دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

رساله دکتری

ریاضی محض(جبر جابجایی)

عنوان

همبافت کوزین و کاربردهایی در کوهمولوژی موضعی و حلقه های جابجایی

تدوین

راحله جعفری جزه

استاد راهنما

دکتر محمد تقی دیبایی

خرداد ماه ۱۳۹۰

به نام خدا

سپاسگزاری

سپاسگزار افرادی هستم که بی حضورشان تدوین این مجموعه ممکن نبود.

نخست از همراهی ارزشمند، حمایت مداوم و راهنمایی روشنگرانه دکتر **محمد تقی دیبایی**، به عنوان استاد راهنمای این رساله، بی نهایت سپاسگزارم.

دکتر **حسین ذاکری**، دکتر **مسعود طوسی**، دکتر **سیامک یاسمی** و دکتر **عبدالجواد طاهری زاده**، داوری این رساله را بر عهده داشتند. بدین وسیله از نظرات و پیشنهادات مفیدشان و همچنین از کلاس ها، سمینار ها و بحث های آموزنده ای که در طول سال های تحصیل با ایشان داشتم، تشکر می کنم.

در نهایت ولی بی نهایت، سپاسگزار **مادر و پدرم** هستم که با حمایت های بی دریغ و مهر بی انتهایشان، انگیزه کافی برای رسیدن به این مرحله و زمینه لازم برای به انجام رساندن این مجموعه را فراهم آوردند.

اظهارنامه

فصل های دوم، سوم و چهارم این پایان نامه به مطالب اصیل اختصاص دارد.

چکیده

در این رساله، رده ای از مدول ها که همبافت کوزین آن ها دارای کوهمولوژی های با تولید متناهی هستند، مورد مطالعه قرار می گیرد. ابتدا نشان داده می شود که این رده از مدول ها، زیر رده ای از مدول هایی است که پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارند و با استفاده از این مطلب، محک هایی برای توصیف ردهٔ پیشین ارائه می شود.

در این راستا، مجموعه ایده آل های اول چسبیده به برخی مدول های کوهمولوژی موضعی با استفاده از کوهمولوژی های همبافت کوزین مورد بررسی قرار می گیرد و در ادامه، آخرین مدول کوهمولوژی موضعی، با مجموعه ای مشخص از ایده آل های چسبیده، شناسایی می شود.

روند به کار رفته در مطالعه همبافت کوزین، ما را به توصیف مدول های کوهن-مکالی تعمیم یافته بر حسب پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی هدایت می کند. با استفاده از این نتایج، مکان هندسی کوهن-مکالی مدول ها بررسی می شود. در پایان، دو رده از حلقه ها، که روی آن ها، مکان هندسی کوهن-مکالی هر مدول با تولید متناهی، تحت توپولوژی زاریسکی، زیر مجموعه بازی از طیف حلقه است، معرفی می شوند.

واژه های کلیدی. همبافت کوزین، پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی، مکان هندسی کوهن-مکالی، ایده آل های اول چسبیده به یک مدول، کوهمولوژی موضعی.

رده بندی موضوعی (۲۰۱۰).

13D02, 13D45, 13C14, 13D07.

مقدمه

بسیاری از مفاهیم جبر جابجایی با الهام از موضوعات هندسه جبری پدید آمده اند. یکی از این مفاهیم، همبافت کوزین یک مدول است که به عنوان ابزاری مفید در مطالعه مدول های کوهمولوژی موضعی و نیز بررسی برخی خواص حلقه های جابجایی، مطرح می شود و در واقع معادل جبری همبافت کوزین معرفی شده توسط گروتندیک[۱] و هارتشورن[۲] است [۱۷، Chapter IV]. آن ها از این مفهوم در اثبات قضیه دوگانی برای کوهمولوژی برخی بافه های شبه منسجم استفاده کردند.

در سال ۱۹۶۹، شارپ [۳] معادل جبر جابجایی همبافت کوزین (بخش ۱.۳) را معرفی و با مشخص سازی حلقه های کوهن-مکالی و گرنشتاین بر حسب همبافت کوزین، توانمندی این ایده را در جبر جابجایی نشان داد [۲۹]. این مفهوم در [۳۵] تعمیم داده شد و در [۱۵] توسط گوتو [۴] و واتانابه[۵] در زمینه مدول های $\mathbb{Z}$-مدرج مورد بحث قرار گرفت. در [۲۹]، شارپ نشان می دهد که حلقه نوتری و جابجایی R، کوهن-مکالی است اگر و تنها اگر همبافت کوزین آن، $\mathcal{C}_R(R)$، دقیق باشد، که برای مدول ها نیز توسط وی در [۳۰] تعمیم داده شد، در حالی که R گرنشتاین است اگر وتنها اگر $\mathcal{C}_R(R)$ تحلیل انژکتیو مینیمال R باشد. او همچنین مدول های گرنشتاین را نیز توسط همبافت کوزین معرفی کرد و محک هایی برای آن ها ارائه داد [۳۰]. با توجه به تعریف همبافت کوزین، جملات این همبافت مدول هایی نامتناهی مولد به نظر می رسند، علی رغم این، R کوهن-مکالی است اگر و تنها اگر کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(R)$ صفر باشند. حال می توان پرسید همبافت کوزین کدام دسته از حلقه ها و مدول ها دارای کوهمولوژی های با تولید متناهی هستند و این حلقه ها و مدول ها چه خواصی دارند.

در سال ۲۰۰۱، دیبایی و طوسی، حین مطالعه ساختار همبافت های دوگانی، کلاسی از مدول ها را یافتند که کوهمولوژی های همبافت کوزین آن ها متناهی مولدند. نظریه همبافت های دوگانی نیز خاستگاهی هندسی دارد که نخستین بار گروتندیک و هارتشورن در [۱۷، Chapter V]، آن را معرفی و به عنوان ابزاری

[۱] A. Grothendieck
[۲] R. Hartshorne
[۳] R. Y. Sharp
[۴] S. Goto
[۵] K. Watanabe

مفید در اثبات قضیه دوگانی استفاده کردند. پس از آن شارپ و تعدادی دیگر از ریاضیدانان با مطالعه معادل جبر جابجایی این مفهوم ، بر مفید بودن این ابزار در این حوزه نیز صحه گذاشتند.

در ادامه این بخش، R حلقه ای جابجایی و نوتری و M یک R-مدول با تولید متناهی است.

یک همبافت دوگانی برای حلقه R، یک همبافت کراندار انژکتیو مانند $I^\bullet$ است که تمام مدول های کوهمولوژی آن، $\mathrm{H}^i(I^\bullet)$، با تولید متناهی هستند و برای هر مدول با تولید متناهی M، نگاشت طبیعی

$$M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, I^\bullet), I^\bullet)$$

یک شبه یکریختی است. همبافت دوگانی $I^\bullet$، یک همبافت دوگانی اساسی نامیده می شود اگر

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} I^i \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}\, R} E(R/\mathfrak{p})$$

که در آن $E(R/fp)$ پوش انژکتیو $R/\mathfrak{p}$، به عنوان یک R-مدول است. لذا هر ایده ال اول R دقیقا در یک جمله از $I^\bullet$ و تنها یک بار ظاهر می شود [۳۴، ۱.۱]. می دانیم R همبافت دوگانی دارد اگر و تنها اگر دارای همبافت دوگانی اساسی باشد ([۱۶، ۳.۶] و [۳۴، ۱.۲] را ببینید)، که با تقریب یکریختی همبافت ها و انتقال یکتاست [۳۲، ۴.۵] و [۱۶، ۴.۲].

یافتن و مشخص کردن این همبافت یکتا به عنوان سوالی طبیعی، نتایج جالبی را در پی داشته است. در سال ۱۹۹۸، دیبایی و طوسی نشان دادند که اگر حلقه موضعی R که در شرط $(S_۲)$ صدق می کند، همبافت دوگانی داشته باشد، آنگاه همبافت دوگانی اساسی R، با همبافت کوزین مدول متعارف R نسبت به صافی ارتفاع (که در این حالت با صافی بعد معادل است) یکریخت است [۸، ۲.۴]. به عنوان کاربردی از این نتیجه، آن ها ثابت کردند که اگر حلقه موضعی R در شرط $(S_۲)$ صدق کند و دارای مدول متعارف K باشد، آنگاه متناهی مولد بودن کوهمولوژی های همبافت کوزین K، نسبت به صافی های مشخصی، شرط لازم و کافی برای این است که R همبافت دوگانی داشته باشد [۸، ۳.۴]. در سال ۲۰۰۱، آن ها خواص ساختاری همبافت دوگانی مطرح شده در [۸]، را تعمیم داده و نشان دادند کوهمولوژی های همبافت کوزین M، روی حلقه موضعی R، با تولید متناهی هستند اگر R همبافت دوگانی داشته باشد، M یکسان بعد باشد و در شرط $(S_۲)$ صدق کند[۹]. در ادامه [۸] و [۹] ، دیبایی و طوسی در سال ۲۰۰۵ برخی خواص همبافت های کوزین را به واسطه همبافت های دوگانی مطالعه و نتایج زیر را ثابت کردند.

قضیه ۱. [۴، ۲.۱ Theorem] فرض کنیم تمام تار های رسمی R کوهن-مکالی هستند و M در شرط

(S_2) صدق می کند. اگر $\widehat{M}$ یکسان بعد باشد، آنگاه کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهی هستند.

این ایده ها توسط لیپ من[۶]، ناياک [۷]و سستری [۸] نیز در [۲۱] دنبال شده است. کاوازاکی [۹] با انگیزه گرفتن از [۸] و [۹]، همبافت کوزین یک مدول روی حلقه نوتری را مطالعه کرد و نتایج زیر را به دست آورد.

قضیه ۲. [Theorem ۱.۱ ،۲۰] فرض کنیم M یکسان بعد و

(الف) R زنجیره وار جهانی است ،

(ب) تمام تارهای رسمی موضعی سازی های R کوهن-مکالی هستند،

(ج) مکان هندسی کوهن-مکالی هر R-جبر با تولید متناهی باز است،

آنگاه مدول های کوهمولوژی همبافت کوزین M با تولید متناهی و تنها تعداد متناهی از آن ها ناصفرند.

مفروضات قضیه فوق از لحاظی لازم هم هستند.

قضیه ۳. [Theorem ۱.۴ ،۲۰] فرض کنیم R حلقه ای زنجیره وار باشد. آنگاه عبارت های زیر معادلند.

- حلقه R در شرایط (الف)، (ب) و (ج) از قضیه ۲ صدق می کند.
- برای هر R-مدول با تولید متناهی و یکسان بعد M، مدول های کوهمولوژی همبافت کوزین M با تولید متناهی هستند و تنها تعداد متناهی از آن ها ناصفرند.

قضیه ۴. [Theorem ۵.۵ ،۲۰] فرض کنیم R حلقه ای موضعی و زنجیره وار و M یک R-مدول با تولید متناهی و یکسان بعد باشند. اگر تارهای رسمی R کوهن-مکالی باشند، آنگاه مدول های کوهمولوژی $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهی هستند.

می دانیم اگر حلقه موضعی R زنجیره وار و جهانی باشد، آنگاه برای هر R-مدول با تولید متناهی یکسان بعد، $\widehat{M}$ نیز یکسان بعد است. در اثبات قضیه فوق، فرض زنجیره وار و جهانی بودن R، تنها برای اثبات یکسان بعد بودن $\widehat{M}$ به کار رفته است. لذا این قضیه را می توان تعمیمی از قضیه ۱ دانست.

پس از یادآوری برخی نتایج شناخته شده و مفاهیم ابتدایی مورد نیاز در فصل اول، مطالعه همبافت های کوزین را با توضیح برخی خواص اساسی کوهمولوژی های همبافت کوزین و تکنیک هایی مفید در این

---
[۶] J. Lipman
[۷] S. Nayak
[۸] P. Sastry
[۹] T. Kawasaki

زمینه در بخش اول از فصل دوم، آغاز می کنیم. به عنوان نتایجی از این بحث، در نتیجه ۶.۱.۲ ، نشان می دهیم شرط (S_2) در قضیه ۱ زاید است و در گزاره ۲.۳.۲ برهان دیگری برای قضیه ۴ ارائه می دهیم.

در تمام نتایج فوق در مورد متناهی بودن همبافت کوزین R-مدول M، شرایط تعیین کننده مشترکی برای R و M وجود دارند:

(الف) M یکسان بعد است،

(ب) R زنجیره وار جهانی است،

(ج) تارهای رسمی R کوهن-مکالی هستند.

زمانی که R موضعی است، این شرایط بر اساس قضیه ۴، برای با تولید متناهی بودن کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ کافی و بر اساس قضیه ۳ شرایط (ب) و (ج) برای با تولید متناهی بودن کوهمولوژی های همبافت های کوزین تمام R-مدول های یکسان بعد، لازم نیز هستند. حال سوال طبیعی این است که اگر کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهی باشند، کدام یک از شرایط بالا برقرارند.

در سال ۲۰۰۶، ژو[۱۰] خواص حلقه های نوتری دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی را مطالعه کرد و نشان داد چنین حلقه هایی زنجیره وار جهانی و به طور موضعی یکسان بعدند [۳۷].

عضو $x \in R \setminus \cup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}_M} \mathfrak{p}$، پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی M نامیده می شود اگر برای هر ایده آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از R، و برای هر $i < \dim M_{\mathfrak{m}}$، داشته باشیم $x\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$.

فصل دوم رساله را با بهبود دادن برخی نتایج ژو برای مدول های دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی و یافتن محک هایی برای تشخیص این مدول ها، در بخش ۲.۲ ، ادامه می دهیم. در گزاره ۲.۲.۲ و نتیجه ۶.۲.۲ ، نشان می دهیم اگر R-مدول با تولید متناهی M پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی داشته باشد، آنگاه به طور موضعی یکسان بعد است و $R/0 :_R M$ زنجیره وار جهانی است. در نهایت نتیجه اصلی این بخش را با اثبات این که اگر مدول های کوهمولوژی $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهی باشند آنگاه M دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است (قصیه ۱۳.۲.۲) و لذا M یکسان بعد و $R/0 :_R M$ زنجیره وار جهانی است، ارائه می دهیم.

روند به کار گرفته شده در مطالعه همبافت های کوزین، ابزاری سودمند جهت بحث در مورد پوچساز های یکنواخت کوهمولوژی موضعی نیز به شمار می رود و می توان برخی نتایج شناخته شده در این زمینه را با روش هایی متفاوت وشاید ساده تر اثبات کرد. به عنوان نمونه نتیجه ۹.۲.۲ و گزاره ۱۱.۲.۲ را ببینید.

این دیدگاه، ما را قادر می سازد تا مدول هایی که کوهمولوژی های همبافت کوزین آن ها با تولید متناهی هستند را روی حلقه های با تارهای رسمی کوهن-مکالی، مشخص نماییم. آخرین بخش فصل دوم به کاربردهایی از این شیوه اختصاص دارد. در قضیه ۳.۳.۲ ، نشان می دهیم روی چنین حلقه هایی،

[۱۰] C. Zhou

کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهیند اگر و تنها اگر M پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی داشته باشد، اگر و تنها اگر $\widehat{M}$ یک $\widehat{R}$-مدول یکسان بعد باشد. نتایج به دست آمده در مورد همبافت کوزین در بخش ۱.۲، ما را قادر می سازد که ارتفاع یک ایده ال از حلقه R را با استفاده از همبافت کوزین، در قضیه ۵.۳.۲ ، بیان کنیم.

برای R-مدول با تولید متناهی M روی حلقه موضعی $(R, \mathfrak{m})$، مفهوم مهم دیگری که وابستگی زیادی به پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد، عبارت است از

$$\mathfrak{a}(M) = \bigcap_{i<\dim M} (\circ :_R \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)).$$

بنا بر تعریف، R-مدول M، دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است، اگر وتنها اگر

$$\mathfrak{a}(M) \nsubseteq \cup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}\, M}\mathfrak{p}.$$

از طرف دیگر اگر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}\, M$، آنگاه $\mathfrak{a}(M) \subseteq \mathfrak{p}$ اگر و تنها اگر $i < \dim M$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}\, \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)$ (لم ۷.۲.۲ را ببینید). این واقعیات می توانند انگیزه ای برای مطالعه روابط بین مدول های کوهمولوژی موضعی و همبافت های کوزین باشند.

می دانیم برای یک R-مدول با تولید متناهی M و $\dim M = d$، $\mathrm{Att}\, \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(M) = \mathrm{Assh}\, M$ (قضیه ۴.۲.۱). فصل سوم را با بحث در مورد $\mathrm{Att}\, \mathrm{H}^t_{\mathfrak{m}}(M)$، برای اندیس های t مشخصی، به ویژه $\mathrm{Att}\, \mathrm{H}^{d-1}_{\mathfrak{m}}(M)$، بر حسب کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ آغاز می کنیم. به عنوان نتیجه ای از این بحث، در نتیجه ۶.۱.۳، محکی برای ناصفر بودن $\mathrm{H}^{d-1}_{\mathfrak{m}}(M)$، در حالتی که کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهی هستند، ارائه می شود.

موضوع اصلی بخش ۲.۳ سوال زیر است که توسط دیبایی و یاسمی در [۱۰] مطرح شد. آن ها برای یک R-مدول با تولید متناهی و ایده آل $\mathfrak{a}$ از R، مجموعه $\mathrm{Att}\, \mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(M)$ را مشخص می کنند و نشان می دهند $\mathrm{Att}\, \mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(M) \subseteq \mathrm{Assh}\, M$. حال، سوال زیر جالب و طبیعی به نظر می رسد.

سوال ۵. [۱۰، ۲.۹ Question] آیا برای هر زیرمجموعه دلخواه T از $\mathrm{Assh}\, R$، ایده آلی از R مانند $\mathfrak{a}$ موجود است به طوری که $\mathrm{Att}\, \mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(M) = T$؟

قضیه ۱۱.۲.۳ پاسخ مثبتی برای سوال فوق، در حالتی که R حلقه ای موضعی و کامل است، ارائه می دهد. در [۱۱، ۱.۶ Theorem]، ثابت می شود که اگر $(R, \mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی و کامل باشد، آنگاه برای هر دو ایده آل $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ از R، اگر $\mathrm{Att}\, \mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(M) = \mathrm{Att}\, \mathrm{H}^d_{\mathfrak{b}}(M)$، آنگاه $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(M) \cong \mathrm{H}^d_{\mathfrak{b}}(M)$. به عنوان کاربردی از این مطلب، در نتیجه ۱۲.۲.۳، نشان می دهیم تعداد آخرین مدول های کوهمولوژی موضعی غیر یکریخت M نسبت به تمام ایده آل های R برابر است با $۲^{|\mathrm{Assh}\, M|}$.

در بخش آخر ۳.۳، با استفاده از نتایج بخش های ۱.۳ و ۲.۳ و نیز فصل دوم، رده مدول های کوهن-مکالی تعمیم یافته را مطالعه می کنیم. در نتیجه ۴.۳.۳، محک های جدیدی برای مدول های کوهن-مکالی تعمیم یافته، برحسب پوچساز های یکنواخت کوهمولوژی موضعی، ارائه می دهیم. نتایج این بخش در فصل آخر رساله، برای مطالعه مکان هندسی کوهن-مکالی مدول ها، مفیدند.

مکان هندسی کوهن-مکالی M، به صورت

$$\mathrm{CM}(M) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : \text{مدول کوهن مکالی است } R_{\mathfrak{p}}\text{- به عنوان } M_{\mathfrak{p}}\}$$

معرفی می شود. خواص توپولوژیکی مکان هندسی کوهن-مکالی یک R-مدول و تعیین این که چه زمانی یک زیر مجموعه باز $\operatorname{Spec} R$، در توپولوژی زاریسکی، است توسط تعداد زیادی از ریاضیدانان بررسی شده است. گروتندیک در [۱۴] نشان می دهد که اگر R حلقه عالی باشد، آنگاه $\mathrm{CM}(M)$ یک زیر مجموعه باز $\operatorname{Spec} R$، در توپولوژی زاریسکی، است و در [۱۷]، هارتشورن نشان می دهد که اگر R همبافت دوگانی داشته باشد، آنگاه $\mathrm{CM}(M)$ یک زیر مجموعه باز $\operatorname{Spec} R$ است. در [۲۶]، روتهاوس[۱۱] و سگا[۱۲] مکان هندسی کوهن-مکالی مدول های مدرج روی حلقه نوتری مدرج استاندارد $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i$ را به عنوان $R_\circ$-مدول مطالعه کردند.

هدف اصلی بخش اول از فصل چهارم، این است که تعیین شود چه زمانی $\mathrm{CM}(M)$ یک زیر مجموعه باز $\operatorname{Spec} R$، در توپولوژی زاریسکی، است. در این راستا، دو رده از حلقه ها، که روی آن ها، مکان هندسی کوهن-مکالی هر مدول با تولید متناهی تحت توپولوژی زاریسکی، زیر مجموعه ای باز از $\operatorname{Spec} R$ است، معرفی می شوند. یکی از آن ها، رده حلقه هایی است که تارهای رسمی آن ها کوهن-مکالی هستند (ملاحظه ۷.۱.۴) و دیگری رده حلقه های موضعی زنجیره وار R است که $\text{non-CM}(R) = \operatorname{Spec} R \setminus \mathrm{CM}(R)$ مجموعه ای متناهی است (نتیجه ۹.۱.۴). در نهایت، با ارائه مثال هایی در ۱۱.۱.۴ و ۱۲.۱.۴ ، نشان می دهیم این دو رده از حلقه ها متمایز هستند.

با الهام از نتایج فوق، در بخش ۲.۴، حلقه های با تارهای رسمی کوهن-مکالی را مطالعه می کنیم. یکی از نتایج اصلی این بخش، قضیه ۲.۲.۴ است که محکی برای R-مدول های با تولید متناهی که پوچساز یکنواخت کوهمولوژی های موضعی دارند، بر حسب مجموعه مشخصی از تار های رسمی R ارائه می دهد. به ویژه نشان می دهیم، برای یک ایده آل اول $\mathfrak{p}$ از R، حلقه $R/\mathfrak{p}$ زنجیره وار جهانی و تار رسمی R روی $\mathfrak{p}$ کوهن-مکالی است اگر و تنها اگر $R/\mathfrak{p}$ دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی باشد (قضیه ۲.۲.۴ و لم ۱۰.۲.۲).

