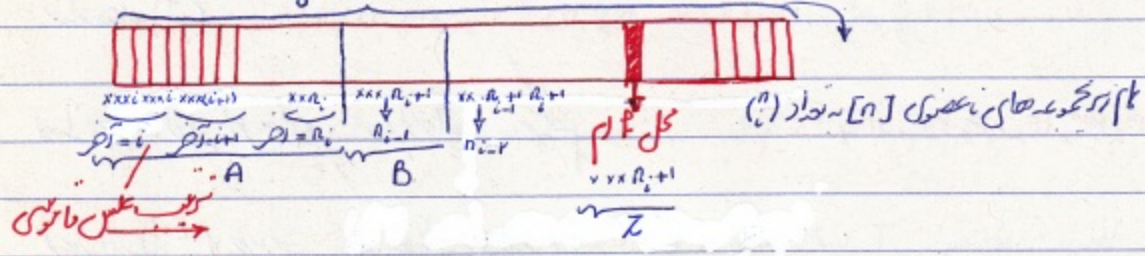


۱. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد و $f = (f_i)_{i=0}^n$ هم چنین فرض کنید، f اس یکسان کالی باشد.

در ادامه می بینیم $f = (f_i)_{i=0}^n = \binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} + \dots + \binom{n}{j}$ در این صورت

$$\tau^{(n)}(f) = \{n-j+1, \dots, n-j, n-j, n-j+1, \dots, n-1, n-1\}$$



$$\# \text{ خانه های زوج در } A = \binom{n}{i} \quad \left[\begin{array}{l} \text{خانه های } A \text{ از زیر مجموعه های } i \text{ عنصری} \\ n_i, \dots, n_i \text{ تسلسل شده اند} \end{array} \right]$$

$$\exists l; l > n_{i+1} \oplus f_j \binom{l}{i} \times$$

$$\exists l; n_{i-1} < l < n_{i+1} \oplus f_j \binom{n_i}{i} + \binom{l}{i-1} \times$$

$$\# \text{ خانه های زوج در } B = \binom{n_{i-1}}{i-1} \quad \left[\begin{array}{l} \text{خانه های } B \text{ از زیر مجموعه های } i \text{ عنصری تسلسل شده اند (احتمالاً } n_{i+1} \text{ است)} \\ \text{است و شامل اعداد } n_{i-1}, \dots, n_{i-1} \text{ است} \end{array} \right]$$

$$\# \text{ خانه های زوج در } Z = \binom{n}{j}$$

حاصل جمع خانه های زوج در A, B, Z برابر f است

$$\therefore \tau^{(n)}(f) = \underbrace{\{n-j+1, n-j+1, \dots, n-j+1, n-j, n-j, \dots, n-j, n-j+1, \dots, n-1, n-1\}}_{\text{است در خانه های } Z}$$

□

$$27 = \binom{7}{4} + \binom{7}{3} + \binom{7}{2}$$

مثال: ۴- اس یکسان کالی ۲۷

$$f^{(n)}(F, 27) = \{1, 4, 4, 1\} \quad \forall n \geq 1 \quad (27 \leq \binom{n}{4})$$

تعریف: $B \subseteq ([n]_{i+1})$ را **تسریه شده** می نامیم هرگاه:

$$T \in B \quad S \sqsubseteq_L T \Rightarrow S \in B$$

تعریف: فرض کنید $B \subseteq ([n]_{i+1})$ دارای صورت زیر $\partial B, B$ ، مجموعه ای نامز که مجموعه های $[n]$ است.

$$\partial B = \{ A \subseteq [n] : |A| = i, A \subseteq B \mid \text{برای } B \in B \}$$

تذکره: فرض کنید $B \subseteq ([n]_{i+1})$ تسریه شده باشد در این صورت ∂B تسریه شده است.

