Teacher: Dr. M.R. Pournaki
A Course on Combinatorial Commutative Algebra, IPM
Mehr 14, 1390
Writer: Saba Aliyari

"به نام او"

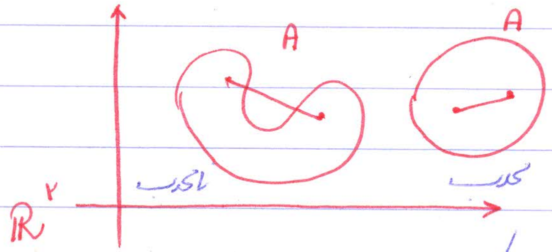
جبرهای جابجایی ترکیباتی:

درس ۱:

مجتمع های ساده‌ای (Simpical complexes):

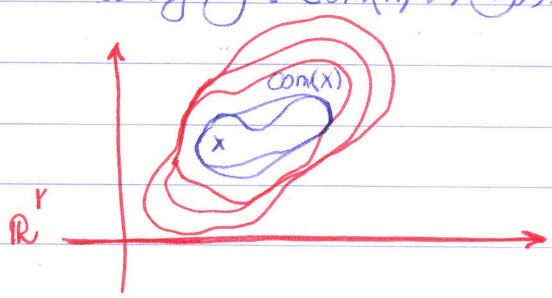
در این درس با $\mathbb{R}^n=\{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i\in\mathbb{R},\ i=1,\dots,n\}$ مجهز به توپولوژی اقلیدسی کار می‌کنیم

تعریف: فرض کنید $A\subseteq\mathbb{R}^n$ در این صورت A را محدب می‌نامیم هرگاه برای هر $x,y\in A$
$\{\lambda x+(1-\lambda)y \mid 0\leq\lambda\leq 1\}\subseteq A$



گزاره: فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های محدب $\mathbb{R}^n$ باشد که $\bigcap_{i\in I}A_i\neq\emptyset$ در این صورت $\bigcap_{i\in I}A_i$ نیز محدب است.

تعریف: فرض کنید $\emptyset\neq X\subseteq\mathbb{R}^n$ در این صورت با توجه به گزاره قبل اشتراک تمام زیرمجموعه‌های محدب $\mathbb{R}^n$ که شامل X هستند، خود محدب است. واضح است که این زیرمجموعه‌ی محدب، کوچکترین زیرمجموعه‌ی محدب $\mathbb{R}^n$ است که X را در بر دارد. به این زیرمجموعه‌ی محدب، پوش محدب X می‌گوییم و آن را با $Conv(X)$ نمایش می‌دهیم



تمرین: فرض کنید $p_1,p_2,\dots,p_k\in\mathbb{R}^n$ در این صورت نشان دهید

$$Conv(\{p_1,p_2,\dots,p_k\})=\left\{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i p_i \mid \lambda_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1\right\}$$

تعریف: فرض کنید $p_0, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ نقاطی از $\mathbb{R}^n$ باشند در این صورت $\{p_0, \dots, p_k\}$ را مستقل هندسی نامیم

هرگاه $\{p_k - p_0, \dots, p_1 - p_0\}$ مستقل خطی باشد.

تعریف: فرض کنید $\{p_0, \dots, p_k\}$ یک مجموعه‌ی مستقل هندسی از $\mathbb{R}^n$ باشد در این صورت

$conv(\{p_0, \dots, p_k\})$

را یک k-سادک (k-simplex) می‌نامیم.