---
[۱۱] C. Rotthaus
[۱۲] L. M. Şega

نتیجه ۳.۲.۴ خلاصه خوبی از روابط بین پوچسازهای یکنواخت کوهمولوژی موضعی و همبافت های کوزین است که نشان می دهد حلقه موضعی R زنجیره وار جهانی است و تارهای رسمی آن کوهن-مکالی هستند اگر و تنها اگر برای هر ایده آل اول $\mathfrak{p}$ از R حلقه $R/\mathfrak{p}$ دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی باشد.

اگر کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهی باشند، آنگاه $\mathrm{non\text{-}CM}(M) = \mathrm{V}(\mathrm{a}(M))$ (نتیجه ۴.۲.۴ را ببینید). این بخش را با قضیه ۸.۲.۴ ، که مدول های M با خاصیت فوق را بدون فرض با تولید متناهی بودن کوهمولوژی های همبافت کوزین، مشخص می کند، به پایان می بریم. این قضیه نتیجه می دهد که اگر کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهی باشند، آنگاه تارهای رسمی R روی ایده آل های اول مشخصی، کوهن-مکالی هستند (نتیجه ۹.۲.۴).

با توجه به نتیجه ۱.۳.۲ ، اگر کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهی باشند، آنگاه M به طور موضعی یکسان بعد و $R/0 :_R M$زنجیره وار جهانی است. از طرف دیگر اگر تمام تارهای رسمی یک حلقه زنجیره وار جهانی، کوهن-مکالی باشند، آنگاه برای هر R-مدول باتولید متناهی و یکسان بعد، کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهی هستند (قضیه ۴).

این نتایج این حدس را تقویت می کند که روی حلقه موضعی R، اگر کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(R)$ با تولید متناهی باشند، آنگاه تارهای رسمی R کوهن-مکالی هستند (بخش ۴.۴ را ببینید).

در سراسر این رساله، هر یک از تعاریف و گزاره های شناخته شده، همراه یک مرجع ارائه شده اند و بقیه که مرجعی برای آن ها ذکر نشده است، اصیل محسوب می شوند که بیشتر آن ها در [۶]، [۵] و [۷] آورده شده اند. همچنین سبک ارجاع به مطالب مندرج در متن رساله، به شیوه نگارش پارسی است. به عنوان نمونه برای دیدن "گزاره ۵.۲.۴"، باید به بخش دوم از فصل ۴ مراجعه شود. اما شیوه ارجاع به مراجع لاتین، به همان سبک لاتین است. مثلاً برای دیدن [۲، ۸.۲.۵] باید به بخش دوم از فصل ۸ مرجع [۲]، مراجعه کرد.

فهرست مطالب

فصل ۱
پیش نیازها

در سراسر این رساله، R نشان دهنده یک حلقه جابجایی و نوتری با عضو همانی ناصفر و M یک R-مدول با تولید متناهی است. در حالتی که $(R,\mathfrak{m})$ حلقه موضعی باشد، $\widehat{M}$ نشان دهنده کمال M نسبت به $\mathfrak{m}$ است. مجموعه تمام ایده آل های اول R با $\operatorname{Spec} R$ نشان داده می شود و برای ایده آل I از R، $\mathrm{V}(I)$ مجموعه ایده آل های اول شامل I را نشان می دهد. **محمل** M، با $\operatorname{Supp} M$ نشان داده شده و برابر مجموعه $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : M_{\mathfrak{p}} \neq ۰\}$ است و **مجموعه ایده آل های اول وابسته** به M، $\operatorname{Ass} M$، برابر است با

$$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : \mathfrak{p} = (۰ :_R x) \text{ به طوری که } x \in M \text{ عضو ناصفر موجود است }\}.$$

مجموعه ایده آل های اول مینیمال M، مجموعه عناصر مینیمال $\operatorname{Supp} M$، نسبت به رابطه شمول است و با $\operatorname{Min} M$، نشان داده می شود. بعد کرول M ، برابر بزرگترین عدد طبیعی n، است که زنجیری از ایده آل های اول $\operatorname{Supp} M$ به طول n موجود باشد. اگر چنین عددی موجود نباشد، $\dim M = \infty$ و بنابر قرارداد $\dim ۰ = -۱$. برای ایده آل اول $\mathfrak{p}$ از R، **ارتفاع $\mathfrak{p}$ نسبت به** M را برابر $\dim M_{\mathfrak{p}}$ تعریف می کنیم. لذا $\dim M = \max\{\dim R/\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M\}$. مجموعه ایده آل های اول $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ که $\dim R/\mathfrak{p} = \dim M$، با نماد $\operatorname{Assh} M$ نشان داده می شود.

R-مدول با بعد کرول متناهی M، **یکسان بعد** نامیده می شود در صورتی که $\operatorname{Min} M = \operatorname{Assh} M$. M را **به طور موضعی یکسان بعد** نامیم، اگر برای هر ایده آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از $\operatorname{Supp} M$، $M_{\mathfrak{m}}$ یکسان بعد باشد. عضو $x \in R$، M-**منظم** نامیده می شود اگر برای هر عضو ناصفر m از M، داشته باشیم $xm \neq ۰$. دنباله $x_۱, \ldots, x_n$ از عناصر R، یک دنباله M-منظم نامیده می شود در صورتی که $x_۱$ یک عضو M-منظم باشد، برای هر i، $۲ \leq i \leq n$، x_i یک عضو $M/(x_۱, \ldots, x_{i-۱})M$-منظم باشد و $M \neq (x_۱, \ldots, x_n)M$. اگر برای ایده آل I از R، $IM \neq M$، آنگاه طول همه M-رشته های منظم ماکسیمال در I با هم برابر است که **درجه** I روی M، نامیده و با نماد $\operatorname{grade}(I, M)$ نشان داده می شود. اگر $M = IM$، آنگاه قرار می دهیم

$\operatorname{grade}(I, M) = \infty$. در حالتی که $(R, \mathfrak{m})$ حلقه موضعی باشد، درجه $\mathfrak{m}$ روی M، **عمق** M نامیده شده و با نماد $\operatorname{depth} M$ نشان داده می شود.

۱.۱ نظریه نمایش ثانویه

نظریه نمایش ثانویه یک مدول را می توان از جهاتی دوگان نظریه تجزیه اولیه و ایده آل های اول وابسته مدول دانست، که ابزار بسیار سودمندی جهت مطالعه مدول های آرتینی به شمار می رود. در این بخش، مفاهیم و برخی نکات مهم از این نظریه را که در فصل های بعدی مورد نیاز هستند، یادآوری می کنیم. این نظریه به طور کامل توسط مک دونالد[1] در [۲۲]، معرفی شده است، همچنین در ضمیمه بخش ۶ از کتاب ماتسومورا[2] [۲۴]، نیز مورد بحث قرار گرفته است.

یک R-مدول ناصفر S، **ثانویه** نامیده می شود، اگر نگاشت حاصلضرب القایی توسط هر عضو r از R، یا پوشا باشد و یا پوچ توان. اگر S، ثانویه باشد، آنگاه $\mathfrak{p} = \operatorname{rad}(0 :_R S)$ یک ایده آل اول است و S، را $\mathfrak{p}$-ثانویه می نامیم. یک **نمایش ثانویه** از R-مدول S، یک تجزیه از S به صورت حاصل جمع متناهی از زیر مدول های ثانویه به صورت

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$$

است. این نمایش **مینیمال** نامیده می شود، اگر

(الف) ایده آل های اول $\mathfrak{p}_i = \operatorname{rad}(0 :_R S_i)$ متمایز باشند و

(ب) $S_j \nsubseteq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} S_i$.

R-مدول S **نمایش پذیر** نامیده می شود، اگر نمایش ثانویه داشته باشد. از آنجا که حاصلجمع خانواده تهی از زیرمدول ها، برابر صفر است، لذا R-مدول صفر نمایش پذیر ثانویه است. به راحتی می توان دید که اگر S، نمایش ثانویه داشته باشد، آنگاه دارای یک نمایش ثانویه مینیمال نیز هست.

فرض کنیم $S = S_1 + \cdots + S_n$ یک نمایش ثانویه برای S باشد، که در آن S_i، یک مدول $\mathfrak{p}_i$-ثانویه است. در این صورت مجموعه $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ مستقل از انتخاب نمایش ثانویه مینیمال برای S بوده، با نماد $\operatorname{Att} S$ یا $\operatorname{Att}_R S$ نشان داده شده و مجموعه **ایده آل های اول چسبیده** به S، نامیده می شود. منظور از عبارت "یک ایده آل اول چسبیده از S "، دقیقا یک عضو از $\operatorname{Att} S$ است.

در اینجا، برخی خواص اساسی و نتایج شناخته شده در مورد نمایش ثانویه و ایده آل های اول چسبیده، که توسط مک دونالد، در [۲۲] مورد بحث قرار گرفته اند را یادآوری می کنیم.

[1] I. G. Macdonald
[2] H. Matsumura

- [۲۲، ۵.۲] هر R-مدول آرتینی، نمایش ثانویه دارد.
- [۲۲، ۲.۲] فرض کنیم S یک R-مدول نمایش پذیر باشد و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. در این صورت $\mathfrak{p} \in \operatorname{Att} S$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{p}$ برابر با پوچساز یک تصویر همریخت از S باشد.
- [۲۲، ۴.۱] فرض کنیم $0 \longrightarrow S' \longrightarrow S \longrightarrow S'' \longrightarrow 0$ رشته دقیقی از R-مدول های نمایش پذیر و R-هومومورفیسم ها باشد. آنگاه

$$\operatorname{Att} S'' \subseteq \operatorname{Att} S \subseteq \operatorname{Att} S' \cup \operatorname{Att} S''.$$

- [۲۲، ۲.۶] فرض کنیم S، یک R-مدول نمایش پذیر باشد و $r \in R$. آنگاه

(الف) $rS \neq S$ اگر و تنها اگر $r \in \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Att} S} \mathfrak{p}$.

(ب) $(0 :_R S) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Att} S} \mathfrak{p}$.

نتیجه زیر به راحتی از گزاره (ب) فوق، به دست می آید.

نتیجه ۱.۱.۱. *فرض کنیم S یک R-مدول نمایش پذیر باشد.*

(الف) اگر $(R, \mathfrak{m})$ موضعی و S آرتینی باشد، آنگاه S با تولید متناهی است اگر و تنها اگر $Att S \subseteq \{\mathfrak{m}\}$.

(ب) اگر $\mathfrak{p} \in Min(R/0 :_R S)$، آنگاه $\mathfrak{p} \in Att\, S$.

(ج) اعضای $Att\, S$ شامل $0 :_R S$ هستند.

در نهایت، نتیجه زیر را یادآور می شویم که امکان تغییر حلقه پایه را در مطالعه ایده آل های اول چسبیده فراهم می کند.

قضیه ۲.۱.۱. *[۲، ۸.۲.۵] فرض کنیم $f : R \longrightarrow R'$ هومومورفیسمی از حلقه های نوتری باشد. اگر R'-مدول S نمایش ثانویه داشته باشد، آنگاه S به عنوان R-مدول دارای نمایش ثانویه است و*

$$Att_R S = \{f^{-1}(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in Att_{R'} S\}.$$

۲.۱ مدول های کوهمولوژی موضعی

در این بخش، برخی تعاریف پایه ای و نتایج شناخته شده در مورد مدول های کوهمولوژی موضعی یادآوری می شود. مراجع اصلی مورد استفاده در این بخش کتاب برادمن[۳] و شارپ [۴] [۲] و مقاله شنزل[۵] [۲۸] می باشند.

برای ایده آل داده شده $\mathfrak{a}$ از R، فانکتور $\mathfrak{a}$-تاب $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ روی رسته R-مدول ها، به صورت

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)=\{x\in M: \exists n\in\mathbb{N}\ ,\ \mathfrak{a}^n x=0\ \}$$

برای هر R-مدول M، تعریف می شود.

به راحتی دیده می شود که $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ فانکتوری جمعی، هموردا، R-خطی و دقیق چپ، روی رسته R-مدول ها و R-هomomorphism ها، است. لذا می توان از فانکتور مشتق شده راست $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ صحبت کرد. برای هر $i\geq 0$، iامین فانکتور مشتق شده راست $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ با نماد $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(-)$ نشان داده و i**امین فانکتور کوهمولوژی موضعی نسبت به ایده آل** $\mathfrak{a}$ نامیده می شود. لذا $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ و $\mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(-)$ به طور طبیعی یکریختند. مدول $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M)$ را iامین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت $\mathfrak{a}$ می نامند.

R-مدول M را **$\mathfrak{a}$-آزاد از تاب** نامند اگر $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)=0$، و **$\mathfrak{a}$-تاب** نامند اگر $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)=M$.

فانکتور $\mathfrak{a}$-تاب را می توان به صورت

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)=\bigcup_{n\geq 0}(0:_M\mathfrak{a}^n)\cong\varinjlim_n \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^n,M);$$

نیز بیان کرد، لذا برای هر i، یکریختی فانکتوری زیر برقرار است.

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M)\cong\varinjlim_n \operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}^n,M).$$

اغلب از خواص پایه ای زیر، بدون توضیح بیشتری، استفاده خواهیم کرد.

- [۲، ۱.۲.۳] $\mathrm{H}^r_{\mathfrak{a}}(M)=\mathrm{H}^r_{\mathrm{rad}(\mathfrak{a})}(M)$.
- [۲، (i)۲.۱.۷] اگر M یک مدول $\mathfrak{a}$-تاب باشد، آنگاه برای هر $i>0$، داریم $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(X)=0$.
- [۲، (iii)۲.۱.۷] برای هر $i>0$، داریم $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M)\cong\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$.
- [۲، ۲.۱.۹] اگر M یک مدول $\mathfrak{b}$-تاب باشد، آنگاه برای هر $i>0$، داریم $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}(M)\cong\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M)$.

---
[۳] M. P. Brodmann
[۴] R. Y. Sharp
[۵] P. Shenzel

- **قضیه استقلال** [۲، ۴.۲.۱]. فرض کنیم $R \longrightarrow S$ یک هomomورفیسم حلقه ای، $\mathfrak{a}$، ایده آلی از R و M یک S-مدول باشد. آنگاه برای هر $i > ۰$، داریم $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}S}(M) \cong \mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M)$.
- **قضیه تغییر پایه یکدست** [۲، ۴.۳.۲]. فرض کنیم $R \longrightarrow S$ همومورفیسم حلقه ای یکدست، $\mathfrak{a}$، ایده آلی از R و M یک R-مدول باشد. آنگاه برای هر $i > ۰$، داریم $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}S}(M \otimes_R S) \cong \mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M) \otimes_R S$.
- **رشته دقیق طولانی از مدول های کوهمولوژی موضعی**. فرض کنیم

$$۰ \longrightarrow M_۱ \longrightarrow M_۲ \longrightarrow M_۳ \longrightarrow ۰$$

یک رشته دقیق از R-مدول ها باشد. آنگاه رشته دقیق طولانی زیر را داریم.

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M_۱) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M_۲) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M_۳) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+۱}_{\mathfrak{a}}(M_۱) \longrightarrow \cdots$$

صفر بودن مدول های کوهمولوژی موضعی، مساله مهمی به شمار می رود که نتایج زیادی در ارتباط با آن به دست آمده است. قضایای زیر از مهمترین آن ها هستند.

قضیه ۱.۲.۱ . *قضیه صفر بودن گروتندیک* [۲، ۶.۱.۲] *فرض کنیم M یک R-مدول و $\mathfrak{a}$ ایده آلی از R باشد. آنگاه برای هر $i > dim\ M$، داریم $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = ۰$.*

نتیجه زیر درجه یک ایده آل را بر حسب مدول های کوهمولوژی موضعی مشخص می کند.

قضیه ۲.۲.۱ . [۲، ۶.۲.۷] *فرض کنیم M، یک R-مدول با تولید متناهی باشد و $\mathfrak{a}$ ایده آلی از R باشد به طوری که $\mathfrak{a}M \neq M$. آنگاه $grade\ (\mathfrak{a}, M)$، دقیقا برابر کوچکترین عدد صحیح i است که $H^i_{\mathfrak{a}}(M) \neq ۰$.*

قضیه ۳.۲.۱ . *قضیه صفر بودن لیختنبام- هارتشورن* [۱۸، ۳.۱] *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی با بعد d و $\mathfrak{a}$ ایده آلی از R باشد. آنگاه گزاره های زیر معادلند.*

(الف) $H^n_{\mathfrak{a}}(R) = ۰$.

(ب) *برای هر ایده آل اول $\mathfrak{P} \in Assh\ \widehat{R}$، ایده آل $\mathfrak{a}\widehat{R} + \mathfrak{P}$ یک ایده آل $\mathfrak{m}$ -اولیه نیست.*

نتایج زیر سودمندی نظریه نمایش ثانویه را به عنوان ابزاری مفید جهت مطالعه مدول های کوهمولوژی موضعی، نشان می دهند.

قضیه ۴.۲.۱ . *قضیه ناصفر بودن گروتندیک* [۲۳، ۲.۲] *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی و M یک R-مدول نا صفر و با تولید متناهی d باشد. آنگاه $Att\, H^d_{\mathfrak{m}}(M) = Assh\ M$. به ویژه $H^d_{\mathfrak{m}}(M) \neq ۰$.*

قضیه ۱.۲.۵. [۱۲، ۴ Corollary] *فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی، $\mathfrak{a}$ ایده آلی از R و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. آنگاه*

$$Att\, H_{\mathfrak{a}}^{dim\, M}(M) = \{\mathfrak{q} \cap R : \mathfrak{q} \in Assh\, \widehat{R},\ dim\, \widehat{R}/(\mathfrak{a}\widehat{R}+\mathfrak{q}) = \circ\}.$$

موضعی سازی ابزار مهمی در جبر جابجایی محسوب می شود. نتیجه زیر خاصیت بسیار مفیدی از ایده آل های اول متصل به مدول های کوهمولوژی های موضعی را تحت موضعی سازی، با شرطی روی حلقه پایه، بیان می کند.

قضیه ۱.۲.۶. [۳۱، ۳.۷] *فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ حلقه موضعی و تصویر همریخت حلقه ای گرنشتاین و موضعی باشد، M یک R-مدول با تولید متناهی، $\mathfrak{p} \in Spec\, R$ و $t = dim\, R/\mathfrak{p}$. فرض کنیم $\mathfrak{q} \in Spec\, R$ به طوری باشد که $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. آنگاه برای هر $i \in \mathbb{Z}$، $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in Att\, H^{i}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{q} \in Att\, H^{i+t}_{\mathfrak{m}}(M)$.*

اگر شرط تصویر همریخت حلقه گرنشتاین بودن R را از قضیه فوق حذف کنیم، نتیجه ضعیف تری خواهیم داشت.

قضیه ۱.۲.۷. [۳۱، ۴.۸] *فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$، حلقه ای موضعی، M یک R-مدول با تولید متناهی، $\mathfrak{p}$ و $\mathfrak{q}$ ایده آل های اولی از R باشند به طوری که $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. اگر برای عدد صحیح i، $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in Att\, H^{i}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$، آنگاه $\mathfrak{q} \in Att\, H^{i+t}_{\mathfrak{m}}(M)$، که در آن $t = dim\, R/\mathfrak{p}$.*

مدول های کوهمولوژی موضعی R-مدول با تولید متناهی M، عمدتا نامتناهی مولد هستند. برای مثال اگر $(R,\mathfrak{m})$ موضعی و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد، از آن جا که برای هر $i \geq \circ$، $\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M)$ آرتینی است، بنابر نتیجه ۱.۱.۱(الف)، $\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M)$ با تولید متناهی است، اگر و تنها اگر $\mathrm{Att}\, \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$. حال، بنابر قضیه ناصفر بودن گروتندیک (۱.۲.۴)، اگر $\dim M > \circ$، آنگاه $\mathrm{H}^{\dim M}_{\mathfrak{m}}(M)$ با تولید متناهی نیست. از طرف دیگر برای هر ایده آل $\mathfrak{a}$ از R، مدول $\mathrm{H}^{\circ}_{\mathfrak{a}}(M)$ زیر مدولی از M، و لذا با تولید متناهی است. حال یافتن کوچکترین اندیس i، که برای آن $\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{a}}(M)$ با تولید متناهی نیست، سوالی جالب و طبیعی به نظر می رسد.

تعریف ۱.۲.۸. [۲، ۹.۱.۳] *فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی باشد.* ***بعد متناهی*** *M* ***نسبت به ایده آل*** *$\mathfrak{a}$ از R به صورت زیر تعریف می شود.*

$$f_{\mathfrak{a}}(M) = \inf\{i \in \mathbb{N} : H^{i}_{\mathfrak{a}}(M) \text{ با تولید متناهی نیست } \}$$

نتیجه زیر انگیزه بیشتری جهت مطالعه بعد متناهی ایجاد می کند.

گزاره ۹.۲.۱. [۲، ۹.۱.۲] برای R-مدول با تولید متناهی M، ایده آل $\mathfrak{a}$ از R و عدد طبیعی t، عبارات زیر معادلند.

(الف) برای هر $i < t$، $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ با تولید متناهی است.

(ب) برای هر $i < t$، $\mathfrak{a} \subseteq rad\,(0 :_R H^i_{\mathfrak{a}}(M))$.

با توجه به گزاره فوق، قضیه مفید زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۱۰.۲.۱. فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی و $\mathfrak{a}$ ایده آلی از R باشد. آنگاه

$$\begin{aligned} f_{\mathfrak{a}}(M) &= \inf\{i \in \mathbb{N} : H^i_{\mathfrak{a}}(M)\} \\ &= \inf\{i \in \mathbb{N} : \mathfrak{a} \nsubseteq rad\,(0 :_R H^i_{\mathfrak{a}}(M))\}. \end{aligned}$$

گاهی اوقات ضعیف تر کردن شرط $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathrm{rad}\,(0 :_R \mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M))$، توسط ایده آل دیگری مانند $\mathfrak{b}$، مفید تر و جالب تر است.

