به نام آنکه آرام قلب است

به نام آنکه، هستی ام برای او و زندگیم فدای اوست

به نام آنکه بخشنده و مهربان است

مقدمه

با نظر به اینکه مجتمع های سادکی اشیائی ترکیبیاتی هستند که بررسی آنها از دیدگاه جبر جابجایی و هندسه ی جبری، راهکارهایی برای حل مسائل و تفهیم ساختارهای جبری و توپولوژیکی ارائه میکند، بررسی ناورداهای ترکیبیاتی وابسته به آنها(f-بردار و h-بردار) و نیز روابط جالب توجه بین آنها حائز اهمیت است.

طبقه بندی f-بردارها و h-بردارها

سوال:

«آیا f-بردار یک مجتمع سادکی، می تواند f-بردار یک مجتمع سادکی دیگر باشد؟»

فروهمدر:

$$\{f-\text{بردارهای مجتمع‌های متعادل}\} \subseteq \{f-\text{بردارهای مجتمع‌های فلگ}\}$$

حدس کالای:

$$\{f-\text{بردارهای مجتمع‌های متعادل کوهن-مکولی}\} \subseteq \{f-\text{بردارهای مجتمع‌های فلگ کوهن-مکولی}\}$$

طبقه بندی f-بردارها و h-بردارها

قضیه . فرض کنیم $a = (a_1, \ldots, a_s) \in \mathbb{Z}_+^s$ و $g = (g_b)_{0 \leq b \leq a}$ برداری از اعداد صحیح باشد،
آنگاه گزاره‌های زیر هم ارزند:

۱. g ، h-بردار یک مجتمع متعادل کوهن-مکولی است.

۲. g ، h-بردار یک مجتمع متعادل صدف وار است.

۳. g ، f-بردار یک مجتمع چندگانه‌ی رنگ‌آمیزی شده است.

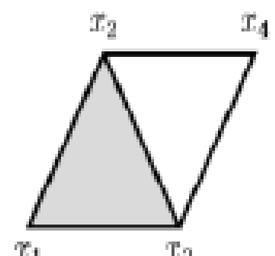
طبقه بندی f-بردارها و h-بردارها

قرارداد: حلقه‌های چندجمله‌ای مورد نیاز عبارت است از:

$S = K[x_1, ..., x_n]$ و $R = K[x_1, ..., x_n, y_1, ..., ys]$ روی میدان K.

ساختار: فرض کنیم Δ یک مجتمع سادکی روی مجموعه‌ی رئوس $\{x_1, ..., x_n\}$ و χ یک s-رنگ آمیزی از Δ با افراز رئوس $V = V_1 \dot\cup ... \dot\cup V_s$ باشد، Δ_χ را یک مجتمع سادکی روی رئوس $\{x_1, ..., x_n, y_1, ..., ys\}$ با وجوه $\sigma \cup \tau$ معرفی می‌کنیم. بطوریکه σ وجهی از Δ و τ زیرمجموعه ای از $\{y_1, ..., ys\}$ با شرط $y_i \in \tau$ هرگاه $\sigma \cap V_i = \varnothing$ است.

مثال. فرض کنیم Δ مجتمع سادکی نمایش داده شده در شکل زیر باشد و χ رنگ‌آمیزی رئوس Δ با افراز رئوس $V = V_1 \dot\cup V_2 \dot\cup V_3$ با $V_1 = \{x_1, x_4\}$ و $V_2 = \{x_2\}$ و $V_3 = \{x_3\}$.



طبقه بندی f-بردارها و h-بردارها

برای $\sigma \in \Delta$:

$$\sigma = \varnothing \longrightarrow \varnothing \cap V_j = \varnothing \quad \forall j = ۱,۲,۳ \longrightarrow y_۱ y_۲ y_۳ \in \Delta_\chi$$

$$\sigma = x_۱ \longrightarrow \sigma \cap V_j = \varnothing \quad \forall j = ۲,۳ \longrightarrow x_۱ y_۲ y_۳ \in \Delta_\chi$$

$$\sigma = x_۲ \longrightarrow \sigma \cap V_j = \varnothing \quad \forall j = ۱,۳ \longrightarrow x_۲ y_۱ y_۳ \in \Delta_\chi$$

$$\sigma = x_۳ \longrightarrow \sigma \cap V_j = \varnothing \quad \forall j = ۱,۲ \longrightarrow x_۳ y_۱ y_۲ \in \Delta_\chi$$

$$\sigma = x_۴ \longrightarrow \sigma \cap V_j = \varnothing \quad \forall j = ۲,۳ \longrightarrow x_۴ y_۲ y_۳ \in \Delta_\chi$$

$$\sigma = x_۱ x_۲ \longrightarrow \sigma \cap V_۳ = \varnothing \quad \longrightarrow x_۱ x_۲ y_۳ \in \Delta_\chi$$

$$\sigma = x_۱ x_۳ \longrightarrow \sigma \cap V_۲ = \varnothing \quad \longrightarrow x_۱ x_۳ y_۲ \in \Delta_\chi$$