۰-سادک ۱-سادک ۲-سادک ۳-سادک

در واقع یک نقطه مجموعه‌ای ناصادق $\emptyset$ می‌باشد در سه مستقل خطی است

تعریف: برای یک k-سادک، k را بعد آن می‌نامیم / توجه می‌کنیم که توسط هر زیرمجموعه از $\{p_0, \dots, p_k\}$ یک سادک است، که آن را (وجه k-سادک) می‌نامیم. (وجه: face)

سادک با بعد صفر: رأس سادک با بعد یک: یال

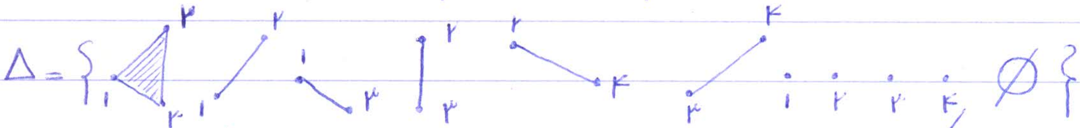
سادک با بعد دو: وجه

تعریف: یک مجتمع سادکی خانواده‌ای متناهی از سادک‌ها می‌باشد مثل Δ که دارای دو ویژگی زیر است.

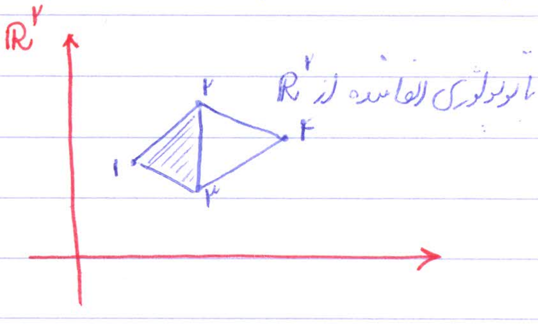
① $\sigma \in \Delta$, $\tau \rightarrow$ یک وجه σ باشد $\Longrightarrow \tau \in \Delta$

② $\sigma, \tau \in \Delta \Longrightarrow$ $\sigma \cap \tau$ هم وجه σ باشد و هم وجه τ

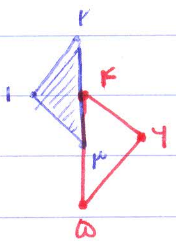
مثال: در $\mathbb{R}^2$



به راحتی دیده می‌شود که Δ یک مجتمع سادکی است.



* توجه :



مجتمع سادکی نمی‌باشد

*

مجرد سازی مثال قبل : $[i] = \{1,2,3,4\}$

$\Delta = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\emptyset\}$

ویژگی Δ :

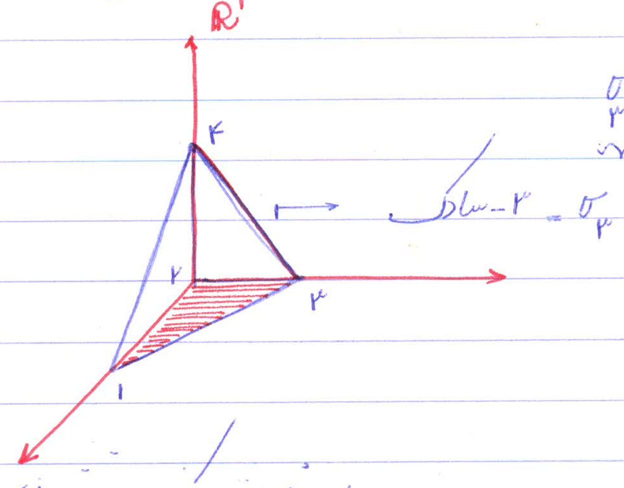
$F\in\Delta,\ G\subseteq F \Rightarrow G\in\Delta$

حقیقی سازی مثال * :

$n =$ تعداد رئوس $- 1 \rightarrow 4-1=3$

این حقیقی سازی هر دو شرط ① و ② تعریف را برآورده می‌کند

$\underbrace{\text{زیرمجتمع سادکی } \sigma_3}_{\Delta} = \{conv(F) \mid F\in\Delta\}$



تمرین : فرض کنید Δ یک مجتمع سادکی (مجرد) باشد $d = \max\{|F|-1 \mid F\in\Delta\}$ ثابت کنید Δ حقیقی سازی دارد که در R^{2d+1} ساخته می‌شود و نیز $2d+1$ کوچکترین بعدی هست که این کار در حالت کلی ممکن است.