تعریف ۱۱.۲.۱. [۲، ۹.۱.۵] فرض کنیم M یک R-مدول و $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ ایده آل هایی از R باشند به طوری که $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$. مفهوم $\mathfrak{b}$-بعد متناهی، $f^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(M)$، از M نسبت به $\mathfrak{a}$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$f^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(M) := \inf\{i \in \mathbb{N} : \mathfrak{b} \nsubseteq rad\,(0 :_R H^i_{\mathfrak{a}}(M))\}.$$

تعریف ۱۲.۲.۱. [۲، ۹.۲.۲] فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. برای ایده آل اول $\mathfrak{p} \in Spec\, R \setminus V(\mathfrak{a})$، $\mathfrak{a}$-**عمق تنظیم شده** M در $\mathfrak{p}$، با نماد $adj_{\mathfrak{a}}depth\, M_{\mathfrak{p}}$، نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می شود.

$$adj_{\mathfrak{a}}depth\, M_{\mathfrak{p}} := depth\, M_{\mathfrak{p}} + ht(\mathfrak{a}+\mathfrak{p})/\mathfrak{p}.$$

توجه داریم که این مقدار تنها برای $\mathfrak{p} \in Supp\, M$ و $\mathfrak{a}+\mathfrak{p} \subset R$ متناهی و عددی مثبت است و در سایر حالات نامتناهی است.

فرض کنیم $\mathfrak{b}$ ایده آل دیگری از R باشد به طوری که $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$. $\mathfrak{a}$- **عمق تنظیم شده** $\mathfrak{b}$-**مینیمم** M، با نماد $\lambda^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(M)$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می شود.

$$\begin{aligned} \lambda^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(M) &= \inf\{adj_{\mathfrak{a}}depth\, M_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \in Spec\, R \setminus V(\mathfrak{b})\} \\ &= \inf\{depth\, M_{\mathfrak{p}} + ht(\mathfrak{a}+\mathfrak{p})/\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in Spec\, R \setminus V(\mathfrak{b})\}. \end{aligned}$$

قضیه ۱۳.۲.۱ . [۲ ، ۹.۳.۵] *فرض کنیم $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ ایده آل هایی از R باشند به طوری که $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$، و M یک R..$f_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(M) \leq \lambda_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(M)$*

فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی باشد. R-مدول با تولید متناهی M، کوهن-مکالی[۶] نامیده می شود، اگر $\dim M = \operatorname{depth} M$. در حالت کلی، زمانی که R موضعی نیست، M را کوهن-مکالی نامند اگر برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$، $M_{\mathfrak{p}}$ کوهن-مکالی باشد. این رده از مدول ها به خوبی توسط کوهمولوژی موضعی مشخص سازی می شوند.

ملاحظه ۱۴.۲.۱ . *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. بنابر قضیه ۱ .۲ .۲ ، M کوهن-مکالی است اگر و تنها اگر برای هر $i < \dim M$، $H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$.*

مدول های کوهن-مکالی خواص بسیار جالب و مفیدی دارند که انگیزه زیادی برای مطالعه آن ها ایجاد کرده است. به عنوان تعمیمی از این رده مهم از مدول ها، می توان آن دسته از مدول هایی را در نظر گرفت که، کوهمولوژی های موضعی آن ها در اندیس های کمتر از بعد، با تولید متناهی هستند.

تعریف ۱۵.۲.۱ . *یک R-مدول با تولید متناهی روی حلقه موضعی $(R, \mathfrak{m})$، کوهن-مکالی تعمیم یافته $(g.CM)$ نامیده می شود، اگر برای هر $i < \dim M$، $\mathfrak{m}H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$.*

قضیه ۱۶.۲.۱ . *،رض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. آنگاه گزاره های زیر برقرارند.*

(الف) [۲ ، ۹.۵.۷] *اگر M کوهن-مکالی تعمیم یافته باشد، آنگاه برای هر $\mathfrak{p} \in Ass\ M \setminus \{\mathfrak{m}\}$، داریم $\dim R/\mathfrak{p} = \dim M$ و برای هر $\mathfrak{q} \in Supp\ M \setminus \{\mathfrak{m}\}$، $M_{\mathfrak{q}}$ یک $R_{\mathfrak{q}}$-مدول کوهن-مکالی است.*

(ب) [۲ ، ۹.۵.۷] *به عنوان نتیجه ای از (الف)، اگر*

- *R تصویر همریخت یک حلقه منظم باشد،*
- *برای هر $\mathfrak{p} \in Min\ M$، $\dim R/\mathfrak{p} = \dim M$،*
- *برای هر $\mathfrak{q} \in Supp\ M \setminus \{\mathfrak{m}\}$، $M_{\mathfrak{q}}$ یک $R - \mathfrak{q}$-مدول کوهن-مکالی باشد،*

آنگاه M کوهن-مکالی تعمیم یافته است.

(iii) [۲ ، ۹.۵.۸] *فرض کنیم M کوهن-مکالی تعمیم یافته باشد و $r \in \mathfrak{m}$ یک عنصر پارامتری باشد (یعنی $\dim M/rM = \dim M - 1$). آنگاه r روی $M/\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ غیر مقسوم علیه صفر بوده و M/rM کوهن-مکالی تعمیم یافته است.*

---

[۶] Cohen-Macaulay

به عنوان تعمیم دیگری از مدول های کوهن-مکالی، برای عدد طبیعی $n \geq 0$، R-مدول M در شرط (S_n) صدق می کند، اگر و تنها اگر برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$، $\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} \geq \min\{n, \dim M_{\mathfrak{p}}\}$. یک مدول کوهن-مکالی است اگر و تنها اگر برای هر $n \geq 0$، در شرط (S_n) صدق کند.

این بخش را با یادآوری مختصری از مفهوم مدول متعارف روی حلقه ای که تصویر همریخت حلقه موضعی گرنشتاین است و برخی خواص مورد نیاز در فصل آینده، به پایان می بریم.

فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ تصویر همریخت حلقه موضعی و گرنشتاین $(S, \mathfrak{n})$ باشد. برای R-مدول با تولید متناهی M، قرار می دهیم

$$K_M = \operatorname{Ext}_S^{\dim S - \dim M}(M, S)$$

و آن را **مدول متعارف** M می نامیم.

بنابر [۲۸، Theorem ۱.۱۱] نگاشتی طبیعی به صورت $\tau_M : M \longrightarrow K_{K_M}$ موجود است که خواص مهمی در مباحث فصل بعد دارد.

لم ۱۷.۲.۱ . *[۲۸، Lemma ۱.۹] با نمادها و شرایط فوق، گزاره های زیر برقرارند.*

(الف) اگر برای هر $\mathfrak{p} \in Supp\ M$، داشته باشیم $dim\ M_{\mathfrak{p}} + dim\ R/\mathfrak{p} = dim\ M$، آنگاه $(K_M)_{\mathfrak{p}} \cong K_{M_{\mathfrak{p}}}$.

(ب) $Ass\ K_M = \{\mathfrak{p} \in Ass\ M : dim\ R/\mathfrak{p} = dim M\}$ و لذا $dim\ M = dim\ K_M$.

(ج) K_M در شرط (S_2) صدق می کند.

قضیه ۱۸.۲.۱ . *[۲۸، Theorem ۱.۱۴] فرض کنیم R تصویر همریخت حلقه گرنشتاین باشد و M یک R-مدول با تولید متناهی و یکسان بعد از بعد کرول n باشد. آنگاه، برای هر $k \geq 1$، عبارت های زیر معادلند.*

(الف) M در شرط S_k صدق می کند.

(ب) نگاشت طبیعی $\tau_M : M \longrightarrow K_{K_M}$ دوسویی (یک به یک برای $k = 1$) است و برای هر $d-k+2 \leq n < d$، $H_{\mathfrak{m}}^n(K_M) = 0$.

۳.۱ همبافت های کوزین

تعریف ۱.۳.۱ . *[۳۵، Definition ۱.۱] یک **صافی** از $Spec\ R$، یک زنجیر نزولی مانند $\mathcal{F} = (F_i)_{i \geq 0}$، از زیر مجموعه های $Spec\ (R)$، به صورت $F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_i \supseteq \cdots$ است با این ویژگی که برای هر $i \in \mathbb{N}_0$، هر عضو از $\partial F_i = F_i \setminus F_{i+1}$ یک عضو مینیمال از F_i نسبت به رابطه زیرمجموعه بودن است. گوییم صافی $\mathcal{F}$ M را می پذیرد، اگر $Supp\ M \subseteq F_0$.*

مثال و نماد گذاری ۱.۳.۲. [۳۵، Example ۲.۱] فرض کنیم M یک R-مدول باشد. برای $i \geq 0$، قرار می دهیم

$$H_i = \{\mathfrak{p} \in Supp\, M \mid ht_M \mathfrak{p} \geq i\}.$$

دنباله $(H_i)_{i\geq 0}$ یک صافی از $Spec\, R$ است که M را می پذیرد، آن را **صافی ارتفاع** M نامیده و با نماد $\mathcal{H}(M)$ نشان می دهیم.

نمادگذاری و تذکر ۱.۳.۳. فرض کنیم $\mathcal{F} = (F_i)_{i\geq 0}$ یک صافی از $Spec\, R$ باشد که R-مدول M را می پذیرد. ساختار معرفی شده در ۲§ از [۲۹] ، همبافت

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_M^{-1}} M^0 \xrightarrow{d_M^0} M^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{i-1} \xrightarrow{d_M^{i-1}} M^i \longrightarrow \cdots$$

را ارائه می دهد که آن را با نماد $\mathcal{C}(\mathcal{F}, M)$ نشان داده و **همبافت کوزین** M نسبت به $\mathcal{F}$ می نامیم، و در آن $M^0 = \oplus_{\mathfrak{p}\in\partial F_0} M_\mathfrak{p}$ و برای هر $i > 0$، $M^i = \oplus_{\mathfrak{p}\in\partial F_i}(Coker\, d_M^{i-2})_\mathfrak{p}$. برای $m \in M$، مولفه $d_M^{-1}(m)$ در $M_\mathfrak{p}$ برابر $m/1$ است. توجه داریم که برای ایده آل اول $\mathfrak{p}$ از R، اگر $d_\mathfrak{p} : M \longrightarrow M_\mathfrak{p}$ هomomorphism طبیعی تعریف شده توسط $d_\mathfrak{p}(x) = x/1$ برای هر $x \in M$ باشد، آنگاه بنابر [۲۹، ۲.۲]، برای هر $x \in M$ و $i \geq 0$، برای هر $\mathfrak{p} \in \partial F_i$ به جز تعدادی متناهی از آن ها، $d_\mathfrak{p}(x) = 0$. در نتیجه، برای هر $i \geq 0$، یک R-هomomorphism مانند $d_M^{i-1} : M^{i-1} \longrightarrow M^i$ موجود است که در آن، اگر $x \in M^{i-1}$ و $\mathfrak{q} \in \partial F_i$، آنگاه مولفه $d_M^{i-1}(x)$ در $(Coker\, d_M^{i-2})_\mathfrak{q}$ برابر $\pi(x)/1$ است که در آن $\pi : M^{i-1} \longrightarrow Coker\, d_M^{i-2}$ نگاشت متعارف پوشا است.

همبافت کوزین M نسبت به صافی ارتفاع، $\mathcal{H}(M)$، را با $\mathcal{C}_R(M)$ نشان داده و از نمادهای زیر استفاده می کنیم.

$$\mathcal{C}_R(M)' : 0 \longrightarrow M^0 \xrightarrow{d_M^0} M^1 \xrightarrow{d_M^1} M^2 \xrightarrow{d_M^2} \cdots \xrightarrow{d_M^{i-1}} M^i \xrightarrow{d_M^i} \cdots$$

و برای هر $i \geq -1$،

$$K^i := Ker\, d_M^i,\ D^i := Im\, d_M^{i-1},\ \mathcal{H}_M^i := K^i/D^i.$$

لذا برای هر $l \geq -1$ رشته های دقیق زیر را داریم.

$$0 \longrightarrow M^{l-1}/K^{l-1} \longrightarrow M^l \longrightarrow M^l/D^l \longrightarrow 0, \qquad (۱.۱.۳)$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_M^{l-1} \longrightarrow M^{l-1}/D^{l-1} \longrightarrow M^{l-1}/K^{l-1} \longrightarrow 0, \qquad (۱.۲.۳)$$

*همبافت کوزین $\mathcal{C}_R(M)$ را **متناهی** را گوییم، هرگاه برای هر $i \geq -1$، $\mathcal{H}^i_M$ یک R-مدول با تولید متناهی باشد.*

لم زیر نقش مهمی در روند به کار رفته برای مطالعه کوهمولوژی های همبافت کوزین دارد. برای اثبات قسمت اول، مشابه استدلال به کار رفته در [Theorem ،۳۳] عمل می کنیم.

لم ۴.۳.۱. *فرض کنیم M یک R-مدول باشد. برای هر عدد صحیح k، $0 \leq k < ht_M \mathfrak{a}$، گزاره های زیر برقرارند.*

(الف) برای هر $s \geq 0$، $H^s_{\mathfrak{a}}(M^k) = 0$.

(ب) برای هر $s \geq 0$، $Ext^s_R(R/\mathfrak{a}, M^k) = 0$.

برهان. (الف). قرار می دهیم $C_{k-1} := \operatorname{Coker} d^{k-2} = M^{k-1}/D^{k-1}$ و لذا

$$M^k = \bigoplus_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M \\ \operatorname{ht}_M \mathfrak{p} = k}} (C_{k-1})_{\mathfrak{p}}.$$

برای هر $k < \operatorname{ht}_M \mathfrak{a}$ و هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ که $\operatorname{ht}_M \mathfrak{p} = k$، عضوی مانند $x \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$ وجود دارد. نگاشت حاصلضرب $(C_{k-1})_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{x} (C_{k-1})_{\mathfrak{p}}$ یک خودریختی است و لذا برای هر عدد صحیح s، نگاشت

$$\mathrm{H}^s_{\mathfrak{a}}((C_{k-1})_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{x} \mathrm{H}^s_{\mathfrak{a}}((C_{k-1})_{\mathfrak{p}})$$

نیز یک خودریختی است. پس می توان نتیجه گرفت که $\mathrm{H}^s_{\mathfrak{a}}((C_{k-1})_{\mathfrak{p}}) = 0$. حال، از خاصیت جمعی فانکتور های کوهمولوژی موضعی، نتیجه می شود $\mathrm{H}^s_{\mathfrak{a}}(M^k) = 0$.

(ب). در حالت کلی فرض کنیم N یک R-مدول باشد به طوری که برای هر $s \geq 0$، $\mathrm{H}^s_{\mathfrak{a}}(N) = 0$. با استقرا روی i، $i \geq 0$ ، نشان می دهیم $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}, N) = 0$. برای $i = 0$،

$$\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, N) = \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(N)) = 0.$$

فرض کنیم $i > 0$ و ادعا برای چنین مدول هایی مانند N و هر $j \leq i-1$، درست است. فرض کنیم E یک پوش انژکتیو برای N باشد و رشته دقیق $0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow N' \longrightarrow 0$ را که در آن، $N' = E/N$، در نظر می گیریم. از آن جا که $\mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(E) = 0$، نتیجه می شود که برای $s \geq 0$، $\mathrm{H}^s_{\mathfrak{a}}(N') = 0$. بنابر فرض استقرا پس $\operatorname{Ext}^{i-1}_R(R/\mathfrak{a}, N') = 0$. از آنجا که با توجه به رشته دقیق بالا، $\operatorname{Ext}^{i-1}_R(R/\mathfrak{a}, N') \cong \operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}, N)$، نتیجه به دست می آید. $\square$

نتایج زیر را به عنوان خواص ابتدایی همبافت های کوزین، از مراجع [۲۹]، [۳۳]، [۳۶] و [۴]، نقل می کنیم.

لم ۱.۳.۵. [۴، ۱.۲ Lemma] *فرض کنیم $\overline{R} := R/0 :_R M$، در این صورت یک یکریختی از همبافت ها به صورت $\mathcal{C}_R(M) \cong \mathcal{C}_{\overline{R}}(M)$ وجود دارد.*

قضیه ۱.۳.۶. [۲۹، ۳.۵ Theorem] *فرض کنیم S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R و M یک R-مدول باشد. آنگاه یک یکریختی از همبافت ها ی S^{-1}-مدول ها و S^{-1}-هomomorفیسم ها به صورت*

$$\Psi = \{\psi^n\}_{n \geq -1} : S^{-1}(\mathcal{C}(M)) \longrightarrow \mathcal{C}_{S^{-1}R}(S^{-1}M)$$

وجود دارد که در آن $\psi^{-1} : S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}M$ همانی است.

ننتیجه زیر یک مشخص سازی از مدول های کوهن-مکالی بر حسب همبافت های کوزین ارائه می دهد.

قضیه ۱.۳.۷. [۳۰، ۲.۴ Theorem] *فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. آنگاه M کوهن-مکالی است اگر و تنها اگر همبافت کوزین M، $\mathcal{C}(M)$، دقیق باشد.*

ساختار همبافت کوزین شرط (S_n) را نیز به خوبی مشخص سازی می کند.

قضیه ۱.۳.۸. [۳۶، ۴.۴ Example] *فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. آنگاه M در شرط (S_n) صدق می کند اگر و تنها اگر برای هر $i \leq n-2$، $\mathcal{C}_R(M)$ در iامین جمله، دقیق باشد.*

قضیه ۱.۳.۹. [۲۹، ۲.۷] *فرض کنیم M یک R-مدول باشد. آنگاه گزاره های زیر برقرارند.*

(الف) $Supp\ Coker\ d_M^{n-1} \subseteq H_n$.

(ب) $Supp\ \mathcal{H}_M^n \subseteq H_{n+2}$.

دو لم زیر را می توان کاربردهایی ساده از قضیه فوق دانست که خواص مفیدی از کوهمولوژی های کوزین را بیان می کنند.

لم ۱.۳.۱۰. *فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی و بعد متناهی $dim\ M = d$ باشد. اگر $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی باشد، آنگاه*

$$\bigcap_{i \geq -1} (0 :_R \mathcal{H}^i) \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in Min\ M} \mathfrak{p}.$$

برهان. بنابر قضیه ۹.۳.۱، برای هر $i \geq -۱$، داریم

$$\mathrm{V}(\circ :_R \mathcal{H}^i) = \operatorname{Supp} \mathcal{H}^i \subseteq \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M : \dim M_{\mathfrak{p}} \geq i + ۲\}.$$

لذا $\circ :_R \mathcal{H}^i \not\subseteq \cup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} M} \mathfrak{p}$. از آن جا که $\dim M = d$، برای $i \geq d - ۱$، $\mathcal{H}^i = \circ$. در نتیجه قضیه اجتناب از ایده آل های اول، نتیجه می دهد که $\cap_{i \geq -۱} (\circ :_R \mathcal{H}^i) \not\subseteq \cup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} M} \mathfrak{p}$. □

لم ۱۱.۳.۱ . *فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی باشد و $d = \dim M$.*

(الف) $\operatorname{Ass} M = \operatorname{Min} M$ اگر و تنها اگر $\mathcal{H}_M^{-۱} = \circ$.

(ب) $\mathcal{H}_M^{d-۱} = \mathcal{H}_M^d = \circ$.

برهان. (الف) با توجه به تعریف $(S_۱)$ و قضیه ۸.۳.۱، واضح است.

(ب) فرض کنیم $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M \setminus \operatorname{Min} M$. از آن جا که $\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} = \circ < \dim M_{\mathfrak{p}}$، نتیجه می گیریم که $\operatorname{ht}_M \mathfrak{p} > \circ$ و $M_{\mathfrak{p}}$ کوهن-مکالی نیست. پس بنابر قضیه ۷.۳.۱ و ۶.۳.۱، عدد صحیح $i_\circ \geq -۱$ موجود است که $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} \mathcal{H}_M^{i_\circ}$. از طرف دیگر $\mathcal{H}_M^{-۱} = \circ$ پس $i_\circ \geq \circ$. حال نتیجه از قضیه ۹.۳.۱ به دست می آید.

(ج) با توجه به قسمت (ب) از قضیه ۹.۳.۱ واضح است. □

فصل ۲

همبافت های کوزین متناهی

هدف اصلی این فصل، مطالعه رده مدول هایی است که کوهمولوژی های همبافت کوزین آن ها با تولید متناهی اند. در بخش اول، برخی خواص اساسی ساختار همبافت کوزین را که در ادامه رساله، مفید هستند، بررسی می کنیم. در بخش دوم، نظریه پوچسازهای یکنواخت کوهمولوژی موضعی را مطالعه کرده و نشان می دهیم رده مدول های با همبافت کوزین متناهی، زیر مجموعه ای از این رده است. در نهایت، از این روند جهت ارائه برخی مشخص سازی ها، در بخش آخر، استفاده می کنیم.

۱.۲ کوهمولوژی های همبافت های کوزین

در این بخش، ساختار کوهمولوژی های همبافت کوزین را بررسی کرده و برخی از تکنیک هایی که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار می گیرند، را بیان می کنیم.

در ابتدا، رابطه بین همبافت های کوزین مدول های واقع در یک رشته دقیق را بررسی می کنیم.

لم ۱.۱.۲ . *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی است.*

(الف) *اگر $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ یک رشته دقیق از R-مدول ها با شد به طوری که برای هر $\mathfrak{p} \in \ Supp\ N$، $ht_M\mathfrak{p} \geq 2$. آنگاه $\mathcal{C}_R(L)' \cong \mathcal{C}_R(M)'$. به ویژه، $\mathcal{C}_R(L)$ متناهی است اگر و تنها اگر $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی باشد.*

(ب) *فرض کنیم $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ یک رشته دقیق از R-مدول ها باشد با این ویژگی که برای هر $\mathfrak{p} \in Supp\ L$، $ht_M\mathfrak{p} \geq 1$. آنگاه $\mathcal{C}_R(M)' \cong \mathcal{C}_R(N)'$. به ویژه $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است اگر و تنها اگر $\mathcal{C}_R(N)$ متناهی باشد.*

برهان. برای اثبات (الف)، نمودار زیر را در نظر می گیریم.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \operatorname{Ker}\psi \arrow[d] & \\
L \arrow[r, "d_L^{-1}"] \arrow[d, "f"] & L^0 \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "f^0"] & L^0/\operatorname{Im} d_L^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
M \arrow[r, "d_M^{-1}"] \arrow[d, "g"] & M^0 \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & M^0/\operatorname{Im} d_M^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
N \arrow[r] \arrow[d] & 0 & 0 & \\
0, & & &
\end{tikzcd} \tag{۱.۱.۲}$$

از آنجا که $\operatorname{Supp}\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Supp} N$، می توان N را با $\operatorname{Im} g$ جایگذاری کرده و فرض کرد

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

دقیق است. از آنجا که $\operatorname{Min} M \cap \operatorname{Supp} N = \emptyset$، یکریختی $f^0 : L^0 \longrightarrow M^0$ روی f القاء می شود که در آن $L^0 = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Min} L} L_{\mathfrak{p}}$ و $M^0 = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Min} M} M_{\mathfrak{p}}$ و $f^0 d_L^{-1} = d_M^{-1} f$.
حال همریختی های پوشای طبیعی

$$\theta : L^0 \longrightarrow L^0/\operatorname{Im} d_l^{-1},\ \lambda : M^0 \longrightarrow d_M^{-1},\ \psi : L^0/\operatorname{Im} d_L^{-1} \longrightarrow M^0/\operatorname{Im} d_M^{-1},$$

را که $\psi\theta = \lambda f^0$ و $\varphi := \theta(f^0)^{-1} d_M^{-1} : M \longrightarrow \operatorname{Ker}\psi$، را در نظر می گیریم که در آن، $(f^0)^{-1}$ نشان دهنده نگاشت وارون f^0 بوده و نتیجه می دهد که φ پوشا است. برای اثبات این مطلب، عضوی مانند $x \in \operatorname{Ker}\psi$، در نظر می گیریم. عضو $m_0 \in M^0$ موجود است به طوری که $x = \theta(f^0)^{-1}(m_0)$. پس عضو m موجود است که $m_0 \in \operatorname{Ker}\lambda \subseteq \operatorname{Im} d_M^{-1}$.