$$\sigma = x_۲ x_۳ \longrightarrow \sigma \cap V_۱ = \varnothing \quad \longrightarrow x_۲ x_۳ y_۱ \in \Delta_\chi$$

$$\sigma = x_۳ x_۴ \longrightarrow \sigma \cap V_۲ = \varnothing \quad \longrightarrow x_۳ x_۴ y_۲ \in \Delta_\chi$$

$$\sigma = x_۲ x_۴ \longrightarrow \sigma \cap V_۳ = \varnothing \quad \longrightarrow x_۲ x_۴ y_۳ \in \Delta_\chi$$

$$\sigma = x_۱ x_۲ x_۳ \longrightarrow \sigma \cap V_j \neq \varnothing \quad \forall j = ۱,۲,۳ \longrightarrow x_۱ x_۲ x_۳ \in \Delta_\chi$$

در این وضع Δ_χ توسط فست‌های خود تعیین می‌شود.

$$\Delta_\chi = \langle y_۱ y_۲ y_۳, x_۱ y_۲ y_۳, x_۲ y_۱ y_۳, x_۳ y_۱ y_۲, x_۴ y_۲ y_۳, x_۱ x_۲ y_۳, x_۱ x_۳ y_۲, x_۲ x_۳ y_۱, x_۳ x_۴ y_۲, x_۲ x_۴ y_۳, x_۱ x_۲ x_۳ \rangle$$

طبقه بندی f-بردارها و h-بردارها

قضیه . فست های Δ_χ با ساختار ارائه شده، با وجه های مجتمع Δ در تناظر یک به یک هستند در ضمن Δ_χ مجتمع خالص از بعد $s-1$ و نیز متعادل است.

قضیه . برای هر مجتمع سادکی Δ و هر s-رنگ آمیزی χ از Δ مجتمع سادکی Δ_χ رأس تجزیه پذیر است.

نتیجه . برای هر مجتمع سادکی Δ و هر s-رنگ‌آمیزی χ از Δ مجتمع Δ_χ صدف وار و از اینرو کوهن-مکولی است. بعلاوه هر ترتیب از فست‌های Δ_χ که توسط یک ترتیب از وجه‌های Δ به مبنای افزایش بعد، القا می‌شود یک ترتیب صدفی است .

طبقه بندی f-بردارها و h-بردارها

در واقع

با در نظر داشتن تناظر یک به یک بین فست های Δ_X و وجه‌های Δ، فست‌های Δ_X را به صورت $F_1, \ldots, F_t$ چنان مرتب می‌کنیم که با فرض $F_i = g_i \cup g_i'$ برای هر i و $g_i \in \Delta$، $i < j$ نتیجه دهد $dim g_i \leqslant dim g_j$

تعریف . مجتمع سادکی خالص Δ را افرازپذیر گوییم هرگاه بتوان Δ را به صورت اجتماع مجزایی از بازه‌ها به صورت

$$[G_1, F_1] \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} [G_s, F_s]$$

در نظر گرفت به طوری که $F_1, \ldots, F_s$ تمام فست‌های Δ و

$$[G, F] = \{H \in \Delta | G \subseteq H \subseteq F\}$$

باشند. در این وضع اجتماع مجزای فوق را افراز Δ می‌نامیم.

طبقه بندی f-بردارها و h-بردارها

قضیه . هر مجتمع صدفوار، افرازپذیر است.

قضیه . فرض کنیم Δ یک مجتمع سادکی خالص افرازپذیر با افراز $[G_1, F_1]\dot{\cup}\cdots\dot{\cup}[G_s, F_s]$ از Δ با فست‌های $F_1, \ldots, F_s$ باشد. آنگاه h- بردار Δ عبارتست از :

$$h_i = |\{j \;:\; |G_j| = i\}|$$

قضیه . رابطه شمول زیر برقرار است :

{f-بردارهای مجتمع های سادکی } $\supseteq$ {h- بردارهای مجتمع های متعادل رأس تجزیه پذیر }

طبقه بندی f-بردارها و h-بردارها

قضیه . فرض کنیم $f=(f_0,f_1,\dots,f_d)\in\mathbb{Z}_+^d$ باشد، آنگاه گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

۱) f، f- بردار یک مجتمع سادکی است.

۲) f، h- بردار یک مجتمع متعادل رأس تجزیه‌پذیر است.

۳) f، h- برداریک مجتمع متعادل صدف‌وار است.

۴) f، h- برداریک مجتمع متعادل کوهن ـ مکولی است.

$$\begin{array}{ccccc} ۱ & \Leftrightarrow & ۳ & \Leftrightarrow & ۴ \\ \Downarrow & & \Uparrow & & \\ ۲ & & ۲ & & \end{array}$$

۱) {f-بردارهای مجتمع‌های سادکی} = {h- بردارهای مجتمع‌های متعادل رأس تجزیه پذیر}

۲) {f-بردارهای مجتمع‌های سادکی} = {h- بردارهای مجتمع‌های متعادل کوهن ـ مکولی }

تأیید حدس کوک-نگل از دیدگاه ون تویل و بیرمن

{$h-$ بردارهای مجتمع‌های متعادل کوهن-مکولی} $\subseteq$ {$h-$ بردارهای مجتمع‌های فلگ کوهن-مکولی}

