Teacher: Dr. M.R. Pournaki
A Course on Combinatorial Commutative Algebra, IPM
Aban 12, 1390
Writer: *Saba Aliyari*

که $B_1 \cup \{b_2\} \in \Delta$ یعنی $B_1 \cup \{b_2\}$ وجهی از Δ است که بزرگتر از B_1 است $B_1 \subsetneq B_1 \cup \{b_2\}$ ✗ $|B_1| = |B_2|$

نتیجه: هر ماتروید Δ، خالص است.

تمرین: فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی ساده باشد و قرار دهید $\Omega = E$ تعریف کنید

$\Delta = \{F \subseteq G \mid$ یالهای F شامل دور نباشند $\}$

نشان دهید Δ یک ماتروید است. (ماتروید گرافی)

بررسی کنید:

زیرگراف القایی از گراف

G همبند: پایه‌ها درخت‌های فراگیر (spanning tree) (درخت فراگیر: همبند + بدون دور + شامل تمام رئوس)

G ناهمبند: پایه‌ها = جنگل‌های فراگیر (Spanning Forest) (جنگل فراگیر: هر مؤلفه همبندی درخت فراگیر)

درس ۲:

بردارهای وابسته به مجتمع‌های سادکی:

یادآوری: Δ مجتمع سادکی، $F \in \Delta$ را وجه می‌نامیم

$\dim F = |F| - 1 \qquad \dim \Delta = \max\{\dim F \mid F \in \Delta\} = d-1$

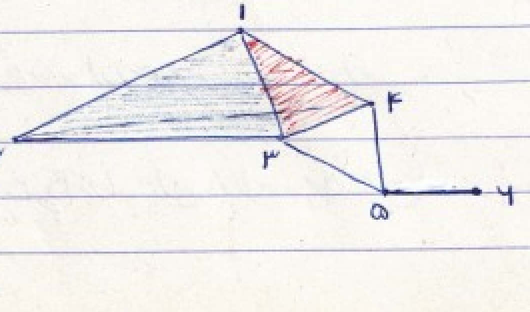
تعریف: فرض کنید Δ یک مجتمع سادکی باشد که بعدش $d-1$ است. در این صورت d تایی مرتب

$f(\Delta) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$

را f بردار وابسته به Δ می‌نامیم که در آن: $f_i = f_i(\Delta) =$ تعداد وجه‌های i بعدی Δ

مثال: مجتمع سادکی زیر را در نظر بگیرید

$\dim \Delta = 2 = \overset{d}{3} - 1$



$f(\Delta) = (6, 9, 4, 1)$

سؤال: - برای یک d داده شده $(f_0, \dots, f_{d-1})$ از اعداد صحیح مثبت، آیا مجتمع سادکی Δ وجود دارد که
$f(\Delta) = (f_0, \dots, f_{d-1})$

برعکس برای f - بردار $f(\Delta) = (f_0, \dots, f_{d-1})$ از یک مجتمع سادکی f_iها چه شرایطی می‌توانند داشته باشند؟

برای بررسی سؤال بالا به مطالب زیر نیاز داریم:

یادآوری: ① $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ در حالتی که $n<m$ قرار می‌دهیم $\binom{n}{m} = 0$.

② $n_1 \geq n_2 \Rightarrow \binom{n_1}{m} \geq \binom{n_2}{m}$

③ $\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m}$

④ (تمرین) $\binom{n}{m} + \binom{n-1}{m-1} + \dots + \binom{n-m}{0} = \binom{n+1}{m}$

لم: فرض کنید f و i اعداد صحیح مثبتی باشند در این صورت f را می‌توان به صورت یکتا به صورت زیر نوشت:

$$f = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-1}}{i-1} + \dots + \binom{n_j}{j}$$

توجه کنید که $n_i > n_{i-1} > \dots > n_j \geq j \geq 1$ این نمایش f به نمایش i-کانی f معروف است.