Thus $m_0 = d_M^{-1}(m)$. در نتیجه $x = \theta(f^0)^{-1} d_M^{-1}(m) = \varphi(m)$. از آنجا که $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$، هومومورفیسم پوشای

$$(N \cong) M/\operatorname{Im} f \longrightarrow M/\operatorname{Ker}\varphi (\cong \operatorname{Ker}\psi)$$

موجود است که نتیجه می دهد $\operatorname{Supp}\operatorname{Ker}\psi \subseteq \operatorname{Supp} N$. به عنوان نتیجه، برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ با $\operatorname{ht}_M \mathfrak{p} = 1$، داریم $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Supp}\operatorname{Ker}\psi$.

حال، با جمع موضعی سازی های رشته دقیق

$$o \longrightarrow \operatorname{Ker}\psi \longrightarrow L^0/\operatorname{Im} d_L^{-1} \longrightarrow M^0/\operatorname{Im} d_M^{-1} \longrightarrow 0$$

در همه ایده آل های اول $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ با $\operatorname{ht}_M \mathfrak{p} = 1$، و در نظر گرفتن نگاشت های طبیعی، دیاگرام جابجایی زیر به دست می آید که در آن $\theta^1 f^1$ و λ^1 نگاشت های طبیعی پوشا هستند و ψ^1 نگاشت طبیعی است.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "d_L^{-1}"] \arrow[d, "f"] & L^0 \arrow[r, "d_L^0"] \arrow[d, "f^0"] & L^1 \arrow[r, "\theta^1"] \arrow[d, "f^1"] & L^1/\operatorname{Im} d_L^0 \arrow[r] \arrow[d, "\psi^1"] & 0 \\
M \arrow[r, "d_M^{-1}"] & M^0 \arrow[r, "d_M^0"] & M^1 \arrow[r, "\lambda^1"] & M^1/\operatorname{Im} d_M^0 \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

واضح است که ψ^1 نیز یک ایزومورفیسم است. حال، با استقرا روی i، خانواده ای از یکریختی های $(f^i)_{i\geq 0}$، $f^i : L^i \longrightarrow M^i, i > 0$، به دست می آید به طوری که نمودار

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
L \arrow[r] \arrow[d, "f"] & L^0 \arrow[r, "d_L^0"] \arrow[d, "f^0"] & L^1 \arrow[r, "d_L^1"] \arrow[d, "f^1"] & \cdots \arrow[r] & L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"] & L^i \arrow[r, "d_L^i"] \arrow[d, "f^i"] & \cdots \\
M \arrow[r] \arrow[d] & M^0 \arrow[r, "d_M^0"] \arrow[d] & M^1 \arrow[r, "d_M^1"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & M^{i-1} \arrow[r, "d_M^{i-1}"] \arrow[d] & M^i \arrow[r, "d_M^i"] \arrow[d] & \cdots \\
N \arrow[r] \arrow[d] & 0 & 0 & & 0 & 0 & \\
0, & & & & & &
\end{tikzcd}$$

جابجایی و با سطرهای دقیق است. لذا رشته دقیق $0 \longrightarrow \mathcal{H}_M^0 \longrightarrow \mathcal{H}_L^0 \longrightarrow N$ و یکریختی های $\mathcal{H}_L^i \cong \mathcal{H}_M^i$، $i > 0$ به دست می آیند که حکم را نتیجه می دهند.

(ب) از آنجا که $\operatorname{Supp}\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Supp} L$، می توان L را با $\operatorname{Ker} f$ جایگزین و فرض کرد

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

دقیق است. چون $\operatorname{Min} M \cap \operatorname{Supp} L = \emptyset$، پس $\operatorname{Supp} M = \operatorname{Supp} N$ و یکریختی $g^0 : M^0 \longrightarrow N^0$ روی g، وجود دارد، که در آن، $M^0 = \underset{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} M}{\oplus} M_{\mathfrak{p}}$ و $N^0 = \underset{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} N}{\oplus} N_{\mathfrak{p}}$. لذا نمودار جابجایی زیر را

داریم،

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & & \\
L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
M \arrow[r, "d_M^{-1}"] \arrow[d, "g"] & M^0 \arrow[r, "\gamma_M^0"] \arrow[d, "g^0"] & M^0/\operatorname{Im} d_M^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda^0"] & 0 \\
N \arrow[r, "d_N^{-1}"] \arrow[d] & N^0 \arrow[r, "\gamma_N^0"] \arrow[d] & N^0/\operatorname{Im} d_N^{-1} \arrow[r] & 0 \\
0 & 0, & &
\end{tikzcd}
\tag{۱.۲.۲}
$$

که در آن، γ_M^0، γ_N^0 و λ^0 همریختی های طبیعی هستند. به راحتی می توان دید λ^0 یک یکریختی است. بنابراین، یکریختی $g^1 : M^1 \longrightarrow N^1$ روی g^0، موجود است، به طوری که، $M^1 = \bigoplus_{\substack{\mathfrak{p}\in \operatorname{Supp} M \\ \operatorname{ht}_M \mathfrak{p}=1}} (M^0/\operatorname{Im} d_M^{-1})_{\mathfrak{p}}$ و $N^1 = \bigoplus_{\substack{\mathfrak{p}\in \operatorname{Supp} N \\ \operatorname{ht}_N \mathfrak{p}=1}} (N^0/\operatorname{Im} d_N^{-1})_{\mathfrak{p}}$. پس نمودار جابجایی زیر را داریم، که در آن، g^0 و g^1 یکریختی هستند.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M^0 \arrow[r, "d_M^0"] \arrow[d, "\cong"', "g^0"] & M^1 \arrow[d, "\cong"', "g^1"] \\
0 \arrow[r] & N^0 \arrow[r, "d_N^0"] & M^1
\end{tikzcd}
\tag{۱.۳.۲}
$$

حال، با استقرا نتیجه می شود $\mathcal{C}_R(M)' \cong \mathcal{C}_R(N)'$.

برای اثبات ادعای آخر، فرض می کنیم $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است. از رشته دقیق

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} d_M^{-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_M^0 \longrightarrow \mathcal{H}_M^0 \longrightarrow 0$$

نتیجه می شود که $\operatorname{Ker} d_M^0$ با تولید متناهی است. بنابر (۱.۳.۲)، $\operatorname{Ker} d_N^0$ با تولید متناهی است و لذا $\mathcal{H}_N^0$ با تولید متناهی است. متناهی بودن $\mathcal{H}_N^i$، $i \geq 1$، از یکریختی $\mathcal{C}_R(M)' \cong \mathcal{C}_R(N)'$، به دست می آید. $\square$

به عنوان کاربردی از لم بالا، نتیجه زیر را که در بخش های بعدی،مفید خواهد بود، ثابت می کنیم.

گزاره ۲.۱.۲ . *فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی و M یک R-مدول با تولید متناهی است. آنگاه R-مدولی با تولید متناهی مانند N موجود است که در شرط (S_1) صدق می کند، $\mathit{Supp}\ N = \mathit{Supp}\ M$ و $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است اگر و تنها اگر $\mathcal{C}_R(N)$ متناهی باشد.*

برهان. زیر مدول L از M را طوری در نظر می گیریم که $\operatorname{Ass} L = \operatorname{Ass} M\backslash \operatorname{Min} M$، $\operatorname{Ass} M/L = \operatorname{Min} M$ [۱، صفحه ۴ ، ۲۶۳ Proposition]. قرار می دهیم $N := M/L$. حال، N در شرط (S_1) صدق می کند. با در نظر گرفتن رشته دقیق $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ و این واقعیت که $\operatorname{Supp} L \cap \operatorname{Min} M = \emptyset$، نتیجه از لم ۱.۱.۲ (ب)، به دست می آید. □

نتیجه ۳.۱.۲. *فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ موضعی و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد به طوری که $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است. آنگاه R-مدول با تولید متناهی N موجود است که در شرط (S_1) صدق می کند، $\mathcal{C}_R(N)$ متناهی است و $\mathit{Supp}\ N = \mathit{Supp}\ M$.*

مفروضات و نمادهای گزاره ۲.۱.۲، را در نظر می گیریم. در نتیجهٔ زیر، با این فرض که R تصویر همریخت حلقه گرنشتاین است، N را طوری می یابیم که در شرط (S_2) صدق می کند. این نتیجه در یافتن شرایطی لازم برای متناهی بودن همبافت کوزین لازم است.

گزاره ۴.۱.۲ . *فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ تصویر همریخت حلقه گرنشتاین و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. آنگاه R-مدول با تولید متناهی N موجود است که در شرط (S_2) صدق می کند، $\mathit{Supp}\ N = \mathit{Supp}\ M$ و $\mathcal{C}_R(N)$ متناهی است اگر و تنها اگر $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی باشد.*

برهان. با توجه به نتیجه ۳.۱.۲، می توان فرض کرد M در شرط (S_1) صدق می کند، به عبارت دیگر $\operatorname{Ass} M = \operatorname{Min} M$، پس $\operatorname{Ass} M = \operatorname{Assh} M$. از آنجا که R تصویر همریخت حلقه گرنشتاین است، می توان مدول متعارف K_M را در نظر گرفت. قرار می دهیم $N := K_{K_M}$. آنگاه K_M و N، بنابر لم ۱۷.۲.۱ (ج)، در شرط (S_2) صدق می کنند. حال، بنابر قضیه ۱۸.۲.۱، می توان فرض کرد رشته

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

دقیق است. اگر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ به طوری که $\operatorname{ht}_M \mathfrak{p} \leq 1$، آنگاه $M_\mathfrak{p}$ کوهن-مکالی است. پس قضیه ۱۸.۲.۱ نتیجه می دهد $L_\mathfrak{p} = 0$. از آنجا که $\operatorname{Supp} N = \operatorname{Supp} M$، برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} L$، داریم $\operatorname{ht}_N \mathfrak{p} \geq 2$. حال نتیجه، از لم ۱.۱.۲ (الف)، به دست می آید. □

یادآوری می کنیم، برای حلقه موضعی $(R,\mathfrak{m})$ و همومورفیسم طبیعی $R \longrightarrow \widehat{R}$ و هر ایده آل اول $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$، حلقه $\widehat{R} \otimes_R k(\mathfrak{p})$ **تار رسمی** R روی $\mathfrak{p}$ نامیده می شود، که در آن $k(\mathfrak{p}) = R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. به وضوح همه تارهای رسمی یک حلقه کوهن-مکالی، کوهن-مکالی هستند.

نتیجه زیر از پتزل [۱]، گزاره ۴.۱.۲ را کاربردی تر می کند.

لم ۵.۱.۲. *[۲۵، Theorem ۳.۵] فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه موضعی است و همه تارهای رسمی R در شرط (S_1)، صدق می کنند. فرض کنیم M یک R-مدول با تواید متناهی باشد. آنگاه یک تکریختی از همبافت ها به صورت $u^\bullet : \mathcal{C}_R(M) \otimes_R \widehat{R} \longrightarrow \mathcal{C}_{\widehat{R}}(\widehat{M})$، وجود دارد. علاوه بر این، اگر همه تارهای رسمی R کوهن-مکالی باشند، آنگاه همبافت خارج قسمتی $Q^\bullet$، در رشته دقیق*

$$\circ \longrightarrow \mathcal{C}_R(M) \otimes_R \widehat{R} \xrightarrow{u^\bullet} \mathcal{C}_{\widehat{R}}(\widehat{M}) \longrightarrow Q^\bullet \longrightarrow \circ$$

یک همبافت دقیق است. به ویژه برای هر $i \geq \circ$، یک $\widehat{R}$-یکریختی به صورت

$$\mathcal{H}^i_M \otimes_R \widehat{R} \cong \mathcal{H}^i_{\widehat{M}}$$

وجود دارد.

در [۴، Theorem ۲.۱]، دیبایی نشان می دهد که، روی حلقه موضعی با تارهای رسمی کوهن-مکالی، همبافت کوزین یک R-مدول با تولید متناهی M که در شرط (S_2) صدق می کند و $\widehat{M}$، یکسان بعد است، متناهی است. اکنون، نشان می دهیم شرط (S_2)، در این نتیجه، زائد است. کاوازاکی نیزدر اثبات [۲۰، Theorem ۵.۵]، چنین نتیجه ای را با روشی متفاوت ثابت کرده است.

نتیجه ۶.۱.۲. *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی با تارهای رسمی کوهن-مکالی است. فرض کنیم M، یک R-مدول با تولید متناهی باشد به طوری که $\widehat{M}$ به عنوان $\widehat{R}$-مدول، یکسان بعد است. آنگاه همبافت کوزین M، $\mathcal{C}_R(M)$، متناهی است.*

برهان. با توجه به لم ۱۱.۳.۱ (ب)، می توان فرض کرد $\dim M \geq ۲$. بنابر لم ۵.۱.۲، برای هر i، یکریختی $\mathcal{H}^i_M \otimes_R \widehat{R} \cong \mathcal{H}^i_{\widehat{M}}$، وجود دارد، پس متناهی بودن $\mathcal{C}_R(M)$ معادل است با متناهی بودن $\mathcal{C}_{\widehat{R}}(\widehat{M})$. پس می توان فرض کرد R کامل است و لذا تصویر همریخت یک حلقه گرنشتاین است. حال، بنابر گزاره ۴.۱.۲، R-مدول با تولید متناهی N موجود است که در شرط (S_2) صدق می کند و $\mathcal{C}_R(N)$ متناهی است اگر و تنها اگر $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی باشد.

چون N در شرط (S_2) صدق می کند و $\operatorname{Supp} N = \operatorname{Supp} M$، لذا N یکسان بعد است و [۴، Theorem ۲.۱] نتیجه می دهد که $\mathcal{C}_R(N)$ متناهی است. حال، با توجه به (؟؟) و این واقعیت که $\mathcal{H}^{-1}_M$ زیر مدول M و لذا با تولید متناهی است، حکم ثابت می شود. □

نتیجه تکنیکی زیر، نقشی کلیدی در ادامه این فصل دارد.

[۱] H. Petzl

گزاره ۷.۱.۲. *فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی و $\mathfrak{a}$ ایده آلی از R است به طوری که $\mathfrak{a}M \neq M$. آنگاه، برای هر عدد صحیح نامنفی r، با شرط $r < ht_M\mathfrak{a}$،*

$$\prod_{i=0}^{r}(0 :_R Ext_R^{r-i}(R/\mathfrak{a}, \mathcal{H}_M^{i-1})) \subseteq 0 :_R Ext_R^r(R/\mathfrak{a}, M).$$

در اینجا $\prod$ به معنای حاصلضرب ایده آل ها به کار رفته است.

برهان. برای هر $j \geq -1$، رشته های دقیق ۳.۱.۱ و ۳.۲.۱ را یادآوری می کنیم.

$$0 \longrightarrow M^{j-1}/K^{j-1} \longrightarrow M^j \longrightarrow M^j/D^j \longrightarrow 0, \qquad (1.4.2)$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^{j-1} \longrightarrow M^{j-1}/D^{j-1} \longrightarrow M^{j-1}/K^{j-1} \longrightarrow 0. \qquad (1.5.2)$$

فرض می کنیم $0 \leq r < \mathrm{ht}_M\mathfrak{a}$ و با استقرا روی j، $0 \leq j \leq r$، نشان می دهیم

$$\prod_{i=0}^{j}(0 :_R \mathrm{Ext}_R^{r-i}(R/\mathfrak{a}, \mathcal{H}_M^{i-1})) \cdot (0 :_R \mathrm{Ext}_R^{r-j}(R/\mathfrak{a}, M^{j-1}/K^{j-1})) \subseteq 0 :_R \mathrm{Ext}_R^r(R/\mathfrak{a}, M).$$
(۱.۶.۲)

در حالت $j = 0$، رشته دقیق (۱.۵.۲)، رشته دقیق

$$\mathrm{Ext}_R^r(R/\mathfrak{a}, \mathcal{H}_M^{-1}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^r(R/\mathfrak{a}, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^r(R/\mathfrak{a}, M^{-1}/K^{-1})$$

را نتیجه می دهد. لذا

$$(0 :_R \mathrm{Ext}_R^r(R/\mathfrak{a}, \mathcal{H}_M^{-1})) \cdot (0 :_R \mathrm{Ext}_R^r(R/\mathfrak{a}, M^{-1}/K^{-1})) \subseteq 0 :_R \mathrm{Ext}_R^r(R/\mathfrak{a}, M)$$

و در نتیجه حالت $j = 0$، ثابت می شود.

فرض کنیم $0 \leq j < r$ و رابطه (۱.۶.۲) برای j، برقرار باشد. بنابر لم ۴.۳.۱(ب)، رشته دقیق ۱.۴.۲، نتیجه می دهد

$$\mathrm{Ext}_R^{r-j}(R/\mathfrak{a}, M^{j-1}/K^{j-1}) \cong \mathrm{Ext}_R^{r-j-1}(R/\mathfrak{a}, M^j/D^j). \qquad (1.7.2)$$

از طرف دیگر رشته دقیق (۱.۵.۲)، رشته دقیق

$$\mathrm{Ext}_R^{r-j-1}(R/\mathfrak{a}, \mathcal{H}_M^j) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{r-j-1}(R/\mathfrak{a}, M^j/D^j) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{r-j-1}(R/\mathfrak{a}, M^j/K^j)$$

را نتیجه می دهد. لذا داریم

$$(\circ :_R \operatorname{Ext}_R^{r-j-1}(R/\mathfrak{a}, \mathcal{H}_M^j)) \cdot (\circ :_R \operatorname{Ext}_R^{r-j-1}(R/\mathfrak{a}, M^j/K^j)) \subseteq \circ :_R \operatorname{Ext}_R^{r-j-1}(R/\mathfrak{a}, M^j/D^j). \tag{۱.۸.۲}$$

حال، (۱.۷.۲) و (۱.۸.۲) ننیجه می دهند که

$$(\circ :_R \operatorname{Ext}_R^{r-j-1}(R/\mathfrak{a}, \mathcal{H}_M^j)) \cdot (\circ :_R \operatorname{Ext}_R^{r-j-1}(R/\mathfrak{a}, M^j/K^j)) \subseteq \circ :_R \operatorname{Ext}_R^{r-j}(R/\mathfrak{a}, M^{j-1}/K^{j-1}). \tag{۱.۹.۲}$$

بنابر (۱.۹.۲)، داریم

$$\prod_{i=\circ}^{j+1}(\circ :_R \operatorname{Ext}_R^{r-i}(R/\mathfrak{a}, \mathcal{H}_M^{i-1})) \cdot (\circ :_R \operatorname{Ext}_R^{r-j-1}(R/\mathfrak{a}, M^j/K^j)) =$$

$$\prod_{i=\circ}^{j}(\circ :_R \operatorname{Ext}_R^{r-i}(R/\mathfrak{a}, \mathcal{H}_M^{i-1})) \cdot (\circ :_R \operatorname{Ext}_R^{r-j-1}(R/\mathfrak{a}, \mathcal{H}_M^{j})) \cdot (\circ :_R \operatorname{Ext}_R^{r-j-1}(R/\mathfrak{a}, M^j/K^j)) \subseteq$$

$$\prod_{i=\circ}^{j}(\circ :_R \operatorname{Ext}_R^{r-i}(R/\mathfrak{a}, \mathcal{H}_M^{i-1})) \cdot (\circ :_R \operatorname{Ext}_R^{r-j}(R/\mathfrak{a}, M^{j-1}/K^{j-1}))$$

و، بنابر فرض استقراء (۱.۶.۲)، داریم

$$\prod_{i=\circ}^{j+1}(\circ :_R \operatorname{Ext}_R^{r-i}(R/\mathfrak{a}, \mathcal{H}_M^{i-1})) \cdot (\circ :_R \operatorname{Ext}_R^{r-j-1}(R/\mathfrak{a}, M^j/K^j)) \subseteq \circ :_R \operatorname{Ext}_R^{r}(R/\mathfrak{a}, M).$$

این پایان استقراء است. با توجه به رشته (۱.۴.۲)، نگاشت یک به یک طبیعی

$$\operatorname{Ext}_R^{\circ}(R/\mathfrak{a}, M^{r-1}/K^{r-1}) \hookrightarrow \operatorname{Ext}_R^{\circ}(R/\mathfrak{a}, M^r)$$

موجود است. از طرفی، بنا بر لم ۴.۳.۱(ب)، $\operatorname{Ext}_R^{\circ}(R/\mathfrak{a}, M^r) = \circ$. پس $\operatorname{Ext}_R^{\circ}(R/\mathfrak{a}, M^{r-1}/K^{r-1}) = \circ$ و حال، با قرار دادن $j = r$ در (۱.۶.۲) ، حکم ثابت می شود. □

نتیجه زیر، کاربردی ساده از گزاره فوق است.

نتیجه ۸.۱.۲. *فرض کنیم $\mathfrak{a}$ ایده آلی از R باشد به طوری که $\mathfrak{a}M \neq M$. حال، برای هر عدد صحیح r که $\circ \leq r < ht_M\mathfrak{a}$، داریم*

$$\prod_{i=-1}^{r-1}(\circ :_R \mathcal{H}_M^i) \subseteq \bigcap_{i=\circ}^{r}(\circ :_R Ext_R^i(R/\mathfrak{a}, M)) \subseteq \bigcap_{i=\circ}^{r}(\circ :_R H_{\mathfrak{a}}^i(M)).$$

برهان.