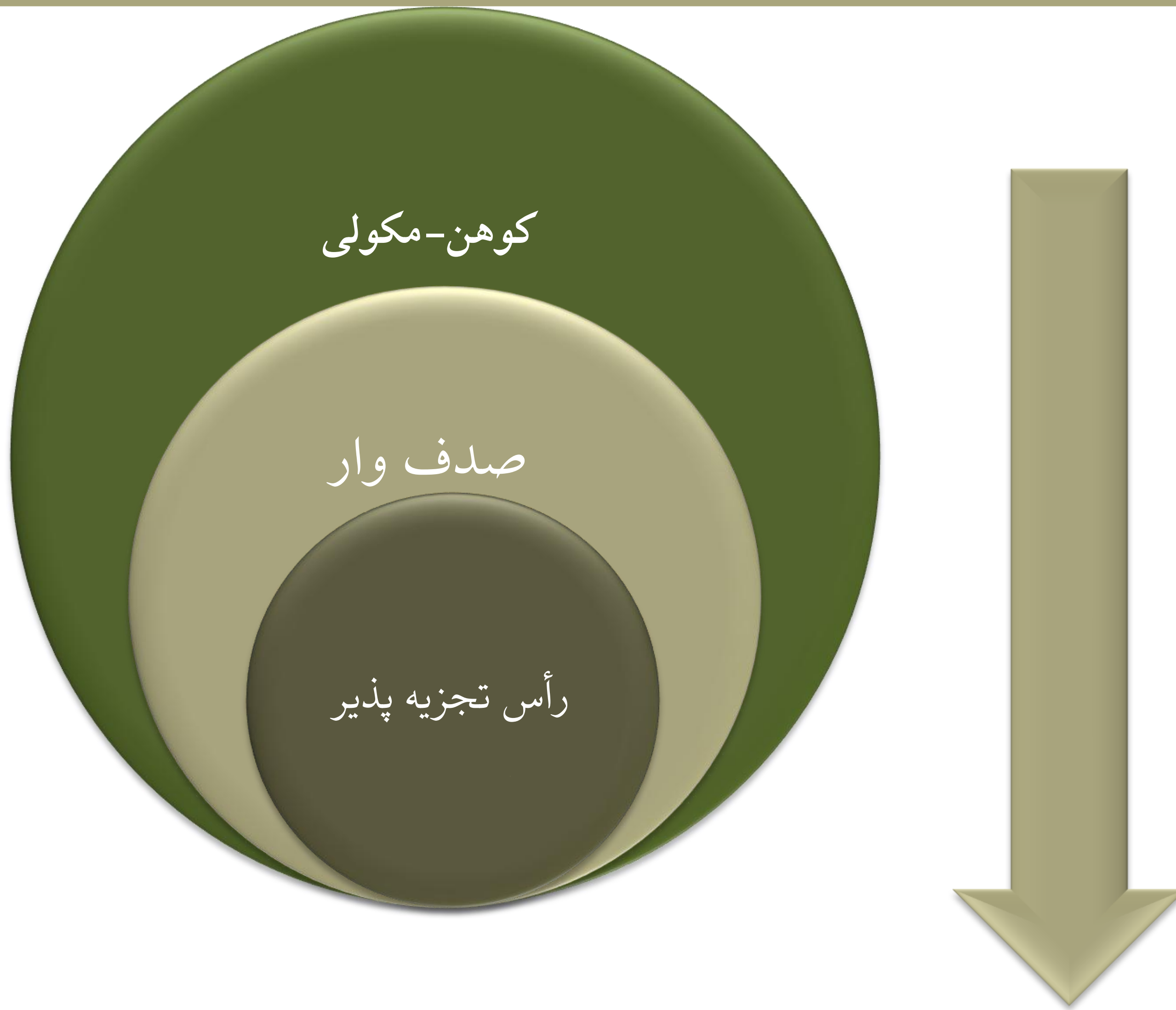
$$\Big\Downarrow 2$$

{$f-$ بردارهای مجتمع‌های سادکی} $\subseteq$ {$h-$ بردارهای مجتمع‌های فلگ کوهن-مکولی}

$$\Big\Downarrow$$

{$f-$ بردارهای مجتمع‌های فلگ} $=$ {$h-$ بردارهای مجتمع‌های فلگ کوهن-مکولی}

تأیید حدس کوک-نگل از دیدگاه ون تویل و بیرمن



{ f-بردار مجتمع‌های فلگ } = { h-بردارهای مجتمع‌های فلگ رأس تجزیه پذیر }

تأیید حدس کوک-نگل از دیدگاه ون تویل و بیرمن

حدس کوک-نگل

حدس: تساوی زیر برقرار است:

$\{f-$ بردارهای مجتمع‌های فلگ$\} = \{h-$ بردارهای مجتمع‌های متعادل رأس تجزیه پذیر فلگ$\}$

