, d_n)$$

و عمل گروه $SL_2(\mathbb{R})$ روی این زیرفضاها، به عمل این گروه روی کل QM_g توسعه می یابد.

مدت ها پیش از کار میرزاخانی و همکاران او ریاضیدانان می دانستند که شناخت موثر از مدارهای بسته عمل $SL_2(\mathbb{R})$ روی QM_g اطلاعات قابل توجهی در مورد مسأله بیلارد به دست خواهد داد. شباهت مسأله بیلارد



شکل ۸: دو چند ضلعی با اضلاع دو به دو موازی که یک رویه تخت (با متناهی تباهدگی) را مشخص می کنند.

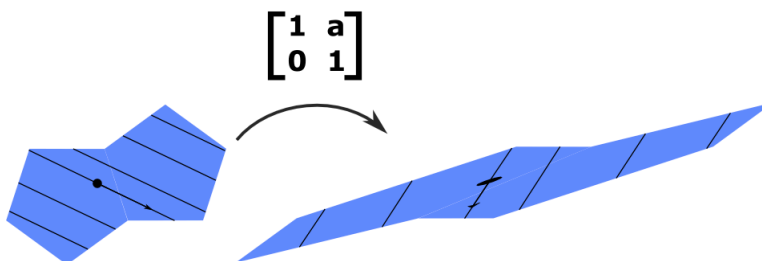


شکل ۹: این دو چند ضلعی در تناظر با رویه تخت واحدی هستند. با بریدن روی خطوط مستقیم و باز چسباندن روی اضلاعی متفاوت می توان از یکی از دو چندضلعی به دیگری رسید.

با حدس اینها می توانیم و برخی دیگر از مسایل جالب در ریاضیات هم دقیقاً در همین نکته ریشه دارد.

اما عمل گروه $SL_2(\mathbb{R})$ روی Q, M, g چه کمکی به فهم مساله بیلارد می تواند بکند؟ هر چند توضیح کامل این نکته از حوصله این نوشتار خارج است، در ادامه سعی می کنیم که شواهدی ارائه کنیم که تا حدودی نقش عمل گروه $SL_2(\mathbb{R})$ را مشخص می کنند.

اگر S رویه ای با ساختار تخت (تباهیده در تعداد متناهی نقطه) باشد، می توان چندضلعی Q در صفحه اقلیدسی را چنان انتخاب کرد که اضلاع آن دو به دو با هم موازی باشند به طوری که پس از چسباندن اضلاع موازی Q به یکدیگر، رویه تختی که (با متناهی تباهدگی) به دست می آید همان S باشد. شکل ۸ دو نمونه از چنین چندضلعی هایی را نشان می دهد که در تناظر با رویه ای با گونای ۲ هستند. انتخاب چندضلعی Q البته یکتا نیست و متناظر با رویه تخت S می توان چندضلعی های متنوعی را در نظر گرفت. بالاخص، دو چندضلعی که در شکل ۸ نشان داده شده اند در تناظر با رویه تخت واحدی هستند. چندضلعی های مختلفی که با یک رویه واحد در تناظر هستند را می توان با بریدن و چسباندن مجدد روی تعدادی خط مستقیم به یکدیگر تبدیل نمود. این فرآیند در شکل ۹ در یک مثال نشان داده شده است.



شکل ۱۰: تحت عمل اعضای $SL_2(\mathbb{R})$ ساختار تخت و در نتیجه طول ژئودزیک ها عوض می شود. در واقع، دو خط که قبلاً بر هم عمود بودند حالا دیگر بر هم عمود نیستند.

اگر σ عضوی از $SL_2(\mathbb{R})$ باشد، تصویر Q تحت σ چندضلعی دیگری است که اضلاع آن همچنان دو به دو با هم موازی هستند. علاوه بر این ساختار تخت روی رویه جدید از ساختار تختی روی \mathbb{R}^2 حاصل می شود که توسط σ تعیین می شود. به عبارت دیگر، تصویر دستگاه مختصات استاندارد \mathbb{R}^2 تحت σ دستگاه مختصات متعامدی روی رویه جدید (که مجهز به ساختاری تخت است) می دهد که در نگاه اول شباهتی به یک دستگاه متعامد ندارد! با چسباندن اضلاع مقابل این چندضلعی جدید و با استفاده از دستگاه تخت جدید روی \mathbb{R}^2 ، رویه تخت $\sigma(S)$ به دست می آید. به عبارت دیگر، تصویری هندسی از عمل $SL_2(\mathbb{R})$ روی QM_g به دست می آید. آنچه به دنبال آن هستیم برقراری رابطه ای است بین ژئودزیک های روی یک رویه تخت (که در متناهی نقطه تباهیده است) با مدار رویه مربوطه تحت عمل گروه $SL_2(\mathbb{R})$. این ارتباط برای یک رویه خاص در شکل ۱۰ به نمایش در آمده است. عمل عضوی به شکل