با توجه به گزاره ۷.۱.۲ و این واقعیت که فانکتور $\operatorname{Ext}(-, M)$ خطی است و $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^i(M) \cong \varinjlim_j(\operatorname{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^j, M))$، نتیجه حاصل می شود. □

۲.۲ پوچسازهای یکنواخت کوهمولوژی موضعی

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. عنصر $x \in R \setminus \cup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} M}\mathfrak{p}$، **پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی** برای M ، نامیده می شود، اگر برای هر ایده آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از R، برای هر $i < \operatorname{ht}_M \mathfrak{m}$، داشته باشیم $x\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$. علاوه بر این، x، **پوچساز یکنواخت قوی کوهمولوژی موضعی** M، نامیده می شود در صورتی که، برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$، x یک پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی برای $M_{\mathfrak{p}}$ باشد.
R، **زنجیره وار جهانی** نامیده می شود، اگر هر R-جبر با تولید متناهی، زنجیره وار باشد.

به عنوان یکی از خواص ابتدایی حلقه ای که دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است، ثابت می شود که R باید زنجیره وار جهانی باشد.

یکی از نتایج اصلی در مورد پوچساز های یکنواخت کوهمولوژی موضعی، قضیه زیر است که توسط ژو اثبات شده و خاصیت پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی داشتن R را به همان خاصیت برای هر $R/\mathfrak{p}$ که $\mathfrak{p}$ ایده آل اول مینیمال R است، تحدید می کند.

قضیه ۱.۲.۲ . [Theorem ۳.۲ ،۳۷] *فرض کنیم R با بعد متناهی d باشد. آنگاه شرایط زیر معادلند.*

(الف) *R پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد.*

(ب) *R به طور موضعی یکسان بعد است و برای هر ایده آل اول مینیمال $\mathfrak{p}$ از R، $R/\mathfrak{p}$ دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است.*

با برهانی شبیه استدلال به کار رفته در اثبات قضیه فوق، می توان آن را در حالت مدولی نیز اثبات کرد. در ابتدا، نشان می دهیم مدولی که دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی باشد، به طور موضعی یکسان بعد است.

گزاره ۲.۲.۲ . *فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی باشد به طوری که دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی باشد، آنگاه M به طور موضعی یکسان بعد است.*

برهان. فرض کنیم $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}\operatorname{Supp} M$. نشان می دهیم برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} M$ که $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$، داریم $\dim M_{\mathfrak{m}} = \dim R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{m}}$. بنابر فرض، عضوی مانند $x \in R \setminus \cup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} M}\mathfrak{p}$ موجود است به طوری که برای هر $i < \dim M_{\mathfrak{m}}$. از آنجا که $x \in R_{\mathfrak{m}} \setminus \bigcup_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{m}}\in \operatorname{Min} M_{\mathfrak{m}}} \mathfrak{p}R\mathfrak{m}$ و بنابر تعریف کوهمولوژی موضعی، $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}})$، می توان فرض کرد $(R, \mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی با ایده آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ است. قرار می دهیم $d := \dim M$ و به برهان خلف، فرض می کنیم ایده آل اول $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} M$ موجود باشد به طوری که $c := \dim R/\mathfrak{p} < d$. قرار می دهیم $S = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Min} M : \dim R/\mathfrak{q} \leq c\}$ و $T = \operatorname{Ass} M \setminus S$.

زیر مدولی از M مانند N که $\operatorname{Ass} N = T$ و $\operatorname{Ass} M/N = S$، را در نظر می گیریم. حال، $\dim M/N = c$ و $\dim N = d$. از آنجا که $\operatorname{rad}(\circ :_R N) = \cap_{\mathfrak{q}\in T}\mathfrak{q}$، پس عضوی مانند $y \in (\circ :_R N) \setminus \cup_{\mathfrak{q}\in S}\mathfrak{q}$ موجود است. لذا، به وضوح، برای هر $i \geq \circ$، $y\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(N) = \circ$. رشته دقیق $\circ \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow \circ$، رشته دقیق

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M/N) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{m}}(N)$$

را نتیجه می دهد. از آنجا که برای هر $i < d$، $x\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = \circ$، پس برای هر $i < d$، $xy\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M/N) = \circ$. به ویژه $xy\mathrm{H}^c_{\mathfrak{m}}(M/N) = \circ$. بنابراین $xy \in \cap_{\mathfrak{q}\in \operatorname{Assh} M/N}\mathfrak{q}$ ([۲، ۷.۲.۱۱ و ۷.۳.۲]). در نتیجه با توجه به انتخاب $\mathfrak{p}$، $xy \in \mathfrak{p}$ و با این واقعیت که $\mathfrak{p} \in S \cap \operatorname{Min} M$، در تناقض است. $\square$

لم زیر که در [Lemma ۳.۱ ،۳۷] ، برای $M = R$، اثبات شده است، با استدلالی مشابه قابل تعمیم به مدول ها است.

لم ۳.۲.۲. *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی، M یک R-مدول با تولید متناهی و با بعد d و $\mathfrak{p}$ ایده آل اول مینیمالی از M است و دنباله زیر از رشته های دقیق از R-مدول های با تولید متناهی وجود دارد.*

$$\begin{array}{l}
\circ \longrightarrow R/\mathfrak{p} \longrightarrow M \longrightarrow N_1 \longrightarrow \circ,\\
\circ \longrightarrow R/\mathfrak{p} \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow \circ,\\
\vdots\\
\circ \longrightarrow R/\mathfrak{p} \longrightarrow N_{t-2} \longrightarrow N_{t-1} \longrightarrow \circ,\\
\circ \longrightarrow R/\mathfrak{p} \longrightarrow N_{t-1} \longrightarrow N_t \longrightarrow \circ.
\end{array}$$

فرض کنیم y عضوی از R باشد به طوری که $yN_t = \circ$.

(الف) اگر عضوی مانند x از R وجود داشته باشد که برای $i < d$، $xH^i_{\mathfrak{m}}(M) = \circ$، آنگاه برای هر $i < d$، $(xy)^{t^{d-1}}H^i_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{p}) = \circ$.

(ب) اگر x عضوی از R باشد به طوری که برای هر $i < d$، $xH^i_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{p}) = \circ$، آنگاه برای هر $i < d$، $x^t yH^i_{\mathfrak{m}}(M) = \circ$.

حال، تعمیم قضیه ۱.۲.۲ برای مدول ها را ارائه می دهیم.

گزاره ۴.۲.۲. *فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. آنگاه شرایط زیر معادلند.*

(الف) M پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد.

(ب) M به طور موضعی یکسان بعد است و برای هر $\mathfrak{p} \in Min\, M$، $R/\mathfrak{p}$ دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است.

برهان. (الف) $\Leftarrow$ (ب).

بنابر گزاره ۲.۲.۲، M به طور موضعی یکسان بعد است. فرض کنیم $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} M$ و $\mathfrak{m}$ یک ایده آل ماکسیمال از R باشد به طوری که شامل $\mathfrak{p}$ است. از آنجا که $M_{\mathfrak{p}}$ یک $R_{\mathfrak{p}}$-مدول با طول متناهی است، قرار می دهیم $t := l_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$. زنجیری از زیر مدول ها مانند

$$\circ \subset N_{۱} \subset N_{۲} \subset \cdots \subset N_t \subseteq M$$

موجود است به طوری که

$$\begin{array}{l}
\circ \longrightarrow R/\mathfrak{p} \longrightarrow M \longrightarrow M/N_{\circ} \longrightarrow \circ, \\
\circ \longrightarrow R/\mathfrak{p} \longrightarrow M/N_{\circ} \longrightarrow M/N_{۱} \longrightarrow \circ, \\
\vdots \\
\circ \longrightarrow R/\mathfrak{p} \longrightarrow M/N_{t-۲} \longrightarrow M/N_{t-۱} \longrightarrow \circ, \\
\circ \longrightarrow R/\mathfrak{p} \longrightarrow M/N_{t-۱} \longrightarrow M/N_t \longrightarrow \circ.
\end{array}$$

چون $M_{\mathfrak{m}}$ یکسان بعد است، $\mathrm{ht}_M \mathfrak{m}/\mathfrak{p} = \mathrm{ht}_M \mathfrak{m}$ و چون بنار تعریف t،

$\mathfrak{p} \notin \operatorname{Ass} M/N_t$، پس $\mathfrak{p} \not\subseteq (M/N_t) :_R \circ$. حال موضعی سازی رشته های دقیق بالا در $\mathfrak{m}$، رشته های دقیق زیر را نتیجه می دهد.

$$\begin{array}{l}
\circ \longrightarrow (R/\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}} \longrightarrow M_{\mathfrak{m}} \longrightarrow (M/N_{\circ})_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \circ, \\
\circ \longrightarrow (R/\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}} \longrightarrow (M/N_{\circ})_{\mathfrak{m}} \longrightarrow (M/N_{۱})_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \circ, \\
\vdots \\
\circ \longrightarrow (R/\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}} \longrightarrow (M/N_{t-۲})_{\mathfrak{m}} \longrightarrow (M/N_{t-۱})_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \circ, \\
\circ \longrightarrow (R/\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}} \longrightarrow (M/N_{t-۱})_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \circ.
\end{array}$$

عضوی مانند $y \in \circ :_R (M/N_t) \setminus \mathfrak{p}$ در نظر می گیریم. بنابر فرض، عضوی مانند $x \in R \setminus \bigcup_{\mathfrak{q} \in \operatorname{Min} M} \mathfrak{q}$ موجود است به طوری که برای هر $i < \mathrm{ht}_M \mathfrak{m}$، $x\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}) = \circ$. حال، بنابر لم ۳.۲.۲، برای هر $i < \mathrm{ht}_M \mathfrak{m}$ و هر عدد صحیح $l > \circ$، داریم $(xy)^l \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}} = \circ$.

(ب) $\Leftarrow$ (الف). با استدلالی مشابه فوق اثبات می شود. $\square$

نتیجه زیر، کاربردی ساده از گزاره فوق است که نشان می دهد خاصیت پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی داشتن M مستقل از ساختار مدولی آن بوده و تنها به محمل M مربوط است.

نتیجه ۵.۲.۲. *فرض کنیم M و N، R-مدول هایی با بعد متناهی باشند به طوری که $\operatorname{Supp} M = \operatorname{Supp} N$. آنگاه M دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است اگر و تنها اگر N دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی باشد.*

نتیجه ۶.۲.۲. *فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی باشد که دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است. آنگاه $0 :_R M$ زنجیره وار جهانی است.*

برهان. از نتیجه ۵.۲.۲ و [۳۷، Theorem ۲.۱] به دست می آید. □

برای R-مدول با تولید متناهی M روی حلقه موضعی $(R, \mathfrak{m})$،

$$\mathfrak{a}(M) = \bigcap_{i<\dim M} (0 :_R \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)).$$

با توجه به تعریف، R-مدول M دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است اگر و تنها اگر داشته باشیم، $\mathfrak{a}(M) \nsubseteq \cup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}\, M}\mathfrak{p}$. از طرف دیگر، اگر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}\, M$، آنگاه $\mathfrak{a}(M) \subseteq \mathfrak{p}$ اگر و تنها اگر اندیسی مانند $i < \dim M$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}\, \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)$. به طور دقیق تر لم زیر را داریم.

لم ۷.۲.۲. *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی و M یک R-مدول با تولید متناهی از بعد d باشد. آنگاه M دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است اگر و تنها اگر برای هر $i = 0, \dots, d-1$، $\mathrm{Att}\, H^i_{\mathfrak{m}}(M)\cap \mathrm{Min}\, M = \emptyset$.*

برهان. فرض کنیم M پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی داشته باشد. پس برای هر $i = 0, \dots, d-1$، عضوی مانند $x \in R\setminus \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}\, M} \mathfrak{p}$ موجود است به طوری که $x\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$. لذا، بنابر نتیجه ۱.۱.۱(ب)، برای هر $i = 0, \dots, d-1$، $x \in \bigcap_{\mathfrak{q}\in \mathrm{Att}\, \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)} \mathfrak{q}$. حال، ادعا واضح است.

برعکس، اگر $\mathfrak{a}(M) \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}\, M}\mathfrak{p}$، آنگاه، بنابر قضیه اجتناب از ایده آل های اول، ایده آل اولی مانند $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}\, M$، موجود است که $\mathfrak{a}(M) \subseteq \mathfrak{p}$. بنابراین، اندیسی مانند $0 \le i \le d-1$، موجود است که $0 :_R \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) \subseteq \mathfrak{p}$. از طرف دیگر، $0 :_R M \subseteq 0 :_R \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) \subseteq \mathfrak{p}$ که نتیجه می دهد $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\, M$. پس $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}\, (R/0 :_R \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M))$ و لذا بنابر نتیجه ۱.۱.۱(ب)، $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}\, \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)$، که با فرض در تناقض است. پس $\mathfrak{a}(M) \nsubseteq \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}\, M}\mathfrak{p}$ و حکم نتیجه می شود. □

لم زیر، رابطه ای بین ایده آل های اول $\mathfrak{p}$ که شامل $\mathfrak{a}(M)$ هستند و آن $\mathfrak{p}$ هایی که $M_{\mathfrak{p}}$ کوهن-مکالی نیست، بیان می کند.

لم ۸.۲.۲. *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی، M یک R-مدول با تولید متناهی است و $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\, M$ موجود است به طوری که $M_{\mathfrak{p}}$ کوهن-مکالی نیست. آنگاه $\mathfrak{a}(M) \subseteq \mathfrak{p}$.*

برهان. فرض کنیم $d := \dim M$ و $\mathfrak{a}(M) \nsubseteq \mathfrak{p}$. آنگاه بنابر قضیه ۱۳.۲.۱، داریم

$$d = f^{\mathfrak{a}(M)}_{\mathfrak{m}}(M) \le \lambda^{\mathfrak{a}(M)}_{\mathfrak{m}}(M) \le \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} \le \dim M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} \le d.$$

پس $\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} = \dim M_{\mathfrak{p}}$ که تناقض است. □

نتیجه زیر، که ژو نیز آن را در [Corollary ۲.۳ ،۳۷]، برای $M = R$ و با روشی متفاوت اثبات کرده است، نتیجه ای سریع از لم بالا است.

نتیجه ۹.۲.۲ . *فرض کنیم x پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی برای R- مدول با تولید متناهی M باشد. آنگاه M_x یک R_x - مدول کوهن- مکالی است.*

برهان. از آنجا که $x \in \mathrm{a}(M)$، پس بنابر لم ۸.۲.۲، برای هر ایده آل اول $\mathfrak{p}$ که $x \notin \mathfrak{p}$، $M_{\mathfrak{p}}$ کوهن-مکالی است. □

خاصیت دیگری از حلقه هایی که پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارند، قضیه ای از ژو [۳۷، Theorem ۲.۲] است که نشان می دهد اگر x یک پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی R باشد، آنگاه توانی از x یک پوچساز یکنواخت قوی کوهمولوژی موضعی برای R است. با استفاده از نتیجه فوق و روند به کاررفته در مطالعه پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی، این نتیجه را با روشی متفاوت، در حالتی که R موضعی است، ثابت می کنیم. قبل از آن، قضیه شناخته شده زیر را یادآوری می کنیم.

لم ۱۰.۲.۲ . *[Thorem ۳۱.۷ ،۲۴] فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی و زنجیره وار جهانی باشد و M یک R- مدول با تولید متناهی و یکسان بعد باشد. آنگاه $\widehat{M}$ به عنوان $\widehat{R}$- مدول یکسان بعد است .*

گزاره ۱۱.۲.۲ . *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه موضعی، M یک R-مدول با تولید متناهی و x یک پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی M باشد. آنگاه توانی از x یک پوچساز یکنواخت قوی کوهمولوژی موضعی M است.*

برهان. فرض کنیم $d = \dim M_{\mathfrak{m}}$. پس برای $i < d$، داریم $x\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ و لذا برای $i < d$، داریم $x\mathrm{H}^i_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{M}) = 0$. اگر ایده آل اولی مانند $\mathfrak{P} \in \operatorname{Min} \widehat{M}$ وجود داشته باشد به طوری که $x \in \mathfrak{P}$، آنگاه $x \in \mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$. از طرف دیگر بنابر خاصیت نزول، $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} M$ که تناقض است. پس x یک پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی برای $\widehat{M}$ نیز هست. لذا $\widehat{M}$ یکسان بعد است و $\widehat{M} :_{\widehat{R}} R/0$، بنابر گزاره ۲.۲.۲ و نتیجه ۶.۲.۲، زنجیره وار جهانی است.

فرض کنیم $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ و $r = \mathrm{ht}_M \mathfrak{p}$. از آنجا که M یکسان بعد است، می توان عناصر $x_1, \ldots, x_r$ را در $\mathfrak{p}$ طوری انتخاب کرد که $\mathrm{ht}_M(x_1, \ldots, x_r) = r$ و $\dim R/(x_1, \ldots, x_r) = d - r$. قرار می دهیم $I = (x_1, \ldots, x_r)$، پس داریم $\dim \widehat{R}/I\widehat{R} = d - r$. حال، بنابر لم ۱۰.۲.۲، $\widehat{M}$ نیز یکسان بعد بوده و لذا $\mathrm{ht}_{\widehat{M}}(I\widehat{R}) = r$.

توجه داریم که $\mathcal{C}_{\widehat{R}}(\widehat{M})$، بنابر نتیجه ۶.۱.۲، متناهی است و بنابر نتیجه ۹.۲.۲ $\widehat{M}_x$، کوهن-مکالی است، یعنی برای هر $i \geq -1$، $\mathcal{H}^i_{\widehat{M}_x} = (\mathcal{H}^i_{\widehat{M}})_x = \circ$. چون $\mathcal{H}^i_{\widehat{M}}$، به عنوان $\widehat{R}$-مدول، با تولید متناهی است، عدد صحیح مثبتی مانند n موجود است که $x^n \in \cap_{i\geq -1}(\circ :_{\widehat{R}} \mathcal{H}^i_{\widehat{M}})$. حال، بنابر نتیجه ۸.۱.۲، برای هر $i < \mathrm{ht}_{\widehat{M}}(I\widehat{R}) = r$، داریم $x^{nd} \in \circ :_{\widehat{R}} \mathcal{H}^i_{I\widehat{R}}(\widehat{M})$. پس برای هر $i < r = \mathrm{ht}_M I$، $x^{nd}\mathcal{H}^i_I(M) = \circ$ و حکم با توجه به این واقعیت که $\mathrm{H}^i_{IR_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \cong \mathrm{H}^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$و نتیجه می شود. $\square$

قضیه زیر محکی برای این که R-مدول با تولید متناهی M روی یک حلقه موضعی، پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی داشته باشد، بر اساس وجود عنصر پارامتری خاصی از M، ارائه می دهد. در اثبات (الف) $\Leftarrow$ (ب) (دو به یک) از این قضیه، عطیه طالمی اشمنانی، همکاری بسیار مفیدی داشت.

قضیه ۱۲.۲.۲ . *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی و M یک R-مدول با تولید متناهی و با بعد $d > 1$ باشد. آنگاه، عبارت های زیر معادلند.*

(الف) M پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد.

(ب) $M :_R R/\circ$ زنجیره وار جهانی و یکسان بعد است و عنصر پارامتری x از M موجود است به طوری که $\mathrm{Min}\ (M/xM) \cap \mathrm{Ass}\ M = \emptyset$ و برای $t \in \mathbb{N}$، همه مدول های M/x^tM دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی مشترک باشند.

برهان. در استدلال زیر، N زیر مدولی از M است به طوری که $\mathrm{Ass}\, M/N = \mathrm{Ass}\, M \setminus \mathrm{Min}\, M$ و $\mathrm{Ass}\, N = \mathrm{Min}\, M$ (برای وجود چنین زیر مدولی به [۱، صفحه ۲۶۳، Proposition ۴] مراجعه کنید).

(الف) $\Leftarrow$ (ب). بنابر گزاره ۲.۲.۲، M یکسان بعد و بنابر نتیجه ۶.۲.۲، $M :_R R/\circ$ زنجیره وار است. قرار می دهیم $X = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, M : \mathrm{ht}_M \mathfrak{p} = 1\}$. به راحتی می توان دید

$$X = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\, M/N : \mathrm{ht}_M \mathfrak{p} = 1\} \subseteq \mathrm{Min}\, M/N$$

و لذا متناهی است. فرض کنیم r عضوی از $R \setminus \cup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}\, M}\mathfrak{p}$ باشد که پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی M است. اگر r عضوی وارون پذیر باشد، آنگاه M کوهن-مکالی است و حکم با انتخاب x به صورت یک غیر مقسوم علیه صفر، روی M، ثابت می شود.

پس فرض می کنیم $r \in \mathfrak{m} \setminus \cup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}\, M}\mathfrak{p}$، لذا $\dim M/rM = d - 1$. از آنجا که M یکسان بعد است و $\dim M > 1$، پس $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Min}\, M$، $\mathfrak{m} \notin X$ و $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Min}\, M/rM$. در نتیجه عضوی مانند

$$x \in \mathfrak{m} \setminus (\bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}\, M} \mathfrak{p}) \cup (\bigcup_{\mathfrak{p}\in X} \mathfrak{p}) \cup (\bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}\, M/rM} \mathfrak{p}) \qquad (۲.۱.۲)$$

موجود است. لذا $\operatorname{Min} M/xM \cap \operatorname{Ass} M = \emptyset$.

ادعا می کنیم $r \notin \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} M/xM} \mathfrak{p}$. زیرا در غیر این صورت، ایده آل اول $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} M/xM$ موجود است که $r \in \mathfrak{p}$. پس $\operatorname{ht}_M \mathfrak{p} = ۱$ که نتیجه می دهد $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} M/rM$ و این با انتخاب x در (۲.۱.۲) تناقض دارد.

در گام بعدی، ادعا می کنیم $\circ :_R M/N \nsubseteq \cup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} M/xM} \mathfrak{p}$. در غیر این صورت، ایده آل اول $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} M/xM$ موجود است که $\circ :_R M/N \subseteq \mathfrak{p}$. پس $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M/N$ و $\operatorname{ht}_M \mathfrak{p} = ۱$ که نشان می دهد $\mathfrak{p} \in X$ و با (۲.۱.۲) تناقض دارد.