یادآوری ساختار: فرض کنیم π یک تجزیه ی رأسی کلیک از گراف ساده و متناهی $G = (V_G, E_G)$ به صورت $V_G = V_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} V_s$ باشد، نماد G^π را گراف ساده و متناهی روی مجموعه رئوس $V_{G^\pi} = V_G \cup \{y_1, \ldots, y_s\}$ و مجموعه یال های $E_{G^\pi} = E_G \cup \{\{x, y_i\} | x \in V_i\}$ معرفی می‌کنیم. به عبارت دیگر در ساخت G^π به ازای هر کلیک V_i از G، یک رأس اضافه نموده و آن رأس را به تمام رئوس V_i وصل می کنیم. در این وضع G^π را کلیک ویسکر شده گراف G نامیم. در ساختار ویسکر کامل، تجزیه کلیک π به صورت $V_G = V_1 \cup \ldots \cup V_{|V_G|}$ است و هر بخش شامل یک رأس است.

$$ind(G^\pi) = (ind\, G)_\pi$$

تأیید حدس کوک-نگل از دیدگاه ون تویل و بیرمن

نتیجه . فرض کنیم G یک گراف و G^{π} کلیک ویسکر شده ی گراف G توسط کلیک π از رئوس G باشد، در اینصورت $ind\, G^{\pi}$ یک مجتمع رأس تجزیه پذیر است.

$$f(ind\, G) = h(ind\, G^{\pi})$$

{f−بردارهای مجتمع‌های فلگ} $\subseteq$ {h− بردارهای مجتمع‌های متعادل رأس تجزیه پذیر فلگ}

تعریف . فرض کنیم $\Delta = < F_1, \ldots, F_t >$ یک مجتمع سادکی روی مجموعه رئوس V باشد، گوییم Δ دارای یک تحدید فست نسبت به F است ، هرگاه F یک فست از Δ باشد و

$$\Delta|_{V \setminus F} = \{F_1 \setminus F, F_2 \setminus F, \ldots, F_t \setminus F\}$$

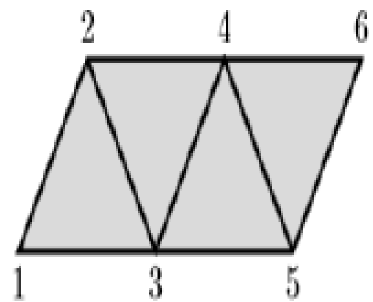
یعنی تمام وجه‌های $\Delta|_{V\setminus F}$ عبارتند از $F_1 \setminus F, F_2 \setminus F, \ldots, F_t \setminus F$ به طوری که $F_1, \ldots, F_t$ همه‌ی فست‌های Δ هستند.

{h−بردارهای مجتمع‌های متعادل رأس تجزیه پذیر فلگ} = {f−بردارهای مجتمع‌های فلگ}

تأیید حدس کوک-نگل از دیدگاه ون تویل و بیرمن

{h-بردارهای مجتمع‌های متعادل رأس تجزیه پذیر فلگ} = {f-بردارهای مجتمع‌های فلگ}

مثال . فرض کنیم $\Delta = <۱۲۳, ۲۳۴, ۳۴۵, ۴۵۶>$ باشد. Δ نسبت به هیچ یک از فست‌های خود تحدید فست ندارد:



با فرض $V_\Delta = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ هر فست Δ را بررسی می‌کنیم:

۱.
$$F = ۱۲۳ \quad \Rightarrow \quad V \backslash F = \{۴, ۵, ۶\}$$
$$\Delta\big|_{V \backslash F} = \{\varnothing, ۴, ۵, ۶, ۴۵, ۴۶, ۵۶, ۴۵۶\}$$

در حالی‌که

$$\{۱۲۳ \backslash F, ۲۳۴ \backslash F, ۳۴۵ \backslash F, ۴۵۶ \backslash F\} = \{\varnothing, ۴, ۴۵, ۴۵۶\}$$

۲.
$$F = ۲۳۴ \quad \Rightarrow \quad V \backslash F = \{۱, ۵, ۶\}$$
$$\Delta\big|_{V \backslash F} = \{\varnothing, ۱, ۵, ۶, ۵۶\}$$

ولی
$$\{۱۲۳ \backslash F, ۲۳۴ \backslash F, ۳۴۵ \backslash F, ۴۵۶ \backslash F\} = \{\varnothing, ۱, ۵, ۵۶\}$$

۳.
$$F = ۳۴۵ \quad \Rightarrow \quad V \backslash F = \{۱, ۲, ۶\}$$
$$\Delta\big|_{V \backslash F} = \{\varnothing, ۱, ۲, ۶, ۱۲\}$$

ولی
$$\{۱۲۳ \backslash F, ۲۳۴ \backslash F, ۳۴۵ \backslash F, ۴۵۶ \backslash F\} = \{\varnothing, ۲, ۶, ۱۲\}$$

۴.
$$F = ۴۵۶ \quad \Rightarrow \quad V \backslash F = \{۱, ۲, ۳\}$$
$$\Delta\big|_{V \backslash F} = \{\varnothing, ۱, ۲, ۳, ۱۲, ۲۳, ۱۳, ۱۲۳\}$$