برهان: برای اثبات گزاره کافی است نامز $S, T \in ([n]_{i+1})^*$ را طوری $S \sqsubseteq_L T$ و $S \in \partial B$ و $T \notin \partial B$ را پیدا کنیم.

$$S \in \partial B \quad (T \in \partial B, S \sqsubseteq_L S' \sqsubseteq_L T)$$

$$\rightarrow S = \{a_j, \dots, a_{i-1}, b_{j+1}, b_{j+2}, \dots, b_i\}$$

$$T = \{1, 2, \dots, j-1, a, b_{j+1}, b_{j+2}, \dots, b_i\}$$

$$1 \ll j \ll a \ll b_{j+1} \ll \dots \ll b_i$$

$$T \in \partial B \Rightarrow \exists 1 \ll c \ll n, c \notin T, T \cup \{c\} \in B$$

$$U := \begin{cases} S \cup \{1\} & : 1 \ll a-j \\ S \cup \{c\} & : 1 = a-j, c \notin S \\ S \cup \{a\} & : 1 = a-j, c = a-1 \end{cases}$$

در رابطه می توان دید که

عضوی از $([n]_{i+1})$ است.

$$U \sqsubseteq_L T \cup \{c\} \xrightarrow{\text{تسریه شده } B} U \in B \rightarrow S \in \partial B \quad \square$$

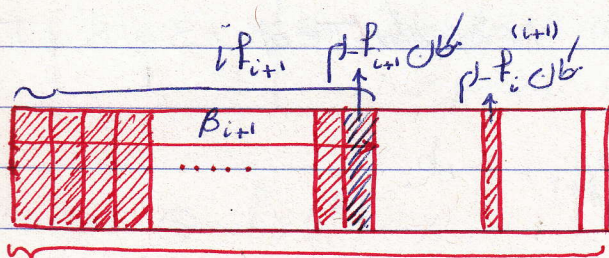
برهان قسمت آسان (Kruskal-Katona) $(\Rightarrow)$

فرضه $P_i = n$ پس کتبخ ساده Δ را می $[n]$ خواهیم ساخت. نام زیر مجموعه های $i+1$ عضو $[n]$ را
 به ترتیب عکس فارسی مرتب می کنیم و P_{i+1} های اول را بر طبق مجموعه ای که B_{i+1} می نامیم $(0 \leq i \leq d-1)$

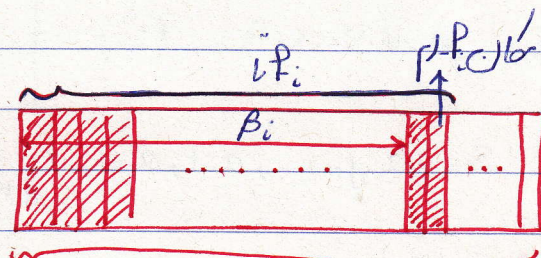
فرضه $\Delta = (P_1) \cup B_1 \cup \dots \cup B_{d-1}$ به زبان کامل در واقع

$$\Delta = \{ \tau^{(n)}(i+1; j) \mid 1 \leq i \leq d-1, 1 \leq j \leq P_{i+1} \}$$

اگر Δ به P_i Δ کتبخ ساده است. آنگاه به P_i $f(\Delta) = (P_i, \dots, P_{d-1})$



نام زیر مجموعه های $(i+1)$ عضو
 تعداد $(i+1)$



نام زیر مجموعه های $(i+1)$ عضو
 تعداد $(i+1)$

$$P_i = \binom{n_{i+1}}{i+1} + \binom{n_i}{i} + \dots + \binom{n_j}{j}$$

$$P_i^{(i+1)} = \binom{n_{i+1}}{i+2} + \binom{n_i}{i+1} + \dots + \binom{n_j}{j+1}$$

$$P_i = \{ n_j - j + 1, n_j - j + 2, \dots, n_j - 1, n_j, n_j + 1, \dots, n_{i+1} + 1 \}$$

$$P_i^{(i+1)} = \{ n_j - j, n_j - j + 1, \dots, n_j - 1, n_j, n_j + 1, \dots, n_{i+1} + 1 \}$$

گزاره قبل استدلال را کامل می کند $\square$