برهان. قرار دهید $n_i = \max\{m \mid f \geq \binom{m}{i}\}$ اگر $f = \binom{n_i}{i}$ که کار تمام است اگر $f > \binom{n_i}{i}$ قرار دهید

$$n_{i-1} = \max\{m \mid f \geq \binom{n_i}{i} + \binom{m}{i-1}\}$$

در این صورت $n_i > n_{i-1}$ زیرا در غیر این صورت $n_{i-1} \geq n_i$ و لذا

$$f \geq \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-1}}{i-1} \geq \binom{n_i}{i} + \binom{n_i}{i-1} = \binom{n_i+1}{i}$$

پس $f \geq \binom{n_i+1}{i}$ که با ماکسیمال بودن n_i در تناقض است. اگر $f = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-1}}{i-1}$ کار تمام است (توجه کنید که $i-1 \leq n_{i-1} < n_i$ برقرار است) در غیر این صورت با ادامه‌ی این فرایند نمایش زیر برای f بدست می‌آید

$$f = \binom{n_i}{i} + \dots + \binom{n_j}{j} \qquad n_i > n_{i-1} > \dots > n_j \geq j \geq 1$$

منحصر به فرد بودن نمایش: فرض کنید

$$f = \binom{n_i}{i} + \cdots + \binom{n_j}{j}$$

$$f = \binom{m_i}{i} + \cdots + \binom{m_r}{r}$$

اگر $m_i < n_i$

$$f = \binom{m_i}{i} + \binom{m_{i-1}}{i-1} + \cdots + \binom{m_r}{r}$$

$$\le \binom{m_i}{i} + \binom{m_i - 1}{i-1} + \cdots + \binom{m_i - i + r}{r} \le$$

$$+ \binom{m_i - i + (r-1)}{(r-1)} + \cdots + \binom{m_i - i + 1}{1} = \binom{m_i + 1}{i} - 1$$

$$< \binom{m_i + 1}{i}$$

$$\therefore\ f < \binom{m_i + 1}{i} \le \binom{n_i}{i}$$

توجه کنید $m_{i-1} < m_i \Rightarrow m_{i-1} \le m_i - 1$

$m_{i-2} < m_{i-1} \Rightarrow m_{i-2} \le m_{i-1} - 1 \le m_i - 2$

$m_i < n_i \Rightarrow m_i + 1 \le n_i$

و لذا $f < \binom{n_i}{i}$ که تناقض است.

پس می‌توان فرض کرد $n_i = m_i$ لذا $\binom{n_i}{i}, \binom{m_i}{i}$ از طرفین تساوی $f = f$ حذف می‌شوند و با ادامه‌ی فرآیند یکتایی بدست می‌آید.

تعریف: فرض کنید f و i دو عدد صحیح مثبت باشند و $f = \binom{n_i}{i} + \cdots + \binom{n_j}{j}$ i-امین نمایش مکالی f باشد در این صورت $f^{(i)}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f^{(i)} = \binom{n_i}{i+1} + \cdots + \binom{n_j}{j+1}$$

تمرین: ثابت کنید برای اعداد صحیح مثبت i، f و g داریم:

$$f \le g \Rightarrow f^{(i)} \le g^{(i)}$$

مثال: $i = 3$ ، $f = 14$

$$\binom{6}{3} = \frac{4 \times 5 \times 6}{3!} = 20 > 14 \quad \times$$

$$\binom{5}{3} = \frac{4 \times 5}{2} = 10 < 14 \qquad \binom{5}{3} + \binom{4}{2} = 10 + 6 = 16 > 14$$

$14 = \binom{5}{3} + \binom{3}{2} + \binom{1}{1} \rightarrow$ سومین نمایش نکالی ۱۴ $\qquad 14^{(3)} = \binom{5}{4} + \binom{3}{3} + \binom{1}{2} = 5+1+0=6$

قضیه: (Kruskal_katona)

d تایی مرتب $(f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ از اعداد صحیح مثبت، f-بردار یک مجتمع ساده‌ی $(d-1)$ بعدی است $\iff$ برای هر $0 \le i \le d-2$:
$f_{i+1} \le f_i^{(i+1)}$

$\Leftarrow$) قسمت ساده:

$\Rightarrow$) قسمت مشکل:

Kruskal - 1963 ، katona - 1966 ، Daykin - 1974 ، Hilton - 1979 ، Frankle - 1984

این قضیه را ثابت کرده‌اند. اثبات کوتاه از آن Frankle بوده و ما به شرح آن می‌پردازیم

اشاره به صورت اولیه قضیه: فرض کنید A مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های $i+2$ عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی باشد

$A = \{A_1, \dots, A_p\}$

در این صورت اگر $p = \binom{n_{i+2}}{i+2} + \dots + \binom{n_j}{j}$ ، $(i+2)$-امین نمایش نکالی p باشد، آنگاه

$|\Delta A| \ge \binom{n_{i+2}}{i+1} + \dots + \binom{n_j}{j-1}$ ، $\overbrace{\text{سایه‌ی } A}^{\text{مرز}}$: مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های $i+1$ عضوی که از اعضای A ساخته می‌شوند