ولی
$$\{۱۲۳ \backslash F, ۲۳۴ \backslash F, ۳۴۵ \backslash F, ۴۵۶ \backslash F\} = \{\varnothing, ۳, ۲۳, ۱۲۳\}$$

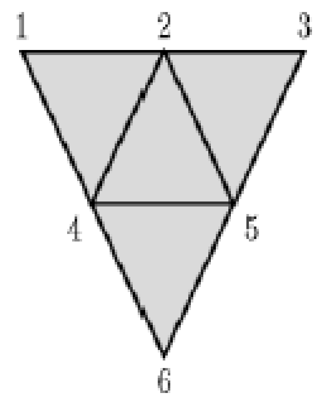
تأیید حدس کوک-نگل از دیدگاه ون تویل و بیرمن

{f-بردارهای مجتمع‌های فلگ} = {h-بردارهای مجتمع‌های متعادل رأس تجزیه پذیر فلگ}

مثال . فرض کنیم $\Delta =< ۱۲۴, ۲۴۵, ۲۳۵, ۴۵۶ >$ باشد آنگاه Δ نسبت به $F = ۲۴۵$ دارای تحدید فست است. زیرا

$$F = ۲۴۵ \quad , \quad V\setminus F = \{۱, ۳, ۶\} \;\Rightarrow\; \Delta\big|_{V\setminus F} = \{\varnothing, ۱, ۳, ۶\}$$

$$\{۱۲۴\setminus F, ۲۴۵\setminus F, ۲۳۵\setminus F, ۴۵۶\setminus F\} = \{\varnothing, ۱, ۳, ۶\}$$



تأیید حدس کوک-نگل از دیدگاه ون تویل و بیرمن

{h-بردارهای مجتمع‌های متعادل رأس تجزیه پذیر فلگ} = {f-بردارهای مجتمع‌های فلگ}

قضیه . فرض کنیم مجتمع سادکی $\Delta =< F_۱,\dots,F_t >$، خالص، متعادل و دارای یک تحدید فست نسبت به F باشد، آنگاه $\Delta = (\Delta|_{V\setminus F})_\chi$ است به طوری که χ رنگ‌آمیزی القا شده از رنگ‌آمیزی Δ باشد، بطور خاص Δ به عنوان مجتمع رنگ‌آمیزی شده از یک مجتمع سادکی $\Delta|_{V\setminus F}$ رأس تجزیه پذیر است و $h(\Delta) = f(\Delta|_{V|F})$.

مثال . فرض کنیم مجتمع سادکی Δ، به صورت $\Delta =< ۱۲۴, ۲۴۵, ۲۳۵, ۴۵۶ >$ باشد که نسبت به $F = ۲۴۵$ دارای تحدید فست است. به منظور محاسبه‌ی h- بردار Δ ، می‌توان از تساوی $h(\Delta) = f(\Delta|_{V\setminus F})$ استفاده نمود زیرا Δ مجتمع خالص ۲ـ بعدی و ۳ـ رنگ‌پذیر یعنی متعادل است و

$$h(\Delta) = f(\Delta|_{V\setminus F}) = f(\Delta|_{\{۱,۳,۶\}}) = f(\{\varnothing, ۱, ۳, ۶\}) = (۱, ۳)$$

تعریف . گراف G را کردال گوییم هرگاه هر دور القا شده از G(هر زیر گراف القا شده از G به صورت یک دور) با طول $n \geq ۴$، دارای وتر باشد.

تأیید حدس کوک-نگل از دیدگاه ون تویل و بیرمن

لم . فرض کنیم $\Delta = ind\, G$ مجتمع مستقل از گراف کردال G باشد و در ضمن مجتمع Δ خالص باشد، آنگاه Δ دارای یک تحدید فست است.

قضیه . تساوی زیر برقرار است:

{f−بردارهای مجتمع‌های مستقل از گراف‌های کردال} = {h−بردارهای مجتمع‌های مستقل متعادل رأس تجزیه پذیر از گراف‌های کردال}

تذکر . اگر مجتمع مستقل $\Delta = ind\, G$ از گراف کردال G خالص باشد، Δ دارای تحدید فست است نسبت به یک فست مانند F و $\Delta = (\Delta|_{V\setminus F})_X$ ، در این وضع Δ به عنوان مجتمع رنگ‌آمیزی شده، متعادل و رأس تجزیه‌پذیر است.

{f− بردارهای مجتمع‌های مستقل از گراف‌های کردال } = {h− بردارهای مجتمع‌های مستقل خالص از گراف‌های کردال}

{h−بردارهای مجتمع‌های متعادل رأس تجزیه پذیر فلگ} = {f−بردارهای مجتمع‌های فلگ}

تأیید حدس کوک-نگل از دیدگاه ون تویل و بیرمن

چرا مجتمع مستقل از گرافهای کردال؟

تعریف . فرض کنیم Δ یک مجتمع سادکی روی مجموعه‌ی رئوس V باشد، رأس $v \in V$ را یک رأس آزاد گوییم هرگاه v دقیقاً در یک فست از Δ مشمول باشد.

