Teacher: Dr. M.R. Pournaki
A Course on Combinatorial Commutative Algebra, IPM
Azar 17, 1390
Writer: *Fatemeh Soheilnia*

درس ۶

حلقه‌های استنلی - رایزنر

(Stanley-Reisner)

نمادگذاری: در تمام مدت $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$

K: میدان داده شده

$$S := K[x_1, \dots, x_n] = \left\{ \sum k_{a_1, \dots, a_n} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \;\middle|\; k_{a_1, \dots, a_n} \in K \right\}$$

که مجهز دارای خصوصیات زیر است:

$+$: همان جمع متداول

$\cdot$: ضرب متداول

$\cdot$: ضرب در اسکالر (اعضای K)

و همچنین (S, +, ۰) حلقه جابجایی یکدار } K-جبر گویند
(S, +, ۰) K-فضای برداری

تعریف: # در حلقه S به $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ که $a_i \in \omega$ $(1 \le i \le n)$

تک تک جمله‌ای می‌گویند

اگر برای هر i، $a_i = 0$ یا ۱، آن‌گاه تک جمله‌ای را خالی از مربع می‌نامند

ایده‌آل I از حلقه S را یک ایده‌آل تک جمله‌ای می‌نامند هرگاه I با تک جمله‌ای

ها تولید شود.

اگر I با تک جمله‌ای های خالی از مربع تولید شود، آن‌گاه I را یک ایده‌آل تک جمله‌ای

خالی از مربع می‌نامند.

قراردادی: برای $F \subseteq [n]$، قرار دهید $x_F = \prod_{i \in F} x_i$ که این صورت

را یک تک جمله‌ای خالی از مربع می‌نامند.

تعریف: فرض کنید Δ یک مجتمع سادکی روی $[n]$ باشد. حلقه $S = K[x_1, \dots, x_n]$

و ایده‌آل I_Δ را از S به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

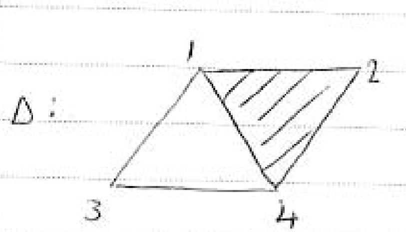
$$I_\Delta = \underbrace{\langle x_F \mid F \not\subseteq \Delta \rangle}_{\text{ایده‌آل تک جمله‌ای خالی از مربع}}$$

$$= \langle x_F \mid F \in \underbrace{\mathcal{N}(\Delta)}_{\downarrow} \rangle$$

مجموعه تمام ناوجه‌های مینیمال

به I_Δ یک ایده‌آل استنلی رایزنر از S گوئیم

مثال (1)



$$S = K[x_1, x_2, x_3, x_4]$$

$$I_\Delta = \langle x_2x_3,\ \cancel{x_1x_2x_3},\ \cancel{x_2x_3x_4},\ x_1x_3x_4,\ \cancel{x_1x_2x_3x_4} \rangle$$

$$= \langle x_2x_3,\ x_1x_3x_4 \rangle$$

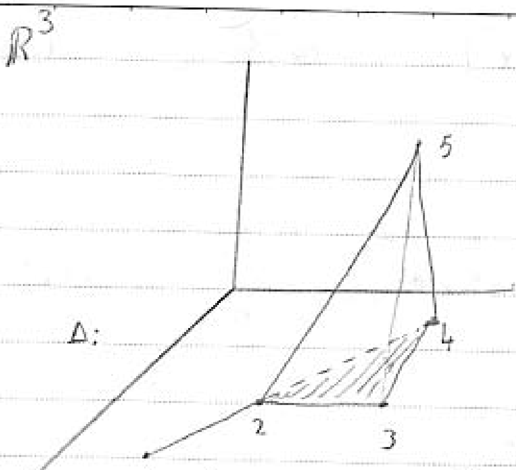
مثال (2) حلقه $S = K[x_1, \dots, x_5]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید

$$I = \langle x_1x_3,\ x_1x_4,\ x_1x_5,\ x_2x_3x_4,\ x_2x_3x_4,\ x_2x_4x_5,\ x_3x_4x_5 \rangle$$

که توجه دقت: ناوجه‌ها هستند

یک ایده‌آل تک جمله‌ای خالی از مربع باشد. آیا می‌توان Δ را پیدا کرد بطوریکه

$$I = I_\Delta \quad ?$$



بنابراین می‌توان به کمک I مجتمع ساده‌ی Δ' را در این مثال رسم کرد.

سوال: آیا بین

. تک‌جمله‌ای‌های خالی از مربع و یک مجتمع ساده‌ی تناظر دوسویی موجود است؟

$$\Delta \overset{?}{\longmapsto} I_\Delta$$

در ادامه به بررسی ساختار ایده‌آل تک‌جمله‌ای می‌پردازیم تا بتوان به سوالات شیرین دراین راستا پرداخت.