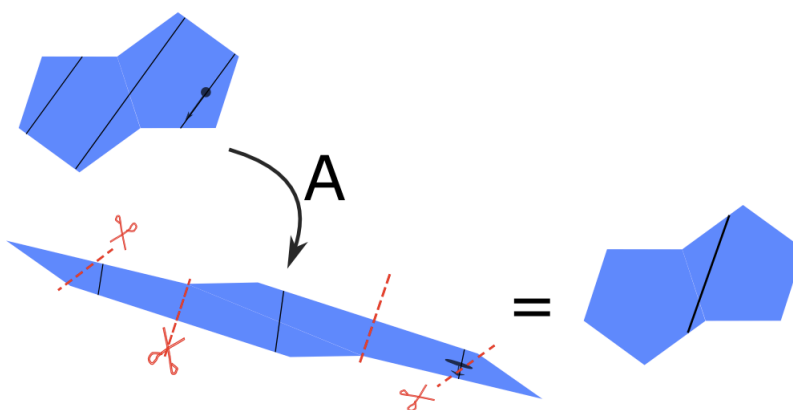
$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

چندضلعی اول را به چندضلعی دوم تبدیل می کند و ژئودزیک بسته ای را که روی رویه متناظر با چندضلعی اول در نظر گرفته بودیم به ژئودزیکی با طول کوتاه تر روی رویه متناظر با چندضلعی دوم می برد.

در این مثال خاص، با تکرار عمل عضو یاد شده روی رویه تخت، ژئودزیکی که کار را با آن آغاز کردیم به ژئودزیکی کوتاه تبدیل می شود. به این ترتیب، عمل $SL_2(\mathbb{R})$ به ما اجازه می دهد به جای مطالعه ژئودزیک های پیچیده روی یک رویه تخت، ژئودزیک های ساده تر را روی رویه تخت دیگری که در مدار رویه اولیه قرار دارد مطالعه کنیم. به این ترتیب، هرچه اطلاعات بیشتری در مورد مدار یک رویه خاص تحت عمل گروه $SL_2(\mathbb{R})$ داشته باشیم، اطلاعات ما در مورد ژئودزیک های پیچیده رویه اولیه بیشتر خواهد شد.

۲.۴. نظریه راتنر و تعمیم آن. در این زیربخش کمی در مورد یکی از چند قضیه راتنر سخن خواهیم گفت. فرض کنید G یک گروه لی همبند، مثلاً $SL_n(\mathbb{R})$ ، باشد و Γ یک شبکه در G ، مثلاً $SL_n(\mathbb{Z})$. X را فضای همگن خارج قسمتی G/Γ یا همان $SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$ فرض کنید. همگن بودن به این معناست که عمل G روی X تراپا است. مثلاً X_2 که در تبیین حدس اپنهایم با آن مواجه شدیم چنین فضایی است. فرض کنید U یک زیرگروه بسته و همبند از G باشد که توسط عناصر تک توان تولید شده است، یعنی عناصری که تفاضل آنها با عضو همانی پوچ توان است. در مثالی که در حدس اپنهایم با آن مواجه هستیم این زیر گروه توسط ضابطه زیر داده می شود:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} & t \\ 0 & \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$



شکل ۱۱: با استفاده از عمل گروه $SL_2(\mathbb{R})$ می توان ژئودزیک ها را کوتاه کرد. بهای این کوتاه کردن طول عوض شدن رویه تخت با رویه دیگری در مدار آن است.

از آنجا که $SL_2(\mathbb{R})$ روی X_2 عمل می کند، یک عمل U روی X_2 به دست می آید.

فرض کنید که μ یک اندازه روی فضای همگن X باشد. توجه کنید که μ را U - ناوروا گوئیم هرگاه به ازای هر مجموعه اندازه پذیر $A \subseteq X$ و هر $u \in U$ ، مجموعه $u^{-1}(A)$ اندازه پذیر باشد و $\mu(u^{-1}(A)) = \mu(A)$. ناوردایی تحت عمل هر گروه دیگری که روی X عمل کند هم به طور مشابه تعریف می شود. در این وضعیت اندازه U - ناوروای μ را ارگودیک گوئیم در صورتی که برای هر زیرمجموعه اندازه پذیر U - ناوروای A در X ، $\mu(A)$ یا صفر باشد و یا یک. راتنر چنین وضعیتی را به خوبی مطالعه کرد و نتیجه آن دسته ای از قضایا شد که در زیر به یکی از آنها اشاره می کنیم [۱۲]، [۱۳].