قضیه . فرض کنیم G یک گراف کردال و $C_1, \ldots, C_t$ تمام فست‌هایی از مجتمع $Cl(G)$ باشند که شامل یک رأس آزاد هستند، در این صورت شرایط زیر هم‌ارزند:

۱) Gغیر مرکب(نا آمیخته، غیر قابل ترکیب) است یعنی مجموعه‌های مستقل ماکزیمال G هم عدد هستند به عبارت دیگر مجتمع مستقل $ind\,G$ خالص است.

۲)$V = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_t$ یک تجزیه از رئوس G است.

تأیید حدس کوک-نگل از دیدگاه واربارو و کنستانتین

{h−بردارهای مجتمع‌های متعادل رأس تجزیه پذیر فلگ} = {f−بردارهای مجتمع‌های فلگ}

تذکر . مجتمع سادکی $\triangle$ روی مجموعه رئوس $[n]$ فلگ است اگر و تنها اگر

۱. $\triangle = \varnothing$ یا

۲. رأسی مانند v در $\triangle$ چنان موجود باشد که $del_{\triangle}v$ فلگ باشد و نیز $link_{\triangle}(v) = (\triangle)_W$ به ازای زیر مجموعه‌ی $W \subseteq [n]$. (در حالت خاص $link_{\triangle}(v)$ نیز فلگ است.) زیرا فلگ بودن مجتمع $\triangle$ بدین معناست که مینیمال ناوجه‌های $\triangle$، مجموعه‌های دو عضوی هستند و تحدید $\triangle$ به هر زیر مجموعه از رئوس آن نیز دارای این ویژگی و در نتیجه فلگ است.

تعریف . فرض کنیم $\triangle$ یک مجتمع سادکی روی $[n]$ باشد گوییم $\triangle$ شبه فلگ است اگر وتنها اگر $\triangle = \varnothing$ یا یک رأس $v \in V_{\triangle}$ چنان موجود باشد که

۱. $del_{\triangle}(v)$ دارای f−بردار یکسان با یک مجتمع شبه فلگ باشد.

۲. $link_{\triangle}v = \triangle_W$ به ازای یک زیر مجموعه‌ی $W \subseteq [n]$ و $link_{\triangle}v$ نیز دارای f−بردار یکسان با یک مجتمع شبه فلگ باشد. به وضوح این تعریف به تعریف ارائه شده از مجتمع فلگ بسیار نزدیک است و از اینرو مجتمع مذکور را شبه فلگ می‌نامیم.

تأیید حدس کوک-نگل از دیدگاه واربارو و کنستانتین

قضیه . فرض کنیم $\triangle$ یک مجتمع فلگ رأس تجزیه پذیر و متعادل روی مجموعه رئوس $[n]$ باشد در اینصورت یک مجتمع سادکی شبه فلگ مانند Γ وجود دارد به گونه‌ای که $f(\Gamma) = h(\triangle)$ یعنی

{f−بردارهای مجتمع‌های شبه فلگ} = {h−بردارهای مجتمع‌های متعادل رأس تجزیه پذیر فلگ }

تذکر . هر مجتمع فلگ، یک مجتمع شبه فلگ است.

{f−بردارهای مجتمع‌های فلگ } $\subseteq$ {f−بردارهای مجتمع‌های شبه فلگ}

قضیه. تساوی زیر برقرار است:

{f−بردارهای مجتمع‌های فلگ } = {h−بردارهای مجتمع‌های سادکی فلگ متعادل رأس تجزیه پذیر $(d-1)$-بعدی روی $[2d]$ فاقد نقطه‌ی مخروطی}

{f−بردارهای مجتمع‌های فلگ} = {h−بردارهای مجتمع‌های متعادل رأس تجزیه پذیر فلگ}

تأیید حدس کوک-نگل از دیدگاه واربارو و کنستانتین

تعریف . مجموعه‌ای از یال‌ها در گراف G را یک جور نامیم هرگاه هیچ دو یالی در یک رأس مشترک نباشند، اندازه‌ی بزرگترین جور را در گراف G ، عدد جور از G می‌نامیم و با نماد $\upsilon(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف . جور کامل. یک مجموعه از یال‌های G مانند M است بگونه‌ای که هر رأس G دقیقاً در یک یال M موجود باشد یا به عبارتی $V = \cup_{i\geq 0} e_i$.

تعریف . یک پوشش رأسی از گراف G ، گردایه‌ای است از رئوس G که با هر یال G اشتراک دارد و مینیمال پوشش رأسی، مجموعه‌ای با کم‌ترین تعداد رأس است که یک پوشش رأسی در G ایجاد می‌کند و رئوس موجود در آن مستقل هستند.

همواره $\nu(G) \leq \tau(G)$

قضیه . (مینیمال سازی کونیگ)

فرض کنیم G یک گراف دوبخشی باشد، آنگاه $\nu(G) = \tau(G)$.

تأیید حدس کوک-نگل از دیدگاه واربارو و کنستانتین

{h-بردارهای مجتمع‌های متعادل رأس تجزیه پذیر فلگ} = {f-بردارهای مجتمع‌های فلگ}

لم . فرض کنیم G گرافی فاقد رئوس تنها روی مجموعه رئوس $[۲d]$ باشد به گونه‌ای که عدد پوششی G یعنی $\tau(G) = d$ باشد و هر رأس G به یک مجموعه ی مستقل ماکزیمال از کاردینال d تعلق دارد. در این صورت گراف G یک جور کامل می‌پذیرد.