نمادگذاری: $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{N}^n$ و

$$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n} =: x^a$$

تک‌جمله‌ای از $S=K[x_1,\dots,x_n]$.

$$S=\Big\{\sum_{a\in T} k_a x^a \;\Big|\; k_a\in K \text{ و } T\subseteq\mathbb{N}^n \text{ متناهی}\Big\}$$

مجموعه تمام تک جمله‌ای ها ، $Mon(S) = \{ x^a \mid a \in \omega^n \}$

$Mon(S) \longleftrightarrow \omega^n$ (حسابی)

$x^a \mapsto a$ مجموعه تمام نقاط شبکه‌ای روی $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ است

توجه : S یک فضای برداری روی میدان K است ، براحتی دیده می‌شود

که $Mon(S)$ یک پایه برای این فضا هستند

استقلال خطی :[1] $\sum_{a \in T} k_a x^a = 0 \longrightarrow k_a = 0 , \forall a \in T$

$T \subseteq \omega^n$

$k_a \in K$

$$f \in S \longrightarrow f = \sum_{\substack{a \in T \\ T \subseteq \omega^n \\ \text{متناهی}}} k_a x^a \in Mon(S).$$

در نتیجه هر عضو S را می‌توان بصورت منحصر بفرد برحسب ترکیب خطی متناهی از اعضای $Mon(S)$ نوشت.

تعریف: فرض کنید $f \in S = K[x_1, \dots, x_n]$ و بنویسید

$$f = \sum_{u \in Mon(S)} a_u u \quad , \quad a_u \in K$$

در این صورت تکیه‌گاه f را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Supp\ f = \{ u \in Mon(S) \mid a_u \neq 0 \}.$$

گزاره: فرض کنید $S = K[x_1, \dots, x_n]$ ، $a, b \in \omega^n$ در این صورت

$$x^a \mid x^b \iff x^b = x^c x^a \quad , \quad c \in \omega^n \text{ برای یک}$$

برهان: $\Leftarrow$ واضح است.

$\Rightarrow$

$$x^a \mid x^b \xrightarrow{\text{تعریف}} x^b = f x^a \quad , \quad f \in S$$

لذا می‌توان در نظر گرفت

$$f = \sum_{\alpha \in T} k_\alpha X^\alpha \quad , \quad k_\alpha \in K$$

$$X^b = \Big(\sum_{\alpha \in T} k_\alpha X^\alpha \Big) x^a = \sum_{\alpha \in T} k_\alpha X^{\alpha + a}$$

$$\alpha = b - a = c$$
$$\alpha + a = b$$

یکتایی نمایش جمع‌ها $\qquad k_\alpha = \begin{cases} 1 & \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$

$Mon(S)$

$$\Rightarrow x^b = x^{\alpha + a} = x^\alpha x^a \text{ یا}$$
$$x^b = x^{c+a} = x^c x^a$$

گزاره 2. فرض کنید I ایده‌آل تک‌جمله‌ای در $S = K[x_1, \dots, x_n]$ باشد

در این صورت $a(1), \dots, a(\ell) \in \omega^n$ موجود است بطوریکه

$$I = \langle x^{a(1)}, \dots, x^{a(\ell)} \rangle$$

علاوه برای $b \in \omega^n$

$$x^b \in I \iff x^{a(i)} \mid x^b \quad \text{برای یک} \quad 1 \leq i \leq \ell$$

اثبات. چون S نوتری است، پس I متناهی مولد است، مثلاً

$$I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$$

که در آن $f_1, \dots, f_r \in S$.

از طرفی I ایده‌آل تک‌جمله‌ای است، یعنی

$$I = \langle x^a \mid a \in T \rangle \qquad T \subseteq \omega^n$$

برای هر $1 \leq i \leq r$، می‌توانیم بنویسیم:

$$f_i = \sum_{\substack{a \in T_i \\ T_i \subseteq T \\ \text{متناهی}}} g^i_a x^a \quad , \quad g^i_a \in S$$

$$\{ x^a \mid a \in T_i \ , \ 1 \leq i \leq r \} := \{ x^{a(1)}, \dots, x^{a(\ell)} \}$$

⊇ واضح است

در این صورت براحتی دیده می شود که $I = \langle x^{a(1)}, \ldots, x^{a(l)} \rangle$.

$\subseteq$ را
لازم و جزء متن درست

ترجمه: اگر I یک ایده آل یک جمله ای نباشد یعنی I ایده آل دلخواه باشد آنگاه

$I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ و f_i را مفرض تعریف شده می توان نوشت پس

$$I \subseteq \langle x^{a(1)}, \ldots, x^{a(l)} \rangle$$

یعنی در این حالت شمول برعکس برقرار نیست.
(پس این یک کاربرد استفاده از یک جمله ای ها است.)