(۱-۴) قضیه راتنر:

فرض کنید μ یک اندازه U - ناوروا و ارگودیک روی X باشد. در این صورت μ جبری است. یعنی زیر گروه $H < G$ شامل U وجود دارد به طوری که μ اندازه H - ناوردایی است که محمول آن یکی از مدارهای عمل H بر X است.

اندازه H - ناوردایی که قضیه راتنر به آن اشاره می کند اندازه هار^{۱۶} وابسته به H خوانده می شود و در بخش های قابل توجهی از آنالیز، نظریه اندازه و مطالعه گروه های توپولوژیک ظاهر می شود.

این قضیه در واقع اندازه های U - ناوروا روی X را طبقه بندی می کند و علاوه بر ایفای نقش کلیدی در اثبات مارگولیس از حدس اپنهایم، نقش مهمی در برخی دیگر از تحولات ریاضی داشته است. در زیر یکی دیگر از کاربردهای نظریه راتنر را هم به اختصار توضیح می دهیم.

اگر Γ یک شبکه در $SL_2(\mathbb{R})$ باشد که هیچ عنصر مرتبه متناهی ندارد، می توان آن را به عنوان شبکه ای در $PSL_2(\mathbb{R})$ در نظر گرفت. فرض کنید \mathbb{H}/Γ یک رویه ریمان فشرده است که همان طور که قبلاً هم گفته شد متریک هندلولوی روی آن به دست می آید. متناظر با این متریک هندلولوی یک عملگر لاپلاس Δ و یک عنصر

^{۱۶}Haar measure

حجم vol قابل تعریف است:

$$\Delta : C^\infty(\mathbb{H}/\Gamma) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{H}/\Gamma),$$

که در آن

$$C^\infty(\mathbb{H}/\Gamma) = \left\{ f : \mathbb{H}/\Gamma \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R} \right\}.$$

از آنجا که Δ عملگری بیضوی و خودالحاق است، طیف آن از مقادیر ویژه حقیقی و نامنفی تشکیل شده است که می توان آنها را مرتب کرد:

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

متناظر با هر λ_i می توان تابع ویژه ϕ_n را طوری انتخاب کرد که

$$\Delta \phi_n = \lambda_n \phi_n, \quad \int_{\mathbb{H}/\Gamma} \phi_n^2 = 1.$$

از منظر فیزیک، $\phi_n^2 d\text{vol}$ توصیف کننده احتمال کوانتومی حضور ذره در حالتی است که λ_n سطح انرژی باشد. از آنجا که با بالا رفتن انرژی انتظار داریم آثار کوانتومی تأثیر خود را از دست بدهند، به حدس زیر می رسیم:

(۲-۴) حدس یکتا- ارگودیک بودن کوانتومی:

با تعاریف بالا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n^2 d\text{vol} = d\text{vol}.$$

هر چند حدس (۲-۴) همچنان باز است، قضیه راتنر اجازه می دهد که آن را برای شبکه های «همنهستی» که با روش های حسابی ساخته می شوند و توابع ویژه هکه که در این حالت ساخته می شوند، اثبات کنیم. به این حالت از حدس (۲-۴)، حدس یکتا ارگودیک بودن کوانتومی در حالت حسابی گفته می شود.

اگر قضیه راتنر در مورد عمل $SL_2(\mathbb{R})$ روی QM_g هم درست می بود، نتایج مهمی در مورد مسأله بیلیارد به دست می آمد. متأسفانه QM_g بسیار ناهمگن است. با این وجود شباهت هایی هم وجود دارد! چنان که اشاره کردیم QM_g در واقع کلاف پادمماس تحلیلی بر M_g است. لذا در صورت انتخاب کلاف پادمماس تحلیلی T_g به عنوان QT_g داریم:

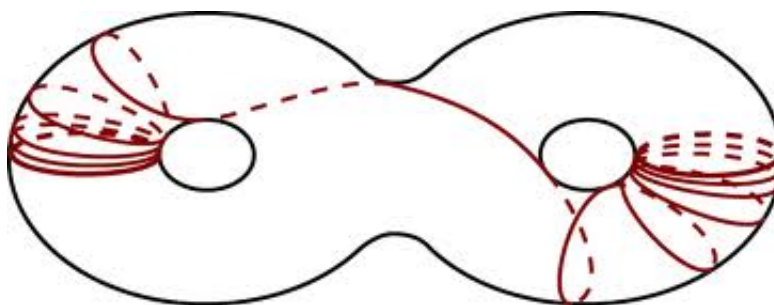
$$QM_g = QT_g / \text{Mod}_g.$$

به عبارت دیگر، اگر بخواهیم از نظریه راتنر الگو بگیریم، QT_g نقش G و Mod_g نقش شبکه Γ را ایفا می کند. قضیه ای که اسکین و میرزاخانی در این وضعیت به مراتب دشوارتر ثابت کردند از این قرار است [۱]:

(۳-۴) قضیه اسکین - میرزاخانی (۲۰۱۲):

تمام اندازه های $SL_2(\mathbb{R})$ - ناوردا و ارگودیک روی QM_g از زیرورایته های خاص $A \subseteq QM_g$ به دست می آیند.

به علاوه، اسکین، میرزاخانی و محمدی قضیه زیر را نشان دادند [۲]:



شکل ۱۲: یک خط کشی روی رویه ای با گونه ۲.

(۴-۴) قضیه اسکین - میرزاخانی - محمدی (۲۰۱۲):
 بستار هر مدار عمل $SL_2(\mathbb{R})$ روی $Q\mathcal{M}_g$ وارسته تحلیلی خاص $A \subseteq Q\mathcal{M}_g$ است.

۵. شار زلزله ترستن

وليام ترستن، برنده جایزه فیلدز در سال ۱۹۸۲ و از چهره‌های بسیار تأثیرگذار توپولوژی بعد پائین، نقش مهمی در فهم عمل گروه Mod_g روی فضای تاشمولر \mathcal{T}_g داشت. اگر ساختار هذلولوی خاصی را روی رویه گونه g مثل S تثبیت کنیم، ژئودزیک‌های وابسته به این متریک روی رویه (که در حضور ساختار هذلولوی آن را با X نشان می‌دهیم) مشخص می‌شوند. اگر یک ژئودزیک ساده، بسته و جهت‌دار λ داشته باشیم، به هر خم γ روی X که اشتراک آن با γ متقاطع^{۱۷} باشد می‌توان عدد تقاطع γ و λ را نسبت داد. ترستن در مطالعات خود نیاز به تعمیم این مشاهده را دریافت. لذا گسترشی از مفهوم یک ژئودزیک بسته را معرفی کرد و آن را «خط‌کشی اندازه‌دار»^{۱۸} نامید. یک خط‌کشی روی X زیرمجموعه بسته‌ای از X است که توسط ژئودزیک‌های ساده و کامل برگ‌بندی شده است (یعنی به صورت اجتماعی از ژئودزیک‌های مجزا است). در شکل ۸ یک خط کشی روی رویه ای با گونای ۲ نمایش داده شده است که ژئودزیکی بسته نیست.

یک اندازه متقاطع روی یک خط‌کشی از X تابعی است که به هر خم γ که اشتراک آن با همه برگ‌های خط کشی متقاطع است، عددی حقیقی نسبت می‌دهد و نسبت به ایزوتوپی‌هایی که از طریق خم‌های متقاطع بر برگ‌بندی صورت می‌گیرند ناوردا است. به یک خط‌کشی λ و اندازه متقاطع μ روی خم‌های متقاطع بر آن، یک خط‌کشی اندازه‌دار روی X گوئیم.

به عنوان مثال، هر ژئودزیک ساده بسته، یک خط‌کشی اندازه‌دار به دست می‌دهد. وقتی ابهامی نباشد خط کشی اندازه‌داری که توسط λ, μ داده می‌شود را تنها با λ نمایش می‌دهیم. فضای (X, λ) هایی که X یک ساختار هذلولوی روی S و λ یک خط‌کشی اندازه‌دار روی X است را با PT_g نمایش می‌دهیم. به این ترتیب PT_g کلاسی روی \mathcal{T}_g است.

^{۱۷}transverse

^{۱۸}measured lamination

همانگونه که طول یک ژئودزیک ساده و بسته λ روی X قابل محاسبه است برای هر خط‌کشی λ روی X هم می‌توان طول $\ell(X, \lambda)$ را تعریف کرد. به این ترتیب تابع

$$\ell : P\mathcal{T}_g \rightarrow \mathbb{R}^+$$

به دست می‌آید. قرار دهید

$$P^1\mathcal{T}_g = \{(X, \lambda) \in P\mathcal{T}_g \mid \ell(X, \lambda) = 1\}.$$

اگر λ توسط یک ژئودزیک ساده و بسته و جهت‌دار داده شده باشد و t عددی حقیقی باشد، می‌توان X را از روی λ برید تا رویه ای با دو مولفه مرزی نزدیک به هم به دست آید. دو لیه ای را که به این ترتیب به دست می‌آیند را می‌توان پس از چرخاندن به اندازه t و در جهتی که توسط جهت رویه تعیین می‌گردد، دوباره به هم چسباند. به این ترتیب نقطه جدید $\text{twist}^t(X, \lambda)$ در $P^1\mathcal{T}_g$ به دست آید. ترستن مشاهده کرد که این عمل طبیعی روی کل $P^1\mathcal{T}_g$ قابل تعریف است. در این فرآیند، شار

$$\text{twist}^t : P^1\mathcal{T}_g \rightarrow P^1\mathcal{T}_g$$

به دست می‌آید.