قضیه . فرض کنیم $\Delta = ind\, G$ یک مجتمع سادکی $(d-۱)$-بعدی فلگ روی مجموعه رئوس $[۲d]$ فاقدنقطه ی مخروطی باشد،آنگاه گزاره های زیر هم ارزند:

۱ . G دارای یک جور کامل از یالهای راست است به صورت $\{\{u_۱, v_۱\}, \ldots, \{u_d, v_d\}\}$ به گونه ای که $\{u_۱, \ldots, u_d\}$ مجموعه ای مستقل در G است و اگر $\{u_j, v_j\}$ یالی از G باشد ،آنگاه $i \leq j$ است.

۲ . Δ رأس تجزیه پذیر است.

تأیید حدس کوک-نگل از دیدگاه واربارو و کنستانتین

{h-بردارهای مجتمع‌های متعادل رأس تجزیه پذیر فلگ} = {f-بردارهای مجتمع‌های فلگ}

تذکر . فرض کنیم Δ یک مجتمع سادکی روی مجموعه ی رئوس $[n]$ باشد و با معرفی نماد I_Δ به عنوان ایده آل استنلی-رایزنر Δ و ساخت ایده آل $J_\Delta = I_\Delta + \langle x_1^2,\dots,x_n^2\rangle \subseteq S$ با $S = K[x_1,\dots,x_n]$ حلقه ی $\frac{S}{J_\Delta}$ یک k-جبر آرتینی تک جمله ای است هر گاه

$$h(\frac{S}{J_\Delta}) = f(\Delta)$$

به عبارت دیگر اگر $A = \frac{S}{J}$ یک k-جبر آرتینی تک جمله‌ای به گونه‌ای باشد که برای هر $i = 1,\dots,n$ ، $x_i^2 \in J$ آنگاه $J = I_\Delta + \langle x_1^2,\dots,x_n^2\rangle$ ، به ازای یک مجتمع سادکی Δ روی $[n]$ و در این وضع $f(\Delta) = h(A)$.

{f- بردارهای مجتمع‌های فلگ} = {h- بردار مجتمع‌های فلگ کوهن-مکولی d-بعدی روی $[2d]$، فاقد نقطه‌ی مخروطی }

تأیید حدس کوک-نگل از دیدگاه واربارو و کنستانتین

نتایج و مثالهای بیشتر

لم . فرض کنیم Δ مجتمع متعادل فلگ از بعد $d-1$ و $F_0=\{a_1,\dots,a_d\}$ یک فست از Δ باشد بگونه‌ای که

$$\forall\, v\in V(\Delta)\ \ \exists\, 1\le i\le d\ \ s.t\ \ (F_0\setminus\{a_i\})\cup\{v\}\in\mathcal{F}(\Delta)\qquad(\star)$$

که ویژگی مخروط- وجه متعادل نامیده می‌شود، در این وضع $h(\Delta)=f(del_\Delta(F_0))$ و همواره کوهن-مکولی است.

{h–بردارهای مجتمع‌های متعادل رأس تجزیه پذیر فلگ} = {f–بردارهای مجتمع‌های فلگ}

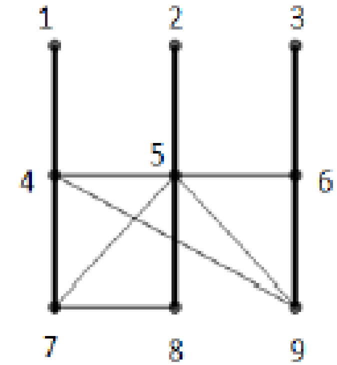
تأیید حدس کوک-نگل از دیدگاه واربارو و کنستانتین

مثال . با در نظر گرفتن فست $F_۰ = \{۱,۲,۳\}$، Δ در ویژگی $(\star)$ مخروط-وجه متعادل صدق می‌کند.

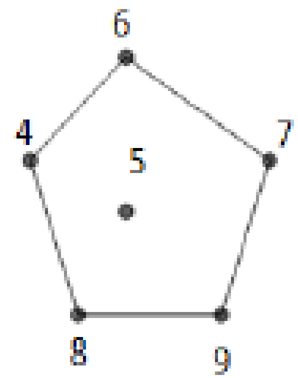
$$(F_۰ \setminus \{۱\}) \cup \{۴\} = \{۴,۲,۳\} \quad , \quad (F_۰ \setminus \{۱\}) \cup \{۷\} = \{۷,۲,۳\}$$

و نیز $\{۱,۸,۳\},\{۱,۵,۳\}$ و $\{۱,۲,۹\},\{۱,۲,۶\}$ فست‌های Δ خواهند بود.