مثال: نشان دهیم که $(6,9,4,1)$ f-بردار یک مجتمع ساده‌ای است. پس مثلاً باید

$f_1 \le f_0^{(1)}$

$9 \le 6^{(1)} \qquad 6 = \binom{6}{1} \qquad 6^{(1)} = \binom{6}{2} = 15$ پس $9 \le 15$ ✓

$f_2 \overset{?}{\le} f_1^{(2)} \qquad 9 = \binom{4}{2} + \binom{3}{1}$

$4 \overset{?}{\le} 9^{(2)} \qquad 9^{(2)} = \binom{4}{3} + \binom{3}{2} = 7$

$4 \overset{?}{\le} 7$ ✓

بحث در مورد سه‌بعدها (ادامه):

$\binom{[n]}{i}$ = مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های i عضوی از $[n]$

$\therefore \left|\binom{[n]}{i}\right| = \binom{n}{i}$

تعریف: فرض کنید $S=\{a_1,a_2,\dots,a_i\}$ به طوری که $1\le a_1<a_2<\dots<a_i\le n$

$T=\{b_1,b_2,\dots,b_i\}$ به طوری که $1\le b_1<b_2<\dots<b_i\le n$

دو عضو از $\binom{[n]}{i}$ باشند. می‌نویسیم $S \le_L T$ هرگاه $1\le j\le n$ موجود باشد به طوری که

$a_i=b_i$
$a_{i-1}=b_{i-1}$
$\vdots$
$a_j<b_j$

به راحتی دیده می‌شود که $\le_L$ یک رابطه‌ی ترتیب کلی روی $\binom{[n]}{i}$ است که به رابطه‌ی ترتیب عکس قاموسی معروف است.

مثال: $n=5$ ، $i=3$ ؛ زیرمجموعه‌های سه‌تایی $\{1,2,3,4,5\}$ را می‌نویسیم ۱۲۳

$123 \le_L 124 \le_L 134 \le_L 234 \le_L 125 \le_L 135 \le_L 235 \le_L 145 \le_L 245 \le_L 345$

تعداد $\binom{5}{3}=10$

نامگذاری: فرض کنید تمام زیرمجموعه‌های i عضوی $\binom{[n]}{i}$ را مرتب کرده باشیم و j-امین عضو در این مرتب‌سازی را با $\tau^{(n)}(i;j)$ نمایش می‌دهیم.

در مثال قبل $\tau^{(5)}(3;6)=\{1,2,5\}$

مثالی برای ایده‌ی اثبات (ادامه): بردار $(6,8,3)$ را در نظر بگیرید. به عنوان مثال بررسی کنید $f_2 \le f_1^{(2)}$ ، $f_1 \le f_0^{(1)}$

حال مجتمع سادکی Δ را طوری می‌سازیم که $f(\Delta)=(6,8,3)$ ، Δ دارای ۶ رأس است یعنی یک مجتمع سادکی روی

$[6]$ است اعضای $\binom{[6]}{2}$ را مرتب می‌کنیم

$12 <_L 13 <_L 23 <_L 14 <_L 24 <_L 34 <_L 15 <_L 25 <_L 35 <_L 45 <_L 16 <_L 26 <_L 36 <_L 46 <_L 56$

تعداد $15 = \binom{6}{2}$

ابتدا ۸ عضو اول این ترتیب را انتخاب می‌کنیم

$* = \{12, 13, 23, 14, 24, 34, 15, 25\}$

اعضای $\binom{[6]}{3}$ را مرتب می‌کنیم. برای راحتی $< = <_L$

$\overset{**}{\boxed{123 < 124 < 134}} < 234 < 125 < 135 < 235 < 145 < 245 < 345 < 126 < 136 < 236 < 146 <$ و

$246 < 346 < 156 < 256 < 356 < 456$

تعداد $20 = \binom{6}{3}$

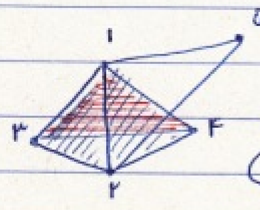
قرار دهید رئوس $\cup (*) \cup (**)$

$\downarrow$

$\Delta = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13, 23, 14, 24, 34, 15, 25, 123, 124, 134\}$

Δ دقیقاً یک مجتمع سادکی است و به وضوح $f(\Delta)=(6,8,3)$

* آیا می‌توانیم حقیقی‌سازی Δ را رسم کنیم؟



$\not\hookrightarrow \mathbb{R}^2$

$\not\hookrightarrow \mathbb{R}^3$

Δ نه در $\mathbb{R}^2$ و نه در $\mathbb{R}^3$ جا می‌نشیند