به عنوان نتیجه، عضوی مانند $s \in \circ :_R M/N \setminus \cup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} M/xM} \mathfrak{p}$، وجود دارد. حال رشته های دقیق القایی

$$\mathrm{H}^{i-۱}_{\mathfrak{m}}(M/N) \longrightarrow \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(N) \longrightarrow \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M)$$

را در نظر می گیریم. از آنجا که برای هر i، $s\mathrm{H}^{i-۱}_{\mathfrak{m}}(M/N) = \circ$، و برای هر $i < d$، $r\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M) = \circ$، برای هر $i < d$، داریم $rs\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(N) = \circ$. حال برای مدول N، $\operatorname{Ass} N = \operatorname{Min} M$ و لذا بنابر (۲.۱.۲)، هر یک از عضوهای x^t روی N یک غیر مقسوم علیه صفر است. عدد صحیح و مثبت دلخواه t و رشته دقیق

$$\circ \longrightarrow N \xrightarrow{x^t} N \longrightarrow N/x^tN \longrightarrow \circ$$

را، که رشته دقیق زیر را القاء می کند، در نظر می گیریم.

$$\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(N) \longrightarrow \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(N/x^tN) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+۱}_{\mathfrak{m}}(N).$$

از آنجا که برای $i < d$، $rs\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(N) = \circ$، پس برای هر $i < d - ۱$، داریم $(rs)^۲\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(N/x^tN) = \circ$.

از طرف دیگر رشته دقیق

$$\circ \longrightarrow N/x^tN \longrightarrow M/x^tN \longrightarrow M/N \longrightarrow \circ$$

رشته های دقیق

$$\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(N/x^tN) \longrightarrow \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M/x^tN) \longrightarrow \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M/N)$$

را القاء می کند، که از آن ها، نتیجه می شود برای هر $i < d - ۱$، $(rs)^۲ s\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M/x^tN) = \circ$.

در نهایت، رشته دقیق

$$\circ \longrightarrow x^tM/x^tN \longrightarrow M/x^tN \longrightarrow M/x^tM \longrightarrow \circ$$

رشته های دقیق زیر را نتیجه می دهد.

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M/x^tN) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M/x^tM) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{m}}(x^tM/x^tN)$$

از آنجا که $s(M/N) = 0$، پس برای هر i ، $s\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(x^tM/x^tN) = 0$. بنابراین برای هر $i < d - 1$، $(rs)^2 s^2 \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M/x^tM) = 0$. از طرفی $r, s \in R \setminus \cup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} M/xM}\mathfrak{p}$ و $\dim M/x^tM = d - 1$، پس عضو r^2s^4 یک پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی M/x^tM است.

(ب) $\Leftarrow$ (الف). فرض کنیم همه مدول های M/x^tM، برای $t \in \mathbb{N}$، دارای یک پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی مانند r باشند. ابتدا توجه می کنیم که

$$0 :_R M/N \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} M/xM} \mathfrak{p}.$$

زیرا در غیر این صورت، ایده آل اول $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} M/xM$ وجود دارد به طوری که $0 :_R M/N \subseteq \mathfrak{p}$. از آنجا که $\dim M/N \leq d - 1$ و $\operatorname{ht}_M \mathfrak{p} = 1$، پس $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} M/N$ و در نتیجه $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ که با فرض $\operatorname{Min} M/xM \cap \operatorname{Ass} M = \emptyset$، تناقض دارد. به عنوان نتیجه، عضو ی مانند $s \in 0 :_R M/N \setminus \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} M/xM} \mathfrak{p}$ ، وجود دارد.

عدد صحیح مثبت t را در نظر می گیریم. از رشته دقیق

$$0 \longrightarrow x^tM/x^tN \longrightarrow M/x^tN \longrightarrow M/x^tM \longrightarrow 0$$

رشته های القایی

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(x^tM/x^tN) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M/x^tN) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M/x^tM)$$

به دست می آید. از آنجا که $s(M/N) = 0$ و r یک پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M/x^tM)$ است، نتیجه می شود که برای $i < d - 1$، $rs\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M/x^tN) = 0$.

از طرف دیگر، رشته دقیق $0 \longrightarrow N/x^tN \longrightarrow M/x^tN \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$ رشته های دقیق

$$\mathrm{H}^{i-1}_{\mathfrak{m}}(M/N) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(N/x^tN) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M/x^tN)$$

را القاء می کند. در نتیجه برای هر $i < d - 1$، داریم $rs^2\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(N/x^tN) = 0$.

با توجه به این که M زنجیره وار و یکسان بعد است و x یک عضو پارامتری برای M است، پس $\bigcup_{\mathfrak{q}\in \operatorname{Min} M/xM}\mathfrak{q} \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} N}\mathfrak{p}$ و لذا $rs^2 \notin \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} N}\mathfrak{p}$.

گام بعدی این است که نشان دهیم برای هر $i < d$، $rs^{2}\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(N) = 0$. فرض کنیم $i < d$ و عضو دلخواه $\alpha \in \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(N)$ را در نظر می گیریم. با توجه به $\mathfrak{m}$-تاب بودن مدول های کوهمولوژی موضعی، عدد صحیح مثبت t موجود است که $\alpha \in (0 \underset{\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(N)}{:} x^t)$. از آنجا که $\mathrm{Ass}\, N = \mathrm{Min}\, M$ و $x^t \notin \underset{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}\, M}{\cup} \mathfrak{p}$، x^t روی N غیر مقسوم علیه صفر است. پس رشته دقیق $0 \longrightarrow N \xrightarrow{x^t} N \longrightarrow N/x^tN \longrightarrow 0$ رشته دقیق $\mathrm{H}^{i-1}_{\mathfrak{m}}(N/x^tN) \longrightarrow \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(N) \xrightarrow{x^t} \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(N)$ و همچنین رشته دقیق

$$\mathrm{H}^{i-1}_{\mathfrak{m}}(N/x^tN) \longrightarrow (0 \underset{\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(N)}{:} x^t) \longrightarrow 0$$

را نتیجه می دهد. چون $rs^{2}\mathrm{H}^{i-1}_{\mathfrak{m}}(N/x^tN) = 0$، پس $rs^{2}(0 \underset{\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(N)}{:} x^t) = 0$. به ویژه، $rs^{2}\alpha = 0$. بنابراین، از آنجا که $r, s \notin \underset{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}\, N}{\cup} \mathfrak{p}$، rs^{2} یک پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی M است. چون $\mathrm{Supp}\, M = \mathrm{Supp}\, N$، بنابر نتیجه ۵.۲.۲، M پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد. □

حال رده مهمی از مدول ها را معرفی می کنیم که دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی هستند. این رده، متشکل از مدول هایی است که همبافت کوزین متناهی دارند. در فصل بعد، نشان می دهیم این دو رده از مدول ها روی حلقه هایی که تارهای رسمی کوهن-مکالی دارند، بر هم منطبق می شوند.

***قضیه* ۱۳.۲.۲ .** *فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی و با بعد متناهی $\dim M = d$ است که $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است. آنگاه M پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد.*

برهان. بنابر لم ۱۰.۳.۱، عضوی مانند $x \in \cap_{i\geq -1}\mathcal{H}^i \setminus \cup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}\, M}\mathfrak{p}$ وجود دارد. حال، بنابر نتیجه ۸.۱.۲، x^d یک پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی M است. □

در قضیه ۱۲.۲.۲، نشان دادیم که اگر M دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی باشد، آنگاه یک عنصر پارامتری مانند x از M موجود است که M/xM پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد. حال، اگر $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی باشد، میتوان نشان داد که این خاصیت برای هر عنصر پارامتری از M برقرار است.

***گزاره* ۱۴.۲.۲ .** *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی باشد و M یک R-مدول با تولید متناهی و $\dim M = d > 1$ به طوری که $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است. آنگاه برای هر عضو غیر مقسوم علیه صفر x از M ، مدول خارج قسمتی M/xM دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است.*

علاوه بر این، $\mathrm{Min}\ (M/xM) \cap \mathrm{Ass}\ M = \emptyset$ و همه مدول های M/x^tM ، برای $t \in \mathbb{N}$ ، یک پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی مشترک دارند.

برهان. فرض کنیم $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} M/xM$. آنگاه $\operatorname{ht}_M \mathfrak{p} = 1$ و لذا، بنابر قضیه ۹.۳.۱(ب)، برای هر $i \geq 0$، داریم $\mathfrak{p} \not\in \operatorname{Supp} \mathcal{H}^i_M$. اگر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} \mathcal{H}^{-1}_M$، آنگاه $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} \mathcal{H}^{-1}_M$ و لذا $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ که با این واقعیت که x روی M غیر مقسوم علیه صفر است، تناقض دارد. پس

$$\sqcap_{i\geq -1}(0 :_R \mathcal{H}^i_M) \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} M/xM} \mathfrak{p}.$$

بنابراین، عضوی مانند $r \in \sqcap_{i\geq -1}(0 :_R \mathcal{H}_M) \setminus \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} M/xM} \mathfrak{p}$ وجود دارد. حال، از رشته دقیق

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0,$$

رشته دقیق

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M/xM) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow \cdots$$

به دست می آید. بنابر نتیجه ۸.۱.۲، برای هر $i < d$، $r\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$. پس رشته دقیق بالا نتیجه می دهد که برای هر $i < d - 1$، $r^2\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M/xM) = 0$. از آنجا که $r \in \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} M/xM} \mathfrak{p}$، r^2 یک پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی M/x^nM، برای هر عدد صحیح مثبت n است و $\operatorname{Min} M/xM \cap \operatorname{Ass} M = \emptyset$. □

قضیه ۱۵.۲.۲ . *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه موضعی و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد که همبافت کوزین آن متناهی است. آنگاه برای هر عنصر پارامتری x از M، M/xM دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است.*

برهان. زیر مدول N از M موجود است به طوری که $\operatorname{Ass} M/N = \operatorname{Min} M$ و $\operatorname{Ass} N = \operatorname{Ass} M \setminus \operatorname{Min} M$ ([۱، Page ۲۶۳، Proposition ۴]). از آنجا که در رشته دقیق $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$، برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} N$، داریم $\operatorname{ht}_M \mathfrak{p} \geq 1$، لم ۱.۱.۲(ب)، نتیجه می دهد که $\mathcal{C}_R(M/N)$ متناهی است. فرض کنیم

x عنصری پارامتری از M باشد. از آنجا که x روی M/N غیر مقسوم علیه صفر است، گزاره ۱۴.۲.۲، نتیجه می دهد $(M/N)/x(M/N)$ پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد. از طرفی، $\operatorname{Supp} M/xM = \operatorname{Supp} (M/N)/x(M/N)$، پس بنابر نتیجه ۵.۲.۲، M/xM دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است. □

۳.۲ کاربردها

بررسی های انجام شده در مورد کوهمولوژی های همبافت کوزین در بخش ۱.۲، روندی جدید برای مطالعه پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی، فراهم می آورد. این دیدگاه ما را قادر ساخت هر دو رده از مدول ها را، به طور عمیق تری، در بخش ۲.۲ مورد مطالعه قرار دهیم.

در این بخش کاربردهای بیشتری را درجهت مشخص سازی مدول های با همبافت کوزین متناهی (با شرایطی روی حلقه زمینه) و همچنین فرمولی برای ارتفاع یک ایده آل بر حسب کوهمولوژی های همبافت کوزین می یابیم .

۱.۳.۲ مشخص سازی های جزئی مدول هایی که همبافت کوزین متناهی دارند

این بخش را با قضیه زیر که نقشی اساسی در مطالعه همبافت های کوزین متناهی دارد، آغاز می کنیم.

نتیجه ۱.۳.۲ . *فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی و بعد متناهی d باشد. اگر $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی باشد، آنگاه M به طور موضعی یکسان بعد و $R/0 :_R M$ زنجیره وار جهانی است.*

برهان. با توجه به قضیه ۱۳.۲.۲، گزاره ۲.۲.۲ و نتیجه ۶.۲.۲ واضح است. □

حال، به راحتی می توان مثالی از یک مدول ارائه داد که حداقل یکی از کوهمولوژی های همبافت کوزین آن با تولید متناهی نباشد.

مثال. فرض کنیم R حلقه ای نوتری و موضعی و با بعد $d > 2$ باشد. دو ایده آل اول $\mathfrak{p}$ و $\mathfrak{q}$ از R را در نظر می گیریم به طوری که $\dim R/\mathfrak{p} = 2$، $\dim R/\mathfrak{q} = 1$، و $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}$. آنگاه $\operatorname{Min} R/\mathfrak{pq} = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}\}$ و لذا $R/\mathfrak{pq}$ یکسان بعد نیست. در نتیجه همبافت کوزین آن متناهی نیست.

در [۳۷، Corollary ۳.۳]، ژو نشان می دهد هر حلقه یکسان بعد نوتری که تصویر همریخت یک حلقه کوهن-مکالی با بعد متناهی است، پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد. می دانیم هر حلقه تصویر همریخت یک حلقه کوهن-مکالی، زنجیره وار یکنواخت است و همه تارهای رسمی آن کوهن-مکالی هستند. در اینجا، این نتیجه را به هر حلقه زنجیره وار یکنواخت موضعی که تارهای رسمی آن کوهن-مکالی هستند، با نشان دادن این که روی چنین حلقه هایی، همبافت کوزین هر مدول یکسان بعد متناهی است، تعمیم می دهیم. این نتیجه توسط کاوازاکی نیز در [۲۰، Theorem ۵.۵]، با روشی متفاوت اثبات شده است.

گزاره ۲.۳.۲ . *فرض کنیم R یک حلقه زنجیره وار جهانی است و همه تارهای رسمی آن کوهن- مکالی هستند. اگر M ، یک R-مدول با تولید متناهی و یکسان بعد باشد، آنگاه $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است. به ویژه، M دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است.*

برهان. بنابر لم ۱۰.۲.۲، $\widehat{M}$ یکسان بعد است. پس نتیجه ۶.۱.۲ حکم را ثابت می کند. □

قضیه زیر، برای R-مدول با تولید متناهی M، روابط بین متناهی بودن همبافت کوزین M، وجود پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی M، و یکسان بعد بودن $\widehat{M}$ را بیان می کند.

قضیه ۳.۳.۲. *فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ حلقه موضعی و همه تارهای رسمی آن کوهن-مکالی باشند. آنگاه عبارت های زیر، برای R-مدول با تولید متناهی M، معادلند.*

(الف) *$\widehat{M}$ یک $\widehat{R}$-مدول یکسان بعد است.*

(ب) *همبافت کوزین M متناهی است.*

(ج) *M پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد.*

برهان. (الف) $\Rightarrow$ (ب). از نتیجه ۶.۱.۲ به دست می آید.

(ب) $\Rightarrow$ (ج). همان قضیه ۱۳.۲.۲ است.

(ج) $\Rightarrow$ (الف). عضوی مانند $x \in R\setminus\cup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}\, M}\mathfrak{p}$ موجود است به طوری که برای هر $i < \dim M$، $x\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$. پس برای هر $i < \dim \widehat{M}$، $x\mathrm{H}^i_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{M}) = 0$. حال، با توجه به گزاره ۲.۲.۲، $\widehat{M}$ یکسان بعد است. □

۲.۳.۲ ارتفاع یک ایده آل

در این بخش با استفاده از برخی نتایج قبلی در مورد کوهمولوژی های همبافت کوزین، ارتفاع یک ایده آل را بر حسب همبافت های کوزین بیان می کنیم.

همان طور که در ۸.۱.۲، اشاره شد، نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۴.۳.۲. *برای هر R-مدول با تولید متناهی M و هر ایده آل $\mathfrak{a}$ از R با شرط $\mathfrak{a}M \neq M$،*

$$\prod_{-1\leq i}(0 :_R H^i) \subseteq 0 :_R H^{ht_M\mathfrak{a}-1}_{\mathfrak{a}}(M).$$

حال این سوال را مطرح می کنیم که آیا می توان حد کران بالا را بهبود بخشید.

سوال. آیا نامساوی

$$\prod_{-1\leq i}(0 :_R H^i) \subseteq 0 :_R \mathrm{H}^{\mathrm{ht}_M\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}}(M)$$

برقرار است؟

نشان می دهیم پاسخ این سوال، برای رده مدول های با تولید متناهی که همبافت کوزین آن ها متناهی است، منفی است. به طور دقیق تر،

قضیه ۵.۳.۲ . *فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی و با بعد متناهی باشد به طوری که همبافت کوزین آن، $\mathcal{C}_R(M)$، متناهی است. آنگاه برای هر ایده آل $\mathfrak{a}$ ، به طوری که $\mathfrak{a}M \neq M$، داریم*

$$ht_M\mathfrak{a} = \inf\{r : \prod_{-۱\leq i}(\circ :_R \mathcal{H}^i_M) \nsubseteq \circ :_R H^r_{\mathfrak{a}}(M)\}.$$

برهان. برای هر $r < \mathrm{ht}_M\mathfrak{a}$، $\prod_{i\geq -۱}(\circ :_R \mathcal{H}^i_M) \subseteq \circ :_R \mathrm{H}^r_{\mathfrak{a}}(M)$. پس داریم

$$\mathrm{ht}_M\mathfrak{a} \leq \inf\{r : \prod_{-۱\leq i}(\circ :_R \mathcal{H}^i_M) \nsubseteq \circ :_R \mathrm{H}^r_{\mathfrak{a}}(M)\}.$$

در نتیجه کافی است نشان دهیم $\prod_{-۱\leq i}(\circ :_R \mathcal{H}^i_M) \nsubseteq \circ :_R \mathrm{H}^{\mathrm{ht}_M\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}}(M)$.
بنابر قضیه استقلال کوهمولوژی موضعی، به عنوان $\overline{R} = R/\circ :_R M$-مدول، داریم

$$\mathrm{H}^{\mathrm{ht}_M\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}}(M) \cong \mathrm{H}^{\mathrm{ht}_M\mathfrak{b}}_{\mathfrak{b}}(M)$$

که در آن، $\mathfrak{b} = (\mathfrak{a} + \circ :_R M)/\circ :_R M$. با توجه به این که $\mathrm{ht}_M\mathfrak{a} = \mathrm{ht}_M\mathfrak{b}$ و بنابر لم ۵.۳.۱، $\mathcal{C}_R(M) \cong \mathcal{C}_{\overline{R}}(M)$. پس می توان فرض کرد $\circ :_R M = \circ$. قرار می دهیم $h := \mathrm{ht}_M\mathfrak{a}$ و عضو $x \in \circ :_R \mathrm{H}^h_{\mathfrak{a}}(M)$ را در نظر می گیریم. از آنجا که $\mathfrak{a}M \neq M$، ایده آل اول مینیمال $\mathfrak{q}$ در $\mathrm{Supp}\, M$، روی $\mathfrak{a}$ موجود است به طوری که $\dim R_{\mathfrak{q}} = \mathrm{ht}_M\mathfrak{a}$. در نتیجه $x/۱ \in \circ :_{R_{\mathfrak{q}}} \mathrm{H}^h_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}})$. پس، برای هر انتخاب $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}} \in \mathrm{Assh}\, M_{\mathfrak{q}}$ داریم $x/۱ \in \mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}}$ (قضیه ۴.۲.۱ و نتیجه ۱.۱.۱(ج) را ببینید) و لذا $x \in \mathfrak{p}$. بنابراین، $\circ :_R \mathrm{H}^h_{\mathfrak{a}}(M) \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}\, M} \mathfrak{p}$. از طرف دیگر، بنابر لم ۱۰.۳.۱، $\prod_{i\geq -۱}(\circ :_R \mathcal{H}^i_M) \nsubseteq \cup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}\, M}\mathfrak{p}$، که از آن نتیجه می شود

$$\prod_{i\geq -۱}(\circ :_R \mathcal{H}^i_M) \nsubseteq \circ :_R \mathrm{H}^h_{\mathfrak{a}}(M).$$

□

فصل ۳

ایده آل ها اول چسبیده به مدول های کوهمولوژی موضعی

در سراسر این فصل $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و M یک R-مدول با تولید متناهی و با بعد d است. یادآوری می کنیم که M پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد اگر وفقط اگر $\mathfrak{a}(M) \nsubseteq \cup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} M}\mathfrak{p}$. از طرف دیگر در لم ۷.۲.۲، دیدیم که اگر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} M$، آنگاه $\mathfrak{a}(M) \subseteq \mathfrak{p}$ اگر و تنها اگر $i < \dim M$، موجود باشد به طوری که $\mathfrak{p} \in \operatorname{Att} \operatorname{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)$. با الهام از این واقعیات، برای برخی اندیس های t ، به ویژه $t = d - 1$، مجموعه $\operatorname{Att} \operatorname{H}^t_{\mathfrak{m}}(M)$ را بر حسب کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ مطالعه می کنیم. در این راستا معیارهایی برای ناصفر بودن $\operatorname{H}^{d-1}_{\mathfrak{m}}(M)$، زمانی که $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است، در بخش ۱.۳ میابیم. با مطالعه مجموعه ایده آل های اول چسبیده به آخرین مدول کوهمولوژی موضعی، در بخش دوم بحث را ادامه داده و پاسخی مثبت برای سوالی که در [۱۰] مطرح شده است، در حالتی که R کامل است، ارائه می دهیم. آخرین بخش از این فصل، به بیان کاربردهایی از نتایج به دست آمده در یافتن مشخص سازی جدیدی برای مدول های کوهن-مکالی تعمیم یافته اختصاص دارد.

۱.۳ ایده آل های اول چسبیده ، وابسته به کوهمولوژی های همبافت کوزین

***لم*۱.۱.۳ .** *فرض کنیم i عددی صحیح باشد به طوری که $0 \leq i < d$. عبارت های زیر معادلند.*

(الف) برای هر j، $-1 \leq j < i$ ، $\dim \mathcal{H}^j_M \leq 0$.

(ب) برای هر j، $-1 \leq j < i$.، $H^{j+1}_{\mathfrak{m}}(M) \cong \mathcal{H}^j_M$.