$G:$



$del_\Delta F_0$



$$h(\Delta) = f(del_\Delta F_۰) = (۱,۶,۵).$$

تأیید حدس کوک-نگل از دیدگاه واربارو و کنستانتین

{h−بردارهای مجتمع‌های متعادل رأس تجزیه پذیر فلگ} = {f−بردارهای مجتمع‌های فلگ}

Δ مجتمع فلگ کوهن-مکولی و متعادل از بعد $d-۱$ روی $[۲d]$ با r نقطه‌ی مخروطی، $z_۱, \dots, z_r$

و $[۲d] = \bigcup_{i=۱}^{d} V_i$ افراز رنگی رأسی Δ.

در گراف متناظر Δ برای هر i با $|V_i| > ۲$ ویژگی زیر برقرار باشد:

$$\exists y_{i_۱}, y_{i_۲} \in V_i \ \ s.t \ \ \forall x \in V_i \ \ , \ \ N[y_{i_۱}] \subseteq N[x] \text{ یا } N[y_{i_۲}] \subseteq N[x] \qquad (\star\star)$$

قرار می‌دهیم $\bar{V}_i = V_i \setminus \{y_{i_۱}, y_{i_۲}\}$ و $\bar{V} = \bigcup_{۱}^{d-r} \bar{V}_i$.

لم . فرض کنیم مجتمع سادکی Δ با تمام ویژگی‌های مطرح شده در بالا باشد، مجتمع فلگ $\tilde{\Delta}$ متناظر با ایده‌آل تک جمله‌ای مربع آزاد تولیدشده توسط

$$(Gens(I_\Delta) \setminus \bigcup_{x \in \bar{V}} \{xy_x\}) \bigcup (\bigcup_{x \in \bar{V}} \{xz_j\})$$

متعادل کوهن-مکولی است و نیز $f(\tilde{\Delta}) = f(\Delta)$.

تأیید حدس کوک-نگل از دیدگاه واربارو و کنستانتین

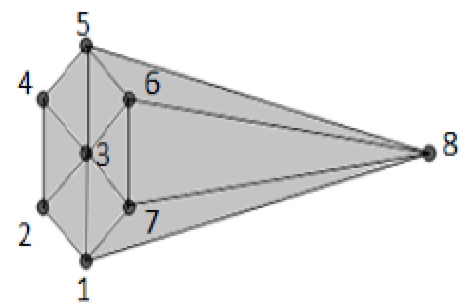
{h−بردارهای مجتمع‌های متعادل رأس تجزیه پذیر فلگ} = {f−بردارهای مجتمع‌های فلگ}

نتیجه . اگر مجتمع سادکی $\triangle$، متعادل کوهن-مکولی و فلگ باشد که در ویژگی صدق می‌کند آنگاه مجتمع فلگ Γ چنان موجود است که $h(\triangle) = f(\Gamma)$.

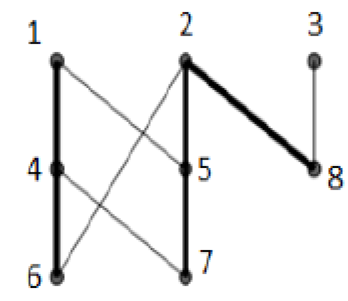
مثال . فرض کنیم $\triangle$ یک مجتمع سادکی ۲-بعدی روی رئوس [۸] باشد که در سمت چپ نشان داده شده، به وضوح $\triangle$ ۳-رنگ‌پذیر است و در نتیجه متعادل با تجزیه رأسی رنگی $V_۱ \cup V_۲ \cup V_۳$ است که به طور یکتایی به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$V_۱ = \{۱, ۴, ۶\} \quad , \quad V_۲ = \{۲, ۵, ۷\} \quad , \quad V_۳ = \{۳, ۸\}$$

در ضمن با در نظر گرفتن تجزیه رأسی ۸,۷,۶,۵,۴ از چپ به راست، $\triangle$ رأس تجزیه پذیر است.



Δ



G_Δ

تأیید حدس کوک-نگل از دیدگاه واربارو و کنستانتین

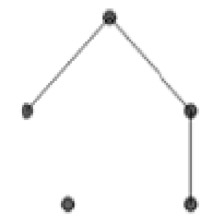
{h–بردارهای مجتمع‌های متعادل رأس تجزیه پذیر فلگ} = {f–بردارهای مجتمع‌های فلگ}

به عنوان نمونه در $V_۱$

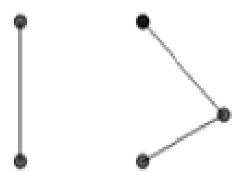
$$N[۱] = V_۱ \cup \{۵\} \quad , \quad N[۴] = V_۱ \cup \{۷\} \quad , \quad N[۶] = V_۱ \cup \{۲\}$$

به عنوان مثال در فست $\{۳,۶,۷\}$ رأس دلخواه ۲ را با هیچ یک از رئوس فست نمی‌توان جایگزین نمود و $\{۳,۶,۲\}$ و $\{۳,۲,۷\}$ و $\{۲,۶,۷\}$ ناوجه‌های Δ هستند.

$h(\Delta) = (۱,۵,۳)$ و مجتمع فلگ Γ چنان موجود است که $h(\Delta) = f(\Gamma)$. Γ عبارتست از:



یا



با تشکر از تشریف فرمائیتان