شروع اثبات
⊇ واضح است
$\Rightarrow$

$$x^b \in I \Rightarrow x^b = \sum_{i=1}^{l} h_i \, x^{a(i)} , \quad h_i \in S$$

برای هر $1 \leq i \leq l$ می توان نوشت

$$h_i = \sum_{\alpha \in T} k_\alpha^i \, x^\alpha$$ چرا؟

$T \subseteq \omega^n$ متناهی $\qquad k_\alpha^i \in K$

$$\Rightarrow x^b = \sum_{i=1}^{l} \Big(\sum_{\alpha \in T} k_\alpha^i \, x^\alpha \Big) x^{a(i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{\alpha \in T} k_\alpha^i \, x^{\alpha + a(i)}$$

پس یگانگی نمایش نتیجه می دهد که $\bigwedge_{\alpha \in T}$ $1 \leq i \leq l$ موجود است که

$x^{\alpha(i)} \mid x^{b}$ اگر و تنها اگر $x^{b} = x^{a+\alpha(i)}$

نتیجه: فرض کنید I ایده‌آل تک جمله‌ای در $S = K[x_1, \dots, x_n]$ باشد، در این صورت I مجموعه مولد مینیمال منحصر به فرد دارد که آن را با $G(I)$ نمایش می‌دهند.

برهان: فرض کنید $A = \{x^{\alpha(1)}, \dots, x^{\alpha(l)}\}$ و $B = \{x^{\alpha(1)}, \dots, x^{\alpha(t)}\}$

هر دو مجموعه مولد مینیمال برای I باشند.

$\underbrace{x^{a(i)}}_{\text{دلخواه}} \in A \Longrightarrow x^{a(i)} \in I$

$\xrightarrow{\text{گزاره ۲}} x^{b(j)} \mid x^{a(i)}, \quad x^{b(j)} \in B$

$\xrightarrow{\text{گزاره ۱}} x^{a(i)} = x^{c} x^{b(j)}, \quad c \in \omega^{n}$

از طرفی

$x^{b(j)} \in I \xrightarrow{\text{گزاره ۲}} x^{a(i)} \mid x^{b(j)}, \quad x^{a(l)} \in A$

$\xrightarrow{\text{گزاره ۱}} x^{b(j)} = x^{c'} x^{a(l)}, \quad c' \in \omega^{n}$

$\Longrightarrow x^{a(i)} = x^{c} x^{c'} x^{a(s)},$

$\xrightarrow{\text{مینیمال بودن مولد}} x^{c} x^{c'} = 1, \quad a(i) = a(s)$

$\Longrightarrow x^{c} = x^{c'} = 1$

$$x^{a(i)} = x^{b(j)} \in B$$

در نتیجه $A \subseteq B$ و بنابر تقارن $A = B$.

نتیجه:

$\{$ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای خالی از مربع آزاد$\}$ $\xleftrightarrow{\text{تناظر دوسوی}}$ $\{$مجتمع‌های سادکی روی $[n]\}$

$$\Delta \xmapsto{?} I_\Delta$$

آیا می‌توان از روی ناوردهای مختلف مجتمع سادکی را ساخت؟ اگر چنین برقرار شود شاید بتوان به سوال پاسخ داد.

تکیه

منحصر بفرد بودن

تکرار شود؟

$$I \longmapsto \Delta(I) = \{F \subseteq [n] \mid x_F \notin I\}.$$

نتیجه: فرض کنید $I = \langle x^{a(1)}, \dots, x^{a(l)} \rangle$ یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای در $S = K[x_1, \dots, x_n]$ باشد، در این صورت

$$\{\underbrace{b \in \omega^n}_{\text{مجموعه توان‌ها}} \mid x^b \in I\} = \bigcup_{i=1}^{l} (a(i) + \omega^n)$$

برهان:

$$b \in \bigcup_{i=1}^{l} (a(i) + \omega^n) \iff b \in a(i) + \omega^n, \exists i$$

$$\iff b = a(i) + c, \quad c \in \omega^n$$

$$\iff x^b = x^{a(i)} x^c \iff x^{a(i)} \mid x^b \iff x^b \in I$$

$\Gamma(I) = \bigcup_{i=1}^{l} \left(a(i) + \omega^2 \right)$ # در تصویر قرار دهیم

که زیر مجموعه‌ای از نقاط شبکه‌ای در $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ می‌باشد.

مثال:

$I = \langle x_1^4 x_2^2 , x_1^3 x_2^4 , x_1^2 x_2^5 \rangle \trianglelefteq K[x_1, x_2]$

$a(1) = (4, 2)$

$a(2) = (3, 4) \Rightarrow I = \langle x^{a(1)}, x^{a(2)}, x^{a(3)} \rangle$

$a(3) = (2, 5)$

$\Gamma(I) = \bigcup_{i=1}^{3} \left(a(i) + \omega^2 \right)$

$= \left((4,2) + \omega^2 \right) \cup \left((3,4) + \omega^2 \right) \cup \left((2,5) + \omega^2 \right)$