توجه کنید که Mod_g روی $P^1\mathcal{T}_g$ هم عمل میکند. شار یاد شده نسبت به این عمل همورد است، لذا شار

$$\text{twist}^t : P^1\mathcal{M}_g \rightarrow P^1\mathcal{M}_g$$

$$P^1\mathcal{M}_g = P^1\mathcal{T}_g / \text{Mod}_g$$

به دست می‌آید که به آن شار زلزله ترستن^{۱۹} گفته می‌شود. شار زلزله ترستن، به بیان غیر دقیق، ساختار هذلولوی را با کمک یک خط کشی اندازه دار تغییر می‌دهد. به عبارت دقیق تر، اگر به خط کشی های اندازه دار به چشم بردارهای جهت برای تغییر ساختار هذلولوی روی یک رویه با گوناوی g نگاه کنیم، شار ترستن تغییر پیوسته ای از ساختار هذلولوی را معرفی می‌کند که در راستای این بردار جهت صورت می‌گیرد. سوالی که به طور طبیعی به ذهن می‌رسد آن است که چنین تغییراتی در ساختار هذلولوی تا چه حد تنوع دارند؟ ترستن این شار را در جریان درسی که در سال ۱۹۷۷-۱۹۷۶ در پرینستون ارائه می‌کرد، بررسی کرد و نشان داد برای هر دو نقطه X و Y در فضای تاشمولر، یک خط کشی اندازه دار λ روی X وجود دارد که شار زلزله ترستن در جهت λ در زمان ۱ به نقطه Y می‌رسد. با این وجود، ترستن هیچگاه این نتیجه را به طور رسمی منتشر نکرد. در واقع، این قضیه اولین بار در مقاله کرکهاف^{۲۰} ظاهر شد [۳] که در آن مساله عینیت بخشی نیلسن^{۲۱} توسط کرکهاف حل و فصل گردید. در سال ۲۰۰۸ میرزاخانی ارگودیک بودن این شار را نشان داد [۱۱].

(۱-۵) قضیه میرزاخانی، (۲۰۰۸):

شار زلزله ترستن نسبت به اندازه لبگ ارگودیک است.

مراجع

- [1] A. Eskin, M. Mirzakhani, Invariant and stationary measures for the $SL(2, \mathbb{R})$ action on Moduli space, *Publications mathématiques de IHÉS*, to appear.
- [2] A. Eskin, M. Mirzakhani, A. Mohammadi, Isolation, equidistribution, and orbit closures for the $SL(2, \mathbb{R})$ action on Moduli space *Annals of Mathematics*, to appear.
- [3] Steven P. Kerckhoff, The Nielsen realization problem, *Annals of Mathematics*, 1983.
- [4] M. Kontsevich, Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function, *Communications in Mathematical Physics*, 1992.
- [5] G. A. Margulis, Oppenheim conjecture, *Fields Medallists' Lectures*, 1997, Springer-Verlag.

^{۱۹}Thurston's earthquake flow

^{۲۰}Kerckhoff

^{۲۱}Nielsen's realization problem

- [6] H. Masur, Lower bounds for the number of saddle connections and closed trajectories of a quadratic differential, *Holomorphic functions and moduli*, 1988, Springer-Verlag.
- [7] H. Masur, The growth rate of trajectories of a quadratic differential, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 1990.
- [8] M. Mirzakhani, Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces, *Inventiones Mathematicae*, 2007.
- [9] M. Mirzakhani, Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves, *Journal of the American Mathematical Society*, 2007.
- [10] M. Mirzakhani, Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces, *Annals of Mathematics*, 2008.
- [11] M. Mirzakhani, Ergodic theory of the earthquake flow, *International Mathematics Research Notices*, 2008.
- [12] M. Ratner, Strict measure rigidity for unipotent subgroups of solvable groups, *Inventiones Mathematicae*, 1990.
- [13] M. Ratner, On measure rigidity of unipotent subgroups of semisimple groups, *Acta Mathematicae*, 1990.