برهان. فرض کنیم s عددی صحیح باشد به طوری که $0 \leq s < d$ و $\dim \mathcal{H}^{s-1}_M \leq 0$. با در نظر گرفتن

رشته دقیق (۳.۱.۱) به ازای $i = s$، برای هر t، رشته دقیق

$$\mathrm{H}^{t-1}_{\mathfrak{m}}(M^s) \longrightarrow \mathrm{H}^{t-1}_{\mathfrak{m}}(M^s/D^s) \longrightarrow \mathrm{H}^{t}_{\mathfrak{m}}(M^{s-1}/K^{s-1}) \longrightarrow \mathrm{H}^{t}_{\mathfrak{m}}(M^s)$$

را داریم. چون $s < d$، بنابر لم ۴.۳.۱ (الف)، داریم

$$\mathrm{H}^{t-1}_{\mathfrak{m}}(M^s/D^s) \cong \mathrm{H}^{t}_{\mathfrak{m}}(M^{s-1}/K^{s-1}). \qquad (۱.۱.۳)$$

سپس رشته دقیق (۳.۲.۱) را به ازای $i = s$ در نظر می گیریم که رشته های دقیق زیر را القاء می کند.

$$\mathrm{H}^{t}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^{s-1}_M) \longrightarrow \mathrm{H}^{t}_{\mathfrak{m}}(M^{s-1}/D^{s-1}) \longrightarrow \mathrm{H}^{t}_{\mathfrak{m}}(M^{s-1}/K^{s-1}) \longrightarrow \mathrm{H}^{t+1}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^{s-1}_M).$$

با انتخاب $t > 0$ در رشته های دقیق بالا داریم

$$\mathrm{H}^{t}_{\mathfrak{m}}(M^{s-1}/D^{s-1}) \cong \mathrm{H}^{t}_{\mathfrak{m}}(M^{s-1}/K^{s-1}). \qquad (۱.۲.۳)$$

به عنوان نتیجه، از (۱.۱.۳) و (۱.۲.۳)، برای هر $t > 0$، به دست می آوریم

$$\mathrm{H}^{t}_{\mathfrak{m}}(M^{s-1}/D^{s-1}) \cong \mathrm{H}^{t-1}_{\mathfrak{m}}(M^s/D^s). \qquad (۱.۳.۳)$$

(الف)⇒ (ب). فرض کنیم $-1 \leq j < i$. با استفاده مکرر از (۱.۳.۳)، داریم

$$\mathrm{H}^{j+1}_{\mathfrak{m}}(M^{-1}/D^{-1}) \cong \mathrm{H}^{0}_{\mathfrak{m}}(M^j/D^j).$$

از رشته دقیق (۳.۱.۱) به ازای $i = j + 1$ داریم $\mathrm{H}^{0}_{\mathfrak{m}}(M^j/K^j) = 0$ (چون $j + 1 \leq i < d$ و لم ۴.۳.۱.) پس رشته دقیق (۳.۲.۱) به ازای $i = j + 1$ نتیجه می دهد $\mathrm{H}^{0}_{\mathfrak{m}}(M^j/D^j) \cong \mathrm{H}^{0}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^j_M) \cong \mathcal{H}^j_M$. بنابراین $\mathrm{H}^{j+1}_{\mathfrak{m}}(M) \cong \mathcal{H}^j_M$.

(ب)⇒ (الف) . واضح است. □

قضیه ۹.۳.۱، نتیجه می دهد که برای هر $i \geq -1$، $\dim \mathcal{H}^i_M \leq d - i - 2$. لم زیر شرایطی برای tامین مدول کوهمولوژی موضعی M، زمانی که $\dim \mathcal{H}^i_M \leq t - i - 1$، به ویژه $\mathrm{H}^{d-1}_{\mathfrak{m}}(M)$، مطرح می کند.

لم ۲.۱.۳. *عدد صحیح $0 \leq t < d$ را در نظر می گیریم. اگر برای هر $i \geq -1$، $\dim \mathcal{H}^i_M \leq t - i - 1$. آنگاه گزاره های زیر بر قرارند.*

(الف) $\mathit{Att}\, \mathrm{H}^{t}_{\mathfrak{m}}(M) \subseteq \bigcup_{i=-1,\ldots,t-1} \mathit{Att}\, \mathrm{H}^{t-i-1}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^i_M)$.

(ب) یک همریختی پوشا به صورت $H^t_{\mathfrak{m}}(M) \twoheadrightarrow H^{\circ}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^{t-1}_M)$ موجود است.

(ب) فرض کنیم $\mathcal{C}_A(M)$ متناهی است. آنگاه $\mathcal{H}^{t-1}_M$ ناصفر است اگر و تنها اگر $\mathfrak{m} \in Att\, H^t_{\mathfrak{m}}(M)$.

برهان. (الف). با استقراء روی j، $-1 \leq j \leq t-1$، ثابت می کنیم

$$\operatorname{Att} \mathrm{H}^t_{\mathfrak{m}}(M) \subseteq \bigcup_{i \geq -1}^{j} \operatorname{Att} \mathrm{H}^{t-i-1}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^i_M) \bigcup \operatorname{Att} \mathrm{H}^{t-j-1}_{\mathfrak{m}}(M^j/K^j). \tag{۱.۴.۳}$$

از آنجا که $\dim \mathcal{H}^i_M \leq t-i-1$، قضیه صفر بودن گروتندیک نتیجه می دهد $\mathrm{H}^{t-i}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^i_M) = 0$. رشته دقیق (۳.۲.۱) به ازای $l = 0$، رشته دقیق $\mathrm{H}^t_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^{-1}_M) \longrightarrow \mathrm{H}^t_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow \mathrm{H}^t_{\mathfrak{m}}(M^{-1}/K^{-1}) \longrightarrow 0$ را نتیجه می دهد. پس داریم

$$\operatorname{Att} \mathrm{H}^t_{\mathfrak{m}}(M) \subseteq \operatorname{Att} \mathrm{H}^t_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^{-1}_M) \bigcup \operatorname{Att} \mathrm{H}^t_{\mathfrak{m}}(M^{-1}/K^{-1}).$$

فرض کنیم $-1 \leq j < t-1$ و (۱.۴.۳) برقرار باشد. ابتدا توجه می کنیم (۳.۱.۱) به ازای $l = j+1$ رشته دقیق

$$\mathrm{H}^{t-j-2}_{\mathfrak{m}}(M^{j+1}) \longrightarrow \mathrm{H}^{t-j-2}_{\mathfrak{m}}(M^{j+1}/D^{j+1}) \longrightarrow \mathrm{H}^{t-j-1}_{\mathfrak{m}}(M^j/K^j) \longrightarrow \mathrm{H}^{t-j-1}_{\mathfrak{m}}(M^{j+1})$$

را نتیجه می دهد. چون $-1 \leq j < t-1$، $\mathrm{H}^{t-j-2}_{\mathfrak{m}}(M^{j+1}) = 0$ بنابر لم ۴.۳.۱، $\mathrm{H}^{t-j-1}_{\mathfrak{m}}(M^{j+1}) = 0$. بنابراین

$$\mathrm{H}^{t-j-2}_{\mathfrak{m}}(M^{j+1}/D^{j+1}) \cong \mathrm{H}^{t-j-1}_{\mathfrak{m}}(M^j/K^j). \tag{۱.۵.۳}$$

از طرف دیگر از رشته دقیق (۳.۲.۱) به ازای $l = j+2$ رشته دقیق

$$\mathrm{H}^{t-j-2}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^{j+1}_M) \longrightarrow \mathrm{H}^{t-j-2}_{\mathfrak{m}}(M^{j+1}/D^{j+1}) \longrightarrow \mathrm{H}^{t-j-2}_{\mathfrak{m}}(M^{j+1}/K^{j+1}) \longrightarrow \mathrm{H}^{t-j-1}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^{j+1}_M) \tag{۱.۶.۳}$$

را به دست می آوریم. از آنجا که $\mathrm{H}^{t-j-1}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^{j+1}_M) = 0$، (۱.۵.۳) با رشته دقیق (۱.۶.۳) نتیجه می دهند

$$\begin{aligned} \operatorname{Att} \mathrm{H}^{t-j-1}_{\mathfrak{m}}(M^j/K^j) &= \operatorname{Att} \mathrm{H}^{t-j-2}_{\mathfrak{m}}(M^{j+1}/D^{j+1}) \\ &\subseteq \operatorname{Att} \mathrm{H}^{t-j-2}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^{j+1}_M) \bigcup \operatorname{Att} \mathrm{H}^{t-j-2}_{\mathfrak{m}}(M^{j+1}/K^{j+1}). \end{aligned} \tag{۱.۷.۳}$$

حال، (۱.۷.۳) و (۱.۴.۳) استدلال استقراء را کامل می کنند. پس داریم

$$\operatorname{Att} \mathrm{H}^t_{\mathfrak{m}}(M) \subseteq \bigcup_{i=-1,0,\cdots,t-1} \operatorname{Att} \mathrm{H}^{t-i-1}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^i_M) \bigcup \operatorname{Att} \mathrm{H}^{\circ}_{\mathfrak{m}}(M^{t-1}/K^{t-1}).$$

از طرف دیگر، با در نظر گرفتن این واقعیت که $\mathrm{H}^{\circ}_{\mathfrak{m}}(M^t) = ۰$، از رشته دقیق (۳.۱.۱) به ازای $l = t$، نتیجه می شود $\mathrm{H}^{\circ}_{\mathfrak{m}}(M^{t-۱}/K^{t-۱}) = ۰$.

(ب). رشته دقیق (۳.۱.۱) را به ازای $l = t - i$ در نظر می گیریم که رشته دقیق

$$\mathrm{H}^{i-۱}_{\mathfrak{m}}(M^{t-i}) \longrightarrow \mathrm{H}^{i-۱}_{\mathfrak{m}}(M^{t-i}/D^{t-i}) \longrightarrow \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M^{t-i-۱}/K^{t-i-۱}) \longrightarrow \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M^{t-i})$$

را نتیجه می دهد. با در نظر گرفتن $۰ \leq i \leq t$ داریم $۰ \leq t-i \leq t < d$ و لذا بنابر لم ۴.۳.۱، $\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M^{t-i}) = ۰ = \mathrm{H}^{i-۱}_{\mathfrak{m}}(M^{t-i})$. بنابراین یکریختی های زیر را داریم.

$$\mathrm{H}^{i-۱}_{\mathfrak{m}}(M^{t-i}/D^{t-i}) \cong \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M^{t-i-۱}/K^{t-i-۱}) \qquad (۱.۸.۳)$$

for all i، $۰ \leq i \leq t$ رشته دقیق (۳.۲.۱)، به ازای $l = t - i$، رشته دقیق

$$\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^{t-i-۱}_{M}) \longrightarrow \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M^{t-i-۱}/D^{t-i-۱}) \longrightarrow \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M^{t-i-۱}/K^{t-i-۱}) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+۱}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^{t-i-۱}_{M})$$

را نتیجه می دهد. از آنجا که، بنابر فرض، $\dim \mathcal{H}^{t-i-۱}_{M} \leq i$، داریم $\mathrm{H}^{i+۱}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^{t-i-۱}_{M}) = ۰$ و لذا همریختی پوشای

$$\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M^{t-i-۱}/D^{t-i-۱}) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M^{t-i-۱}/K^{t-i-۱}) \qquad (۱.۹.۳)$$

به دست می آید. با استفاده از (۱.۹.۳) و (۱.۸.۳) یکریختی پوشای

$$\mathrm{H}^{t}_{\mathfrak{m}}(M^{-۱}/D^{-۱}) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^{\circ}_{\mathfrak{m}}(M^{t-۱}/D^{t-۱}).$$

را داریم. از طرف دیگر ، در انتهای اثبات (الف) دیدیم که ، $\mathrm{H}^{\circ}_{\mathfrak{m}}(M^{t-۱}/K^{t-۱}) = ۰$. بنابراین، از رشته دقیق (۳.۲.۱) به ازای $l = t$، داریم $\mathrm{H}^{\circ}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^{t-۱}_{M}) \cong \mathrm{H}^{\circ}_{\mathfrak{m}}(M^{t-۱}/D^{t-۱})$ که همریختی پوشای

$$\mathrm{H}^{t}_{\mathfrak{m}}(M) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^{\circ}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^{t-۱}_{M}) \qquad (۱.۱۰.۳)$$

را نتیجه می دهد.

(ج). فرض کنیم $\mathcal{H}^{t-۱}_{M} \neq ۰$. از آنجا که، بنابر فرض $\dim \mathcal{H}^{t-۱}_{M} \leq ۰$، داریم $\mathrm{H}^{\circ}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^{t-۱}_{M}) = \mathcal{H}^{t-۱}_{M}$ و لذا $\mathrm{Att}\,\mathrm{H}^{\circ}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^{t-۱}_{M}) = \{\mathfrak{m}\}$. حال (۱.۱۰.۳) نتیجه می دهد $\mathfrak{m} \in \mathrm{Att}\,\mathrm{H}^{t}_{\mathfrak{m}}(M)$.

برعکس، فرض کنیم $\mathfrak{m} \in \mathrm{Att}\,\mathrm{H}^{t}_{\mathfrak{m}}(M)$. بنابر قسمت (الف)، اندیس i، $-۱ \leq i \leq t-۱$، موجود است به طوری که $\mathfrak{m} \in \mathrm{Att}\,\mathrm{H}^{t-i-۱}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^{i}_{M})$، و در نتیجه $\dim \mathcal{H}^{i}_{M} \geq t-i-۱$. از آنجا که $\dim \mathcal{H}^{i}_{M} \leq t-i-۱$ تساوی $\dim \mathcal{H}^{i}_{M} = t-i-۱$ به دست می آید. توجه داریم که $\mathcal{H}^{i}_{M}$ با تولید متناهی است، پس $\mathfrak{m} \in \mathrm{Assh}\,\mathcal{H}^{i}_{M}$ (قضیه ۴.۲.۱را ببینید) که از آن نتیجه می شود $t-i-۱ = ۰$، یعنی $\mathcal{H}^{t-۱}_{M} \neq ۰$. □

می دانیم $\operatorname{Att} \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(M) = \operatorname{Assh} M$ (قضیه ۴.۲.۱). نتیجه زیر اطلاعاتی در مورد $\operatorname{Att} \mathrm{H}^t_{\mathfrak{m}}(M)$ برای اندیس های مشخص t، به ویژه $t = d - 1$، ارائه می دهد.

گزاره ۳.۱.۳. *فرض کنیم $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است و t، $0 \leq t < d$، عدد صحیحی باشد به طوری که برای هر $i \geq -1$، $\dim \mathcal{H}^i_M \leq t - i - 1$. آنگاه*

$$Att\, H^t_{\mathfrak{m}}(M) = \bigcup_{i=-1}^{t-1} \{\mathfrak{p} \in Ass\, \mathcal{H}^i_M : dim\, R/\mathfrak{p} = t - i - 1\}.$$

برهان. فرض کنیم $\mathfrak{p} \in \operatorname{Att} \mathrm{H}^t_{\mathfrak{m}}(M)$. در این صورت نابر لم ۲.۱.۳ (الف)، اندیس i، $-1 \leq i \leq t - 1$، وجود دارد به طوری که $\mathfrak{p} \in \operatorname{Att} \mathrm{H}^{t-i-1}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}^i_M)$. از آنجا که $\dim \mathcal{H}^i_M \leq t - i - 1$، تساوی $\dim \mathcal{H}^i_M = t - i - 1$ و در نتیجه $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} \mathcal{H}^i_M$ و $\dim R/\mathfrak{p} = t - i - 1$ را داریم.

برعکس، فرض کنیم $-1 \leq i_0 \leq t - 1$ و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} \mathcal{H}^{i_0}_M$ به طوری که $\dim R/\mathfrak{p} = t - i_0 - 1$. قرار می دهیم $d' := \dim M_{\mathfrak{p}}$ و $t' := t - \dim R/\mathfrak{p}$. از آنجا که $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است، M یکسان بعد است و $\operatorname{Supp} M$ زنجیره وار است، بنابر گزاره ۲.۲.۲ و نتیجه ۶.۲.۲، داریم $0 \leq t' < d'$. توجه داریم که $\mathcal{C}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \cong (\mathcal{C}_A(M))_{\mathfrak{p}}$ پس برای هر j، $\mathcal{H}^j_{M_{\mathfrak{p}}} \cong (\mathcal{H}^j_M)_{\mathfrak{p}}$ از آنجا که

$$\dim \mathcal{H}^j_{M_{\mathfrak{p}}} \leq \dim \mathcal{H}^j_M - \dim R/\mathfrak{p}$$

برای هر $j \geq -1$، داریم $\dim \mathcal{H}^j_{M_{\mathfrak{p}}} \leq t' - j - 1$. از طرف دیگر $\mathcal{H}^{t'-1}_{M_{\mathfrak{p}}} = (\mathcal{H}^{i_0}_M)_{\mathfrak{p}} \neq 0$. لم ۲.۱.۳ (ج)، با جایگذاری قرار دادن $M_{\mathfrak{p}}$ به جای M، نتیجه می دهد $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att} \mathrm{H}^{t'}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$. در نهایت، قضیه ۶.۲.۱، نتیجه می دهد $\mathfrak{p} \in \operatorname{Att} \mathrm{H}^{t'+\dim A/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{m}}(M)$ پس $\mathfrak{p} \in \operatorname{Att} \mathrm{H}^t_{\mathfrak{m}}(M)$. □

به عنوان نتیجه ای از بحث فوق، رابطه ای بین صفر بودن برخی مدول های کوهمولوژی موضعی مشخص و بعد کوهمولوژی های همبافت کوزین به دست می آوریم.

نتیجه ۴.۱.۳. *فرض کنیم $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است و $l < d$ عددی صحیح است. عبارت های زیر معادلند.*

(الف) برای هر j، $l < j < d$، $H^j_{\mathfrak{m}}(M) = 0$.

(ب) برای هر $i \geq -1$، $dim\, \mathcal{H}^i_M \leq l - i - 1$.

برهان. (الف)$\Longrightarrow$(ب). از استقراء روی l استفاده می کنیم. برای $i = d - 1$، بنابر لم ۴.۳.۱، چیزی برای اثبات نداریم. فرض کنیم $l < d - 1$. بنابر فرض استقرا، برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} \mathcal{H}^i_M$ و هر $i \geq -1$، داریم $\dim R/\mathfrak{p} \leq (l + 1) - i - 1$. اگر برای ایده آل $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} \mathcal{H}^i_M$ و عدد صحیح i، $\dim R/\mathfrak{p} =$

$(l+1) - i - 1$، آنگاه $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} \mathcal{H}_M^i$ و در نتیجه بنابر گزاره ۳.۱.۳، $\operatorname{H}_{\mathfrak{m}}^{l+1}(M) \neq 0$، که با فرض در تناقض است. بنابراین برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} \mathcal{H}_M^i$ و برای هر $i \geq -1$، $\dim R/\mathfrak{p} \neq (l+1) - i - 1$. پس برای $i \geq -1$، $\dim \mathcal{H}_M^i < (l+1) - i - 1$. به عبارت دیگر برای هر $i \geq -1$، $\dim \mathcal{H}_M^i \leq l - i - 1$.

(ب)$\Longrightarrow$(الف). از استقراء معکوس روی l استفاده می کنیم. برای $i = d - 1$ چیزی برای اثبات نداریم. فرض کنیم $l < d - 1$. از آنجا که برای هر $i \geq -1$، $\dim \mathcal{H}_M^i \leq l - i - 1 < (l+1) - i - 1$، بنابر فرض استقرا برای هر j، $l + 1 < j < d$ داریم $\operatorname{H}_{\mathfrak{m}}^j(M) = 0$. علاوه بر این، گزاره ۳.۱.۳ نتیجه می دهد $\operatorname{Att} \operatorname{H}_{\mathfrak{m}}^{l+1}(M)$ یک مجموعه تهی است. پس $\operatorname{H}_{\mathfrak{m}}^{l+1}(M) = 0$. $\square$

به عنوان استنتاج واضحی از نتیجه بالا داریم،

نتیجه ۵.۱.۳. *فرض کنیم M کوهن-مکالی نیست و $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است. قرار می دهیم $s = 1 + \sup\{\dim \mathcal{H}_M^i + i : i \geq -1\}$. آنگاه برای هر i، $s < i < d$، $H_{\mathfrak{m}}^s(M) \neq 0$ و $H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$.*

نتیجه زیر، معیاری برای ناصفر بودن $\operatorname{H}_{\mathfrak{m}}^{d-1}(M)$ زمانی که $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است، ارائه می دهد.

نتیجه ۶.۱.۳. *فرض کنیم $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است. آنگاه*

(الف) $Att\, H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(M) = \bigcup_{i=-1}^{d-2} \{\mathfrak{p} \in Ass\, \mathcal{H}_M^i : dim\, R/\mathfrak{p} = d - i - 2\}$.

(ب) $H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(M) \neq 0$ اگر و تنها اگر عدد صحیح i، $-1 \leq i \leq d - 2$، وجود داشته باشد به طوری که $dim\, \mathcal{H}_M^i = d - i - 2$.

برهان. با توجه به گزاره ۳.۱.۳، واضح است. $\square$

۲.۳ آخرین مدول های کوهمولوژی موضعی

در سراسر این بخش، فرض می کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی است. R را کامل گوییم، زمانی که R نسبت به توپولوژی $\mathfrak{m}$ادیک کامل باشد.

همان طور که قبلاً در قضیه ۴.۲.۱، اشاره شد، $\operatorname{Att} \operatorname{H}_{\mathfrak{m}}^d(M) = \operatorname{Assh} M$. نتیجه زیر توسط دیبایی و یاسمی ثابت شده است.

قضیه ۱.۲.۳. *[۱۲، Theorem A] برای هر ایده آل $\mathfrak{a}$ از R،*

$$Att\, H_{\mathfrak{a}}^d(M) = \{\mathfrak{p} \in Supp\, M \;:\; cd\,(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}) = d\}$$

که در آن $cd\,(\mathfrak{a}, K)$ بعد کوهمولوژیکی R-مدول K نسبت به $\mathfrak{a}$ است که به صورت

$$cd\,(\mathfrak{a}, K) = \sup\{i \in \mathbb{Z} \;:\; H^i_{\mathfrak{a}}(K) \neq \circ\}$$

تعریف می شود.

توجه داریم که اگر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ به طوری که $\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}) = d$، آنگاه $\dim R/\mathfrak{p} = d$. بنابراین $\operatorname{Att} \operatorname{H}^d_{\mathfrak{a}}(M) \subseteq \operatorname{Assh} M$. با توجه به قضیه زیر، تعداد زیر مجموعه های T از $\operatorname{Assh} M$ با این ویژگی که برای ایده آلی مانند $\mathfrak{a}$ از حلقه کامل R، $\operatorname{Att} \operatorname{H}^d_{\mathfrak{a}}(M) = T$، دقیقاً برابر تعداد آخرین مدول های کوهمولوژی موضعی M نسبت به همه ایده آل های $\mathfrak{a}$ از R است.

قضیه ۲.۲.۳. [۱۱، Theorem ۱.۶] *فرض کنیم R کامل است. برای هر دو ایده آل $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ از R، اگر $\operatorname{Att} H^d_{\mathfrak{a}}(M) = \operatorname{Att} H^d_{\mathfrak{b}}(M)$، آنگاه $H^d_{\mathfrak{a}}(M) \cong H^d_{\mathfrak{b}}(M)$.*

حال، سوال زیر طبیعی و جالب به نظر می رسد.

سوال ۳.۲.۳. [۱۰، Question ۲.۹] *آیا برای هر زیرمجموعه T از $\operatorname{Assh} M$، ایده آلی از $\mathfrak{a}$ مانند R وجود دارد به طوری که $\operatorname{Att} H^d_{\mathfrak{a}}(M) = T$؟*

اگر $T = \operatorname{Assh} M$، آنگاه ایده آل ماکسیمال پاسخ سوال فوق است. بنابراین، در سراسر این بخش فرض می کنیم T زیر مجموعه ای ناتهی و سره از $\operatorname{Assh} M$ است.

در حالت خاصی که $d = ۱$، به راحتی می توان به سوال ۳.۲.۳ پاسخ داد.

گزاره ۴.۲.۳. *اگر $\dim M = ۱$، آنگاه برای هر زیرمجوعه T از $\operatorname{Assh} M$، ایده آلی از R مانند $\mathfrak{a}$ موجود است به طوری که $T = \operatorname{Att} H^۱_{\mathfrak{a}}(M)$.*

برهان. قرار می دهیم $\mathfrak{a} := \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Assh} M \setminus T} \mathfrak{p}$. برای هر $\mathfrak{p} \in T$ به طوری که $\mathfrak{a}+\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ و هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Assh} M \setminus T$، $\operatorname{rad}(\mathfrak{a} + \mathfrak{p}) = \mathfrak{m}$. بنابراین، $\operatorname{H}^۱_{\mathfrak{a}}(R/\mathfrak{p}) \neq \circ$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{p} \in T$. □

در نتیجه زیر، محکی برای این که زیر مجموعه دلخواهی از $\operatorname{Assh} M$، برابر مجموعه ایده آل های اول چسبیده به آخرین کوهمولوژی موضعی M نسبت به ایده آلی از R باشد، به دست می آوریم.

گزاره ۵.۲.۳. *فرض می کنیم R کامل است، $d \geq ۱$ و قرار می دهیم $\operatorname{Assh} M \setminus T = \{\mathfrak{q}_۱, \dots, \mathfrak{q}_r\}$. عبارت های زیر معادلند.*

(الف) *ایده آلی از R مانند $\mathfrak{a}$ موجود است به طوری که $\operatorname{Att} H^d_{\mathfrak{a}}(M) = T$.*

(ب) برای هر r $1 \leq i \leq r$، $i,$ ایده آلی مانند $Q_i \in Supp\ M$ موجود است به طوری که $dim\ R/Q_i = 1$ و

$$\bigcap_{\mathfrak{p}\in T}\mathfrak{p} \nsubseteq Q_i \quad and \quad \mathfrak{q}_i \subseteq Q_i.$$

با انتخاب $Q_i,\ 1 \leq i \leq r$، به صورت بالا، $Att\, H^d_{\mathfrak{a}}(M) = T$، که در آن $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$.

برهان. (الف) $\Rightarrow$ (ب). بنابر قضیه ۳.۲.۱، برای $\mathfrak{p} \in T$، $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(R/\mathfrak{p}) \neq 0$، یعنی با توجه به قضیه صفر بودن لیختنبام-هارتشورن (۳.۲.۱)، برای هر $\mathfrak{p} \in T$، $\mathfrak{a} + \mathfrak{p}$ ایده آلی $\mathfrak{m}$-اولیه است. از طرف دیگر، برای $1 \leq i \leq r$، $\mathfrak{q}_i \notin T$ که معادل این است که $\mathfrak{a}+\mathfrak{q}_i$، ایده آل $\mathfrak{m}$-اولیه نیست. پس، ایده آل اول $Q_i \in \mathrm{Supp}\, M$ موجود است به طوری که $\dim R/Q_i = 1$ و $\mathfrak{a} + \mathfrak{q}_i \subseteq Q_i$. لذا داریم $\bigcap_{\mathfrak{p}\in T} \mathfrak{p} \nsubseteq Q_i$.

(ب) $\Rightarrow$ (الف). قرار می دهیم $\mathfrak{a} := \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$. برای هر $1 \leq i \leq r$ ،$i,$، $\mathfrak{a} + \mathfrak{q}_i \subseteq Q_i$، نتیجه می دهد که $\mathfrak{a} + \mathfrak{q}_i$ ایده آل $\mathfrak{m}$-اولیه نیست و لذا $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(R/\mathfrak{q}_i) = 0$. پس بنابر قضیه ۲.۲.۳، $\mathrm{Att}\,\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(M) \subseteq T$. فرض کنیم $\mathfrak{p} \in T$ و $Q \in \mathrm{Supp}\, M$ به طوری که $\mathfrak{a} + \mathfrak{p} \subseteq Q$. در این صورت، عدد صحیحی مانند i، $1 \leq i \leq r$ موجود است به طوری که $Q_i \subseteq Q$. از آنجا که $\mathfrak{p} \nsubseteq Q_i$، $Q_i \neq Q$ پس $Q = \mathfrak{m}$. در نتیجه $\mathfrak{a} + \mathfrak{p}$ ایده آلی $\mathfrak{m}$-اولیه است. حال، بنابر قضیه صفر بودن لیختنبام-هارتشورن (۳.۲.۱) و قضیه ۱.۲.۳، نتیجه می شود که $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}\,\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(M)$. $\square$

نتیجه ۶.۲.۳. *فرض کنیم $H^d_{\mathfrak{a}}(M) \neq 0$ و R کامل است. آنگاه ایده آلی مانند $\mathfrak{b}$ از R موجود است به طوری که $dim\ R/\mathfrak{b} \leq 1$ و $H^d_{\mathfrak{a}}(M) \cong H^d_{\mathfrak{b}}(M)$.*

برهان. اگر $\mathrm{Att}\,\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(M) = \mathrm{Assh}\, M$، آنگاه $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(M) \cong \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(M)$. در غیر این صورت $d \geq 1$ و $\mathrm{Att}\,\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(M)$ زیر مجموعه سره ای از $\mathrm{Assh}\, M$ است. قرار می دهیم $\{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r\} := \mathrm{Assh}\, M \backslash \mathrm{Att}\,\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(M)$. بنابر گزاره ۵.۲.۳، $Q_i \in \mathrm{Supp}\, M$ با $i = 1, \ldots, r$، $\dim R/Q_i = 1,$ موجود است به طوری که

$$\mathrm{Att}\, H^d_{\mathfrak{a}}(M) = \mathrm{Att}\, H^d_{\mathfrak{b}}(M)\ ,\ \mathfrak{b} = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i.$$

حال، بنابر قضیه ۲.۲.۳، داریم $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(M) \cong \mathrm{H}^d_{\mathfrak{b}}(M)$. از آنجا که $\dim R/\mathfrak{b} = 1$، برهان کامل می شود. $\square$

گزاره ۵.۲.۳ روشی مفید برای یافتن مثال هایی از آخرین مدول کوهمولوژی موضعی با مجموعه مشخصی از ایده آل های اول چسبیده، ارائه می دهد.

مثال ۷.۲.۳. *فرض کنیم k یک میدان باشد، $R = k[[X, Y, Z, W]]$ و X, Y, Z, W متغیرهای مستقل باشند. آنگاه R یک حلقه نوتری، موضعی و کامل با ایده آل ماکسیمال $\mathfrak{m} = (X, Y, Z, W)$ است. ایده آل های اول*

$$\mathfrak{p}_۱ = (X, Y) \quad , \quad \mathfrak{p}_۲ = (Z, W) \quad , \quad \mathfrak{p}_۳ = (Y, Z) \quad , \quad \mathfrak{p}_۴ = (X, W)$$

را در نظر گرفته و $M = \frac{R}{\mathfrak{p}_۱\mathfrak{p}_۲\mathfrak{p}_۳\mathfrak{p}_۴}$ را به عنوان R-مدول تعریف می کنیم. حال $Assh\ M = \{\mathfrak{p}_۱, \mathfrak{p}_۲, \mathfrak{p}_۳, \mathfrak{p}_۴\}$ و $dim\ M = ۲$. پس $Att\, H^۲_{\mathfrak{a}_i}(M) = \{\mathfrak{p}_i\}$، به طوری که $\mathfrak{a}_۱ = \mathfrak{p}_۲, \mathfrak{a}_۲ = \mathfrak{p}_۱, \mathfrak{a}_۳ = \mathfrak{p}_۴, \mathfrak{a}_۴ = \mathfrak{p}_۳$، و $\{\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j\} = Att\, H^۲_{\mathfrak{a}_{ij}}(M)$، که در آن

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_{۱۲} &= (Y^۲ + YZ, Z^۲ + YZ, X^۲ + XW, W^۲ + WX),\\
\mathfrak{a}_{۳۴} &= (Z^۲ + ZW, X^۲ + YX, Y^۲ + YX, W^۲ + WZ),\\
\mathfrak{a}_{۱۳} &= (Z^۲ + XZ, W^۲ + WY, X^۲ + XZ),\\
\mathfrak{a}_{۱۴} &= (W^۲ + WY, Z^۲ + ZY, Y^۲ + YW),\\
\mathfrak{a}_{۲۳} &= (X^۲ + XZ, Y^۲ + WY, W^۲ + ZW),\\
\mathfrak{a}_{۲۴} &= (X^۲ + XZ, Y^۲ + WY, Z^۲ + ZW).
\end{aligned}$$

در نهایت، داریم $Att\, H^۲_{\mathfrak{a}_{ijk}}(M) = \{\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j, \mathfrak{p}_k\}$، که در آن،

$$\mathfrak{a}_{۱۲۳} = (X, W, Y + Z), \mathfrak{a}_{۲۳۴} = (X, Y, W + Z), \mathfrak{a}_{۱۳۴} = (Z, W, Y + X).$$

لم ۸.۲.۳. *فرض کنیم R کامل است، $d \geq ۲$، و $\bigcap_{\mathfrak{p}\in T} \mathfrak{p} \nsubseteq \bigcap_{\mathfrak{q}\in Assh\ R/\sum_{\mathfrak{p}\in T'} \mathfrak{p}} \mathfrak{q}$، که در آن $T' = Assh\ M \setminus T$. آنگاه ایده آل اول $Q \in Supp\ M$ موجود است به طوری که $dim\ R/Q = ۱$ و $Att\, H^d_Q(M) = T$.*

برهان. قرار می دهیم $s := \mathrm{ht}_M(\sum_{\mathfrak{p}\in T'} \mathfrak{p})$. داریم $s \leq d - ۱$، زیرا در غیر این صورت $\mathrm{Assh}\,(R/\sum_{\mathfrak{p}\in T'} \mathfrak{p}) = \{\mathfrak{m}\}$ که با شرط $\bigcap_{\mathfrak{p}\in T} \mathfrak{p} \nsubseteq \bigcap_{\mathfrak{q}\in \mathrm{Assh}\,(R/\sum_{\mathfrak{p}\in T'} \mathfrak{p})} \mathfrak{q}$ تناقض دارد.

از آنجا که R زنجیره وار است، $\dim\,(R/\sum_{\mathfrak{p}\in T'} \mathfrak{p}) = n - s$. ابتدا با استقراء روی j، $۰ \leq j \leq d - s - ۱$، نشان می دهیم زنجیری از ایده آل های اول به صورت

$$Q_۰ \subset Q_۱ \subset \cdots \subset Q_j \subset \mathfrak{m},$$

موجود است به طوری که $Q_۰ \in \mathrm{Assh}\,(R/\sum_{\mathfrak{p}\in T'} \mathfrak{p})$، $\dim R/Q_j = d - s - j$ و $\bigcap_{\mathfrak{p}\in T} \mathfrak{p} \nsubseteq Q_j$.

ایده آل اول $Q_۰ \in \mathrm{Assh}\,(R/\sum_{\mathfrak{p}\in T'} \mathfrak{p})$ وجود دارد به طوری که $\bigcap_{\mathfrak{p}\in T} \mathfrak{p} \nsubseteq Q_۰$. توجه داریم

$$\dim R/Q_۰ = \dim\,(R/\sum_{\mathfrak{p}\in T'} \mathfrak{p}) = d - s.$$

حال، فرض کنیم $۰ < j \leq d - s - ۱$ و زنجیر $Q_۰ \subset Q_۱ \subset \cdots \subset Q_{j-۱}$ از ایده آل های اول موجود است به طوری که $Q_۰ \in \mathrm{Assh}\,(R/\sum_{\mathfrak{p}\in T'} \mathfrak{p})$، $\dim R/Q_j = d - s - (j - ۱)$ و $\bigcap_{\mathfrak{p}\in T} \mathfrak{p} \nsubseteq Q_{j-۱}$.

از آنجا که $d-s-(j-۱)=d-s+۱-j\geq ۲$، مجموعه V که به صورت

$$V=\{\mathfrak{q}\in \operatorname{Supp} M| \quad Q_{j-۱}\subset \mathfrak{q}\subset \mathfrak{q}'\subseteq \mathfrak{m}, \dim R/\mathfrak{q}=d-s-j,$$
$$\mathfrak{q}'\in \operatorname{Spec} R \text{ و } \dim R/\mathfrak{q}'=d-s-j-۱\}$$

تعریف می شود، ناتهی است و لذا، بنابر قضیه وجودی ضعیف راتلیف[1] [Theorem ۳۱.۲ ،۲۴]، متناهی نیست. از آنجا که $\bigcap_{\mathfrak{p}\in T}\mathfrak{p}\nsubseteq Q_{j-۱}$، داریم $Q_{j-۱}\subset Q_{j-۱}+\bigcap_{\mathfrak{p}\in T}\mathfrak{p}$. اگر، برای $\mathfrak{q}\in V$، $\bigcap_{\mathfrak{p}\in T}\mathfrak{p}\subseteq \mathfrak{q}$، آنگاه $\mathfrak{q}$ یک ایده آل اول مینیمال از $Q_{j-۱}+\bigcap_{\mathfrak{p}\in T}\mathfrak{p}$. چون V یک مجموعه ناتهی است، پس $Q_j\in V$ وجود دارد به طوری که $\bigcap_{\mathfrak{p}\in T}\mathfrak{p}\nsubseteq Q_j$. در نتیجه استقراء کامل است. حال، با در نظر گرفتن $Q:=Q_{d-s-۱}$ و گزاره ۵.۲.۳، حکم ثابت می شود. □

نتیجه ۹.۲.۳ . *فرض کنیم R کامل است و $|T|=|Assh\ M|-۱$. آنگاه ایده آل $\mathfrak{a}$ از R* ***وجود دارد به طوری*** *که $Att\, H^d_{\mathfrak{a}}(M)=T$.*

برهان. توجه داریم که $\operatorname{Assh} M\setminus T$ یک مجموعه تک عضوی، مانند $\{\mathfrak{q}\}$، پس $\operatorname{ht}_M\mathfrak{q}=۰$ و $\bigcap_{\mathfrak{p}\in T}\mathfrak{p}\nsubseteq\mathfrak{q}$. بنابراین حکم از لم ۸.۲.۳ نتیجه می شود. □

لم ۱۰.۲.۳ . *فرض کنیم $\mathfrak{a}_۱$ و $\mathfrak{a}_۲$ ایده آل هایی از حلقه کامل R باشند. آنگاه ایده آل $\mathfrak{b}$ از R* ***وجود دارد به*** *طوری که $Att\, H^d_{\mathfrak{b}}(M)=Att\, H^d_{\mathfrak{a}_۱}(M)\cap Att\, H^d_{\mathfrak{a}_۲}(M)$.*

برهان. قرار می دهیم $T_۱=Att\,\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}_۱}(M)$ و $T_۲=\operatorname{Att}\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}_۲}(M)$. می توانیم فرض کنیم $T_۱\bigcap T_۲$ زیر مجموعه ناتهی از $\operatorname{Assh} M$ است. فرض کنیم $\mathfrak{q}\in \operatorname{Assh} M\setminus(T_۱\bigcap T_۲)=(\operatorname{Assh} M\setminus T_۱)\bigcup(\operatorname{Assh} M\setminus T_۲)$. بنابر گزاره ۵.۲.۳، $Q\in\operatorname{Supp} M$ وجود دارد به طوری که $\dim R/Q=۱$، $\mathfrak{q}\subseteq Q$ و $\bigcap_{\mathfrak{p}\in T_۱\bigcap T_۲}\mathfrak{p}\nsubseteq Q$.

حال، دوباره، بنابر گزاره ۵.۲.۳، ایده آل $\mathfrak{b}$ از R موجود است به طوری که $\operatorname{Att}\mathrm{H}^d_{\mathfrak{b}}(M)=T_۱\bigcap T_۲$. □

حال، نتیجه اصلی این بخش را مطرح می کنیم.

قضیه ۱۱.۲.۳ . *فرض کنیم R کامل است و $T\subseteq Assh\ M$، آنگاه ایده آلی مانند $\mathfrak{a}$ از R* ***وجود دارد به طوری*** *که $T=Att\, H^d_{\mathfrak{a}}(M)$.*

[1] Ratliff's weak existence theorem

برهان. بنابر نتیجه ۴.۲.۳، می توانیم فرض کنیم $\dim M \geq ۲$ و T زیر مجموعه ای ناتهی و سره از $\operatorname{Assh} M$ است. قرار می دهیم $T = \{\mathfrak{p}_۱, \dots, \mathfrak{p}_t\}$ و $\operatorname{Assh} M \setminus T = \{\mathfrak{p}_{t+۱}, \dots, \mathfrak{p}_{t+r}\}$. با استفاده از استقراء روی r حکم را ثابت می کنیم. برای $r = ۱$، نتیجه ۹.۲.۳، گام اول استقراء را ثابت می کند. فرض می کنیم $r > ۱$ و حالت $r - ۱$ ثابت شده است. قرار می دهیم $T_۱ = \{\mathfrak{p}_۱, \dots, \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_{t+۱}\}$ و $T_۲ = \{\mathfrak{p}_۱, \dots, \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_{t+۲}\}$. بنابر فرض استقراء، ایده آل های $\mathfrak{a}_۱$ و $\mathfrak{a}_۲$ از R وجود دارند به طوری که $T_۱ = \operatorname{Att} \operatorname{H}^d_{\mathfrak{a}_۱}(M)$ و $T_۲ = \operatorname{Att} \operatorname{H}^d_{\mathfrak{a}_۲}(M)$. حال، بنابر لم ۱۰.۲.۳، ایده آل $\mathfrak{a}$ از R وجود دارد به طوری که $T = T_۱ \bigcap T_۲ = \operatorname{Att} \operatorname{H}^d_{\mathfrak{a}}(M)$. □

نتیجه ۱۲.۲.۳ . *([Corollary ۱.۷ ،۳] را ببینید) فرض کنیم R کامل است. آنگاه تعداد آخرین مدول های کوهمولوژی موضعی غیر یکریخت M، نسبت به همه ایده آل های R، برابر است با $۲^{|Assh\ M|}$.*

برهان. از قضیه ۱۱.۲.۳ و قضیه ۲.۲.۳ نتیجه می شود. □

۳.۳ کاربردهایی در مدول های کوهن-مکالی تعمیم یافته

در این بخش، برخی ویژگی های مدول های کوهن-مکالی تعمیم یافته را برحسب ایده آل های اول مشخصی از حلقه، مانند $\mathfrak{p}$، که $R/\mathfrak{p}$ دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است، بیان می کنیم و مشخص سازی جدیدی برای این رده از مدول ها ارائه می دهیم.

لم ۱.۳.۳ . *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه موضعی و کوهن-مکالی تعمیم یافته باشد. آنگاه برای هر $\mathfrak{p} \in Spec\ R$، $R/\mathfrak{p}$ دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است. به ویژه، هر R-مدول یکسان بعد مانند M، پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد.*

برهان. اگر $\dim R = ۰$، آنگاه چیزی برای اثبات نداریم. پس فرض می کنیم $\dim R > ۰$ و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ به طوری که $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = ۰$. از آنجا که R کوهن-مکالی تعمیم یافته است و $\mathfrak{m} \nsubseteq \cup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} R} \mathfrak{p}$، R پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد و در نتیجه بنابر قضیه ۱.۲.۲، $R/\mathfrak{p}$ پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد. فرض کنیم $\operatorname{ht}_M \mathfrak{p} = t > ۰$. زیر مجموعه ای از دستگاه پارامتری R مانند $x_۱, \dots, x_t$ در $\mathfrak{p}$ وجود دارد. بنابر قضیه ۱۶.۲.۱ (ج)، $R/(x_۱, \dots, x_t)$ کوهن-مکالی تعمیم یافته است و لذا پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد. به ویژه ، بنابر قضیه ۱.۲.۲ ، $R/\mathfrak{p}$ دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است. قسمت نهایی، به راحتی از قسمت اول و گزاره ۴.۲.۲ به دست می آید. □

عکس قضیه فوق در حالت کلی درست نیست، اما در حالت خاصی که برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M \setminus \{\mathfrak{m}\}$، $M_{\mathfrak{p}}$ یک $R_{\mathfrak{p}}$-مدول کوهن-مکالی است، عکس قضیه برقرار است. برای اثبات، به لم ساده زیر نیاز داریم.

لم ۲.۳.۳. *فرض کنیم R حلقه نوتری و موضعی است. آنگاه*

(الف) *اگر $\mathfrak{Q} \in Min\ \widehat{M}$، آنگاه $\mathfrak{Q} \in Min\ \widehat{A}/\mathfrak{Q}^{ce}$.*

(ب) *اگر R زنجیره وار جهانی باشد و M یکسان بعد باشد، آنگاه $\widehat{M}$ یک $\widehat{R}$-مدول یکسان بعد است.*

برهان. (الف). از قضیه نزول نتیجه می شود که $\mathfrak{Q}^c \in \operatorname{Min} M$. فرض کنیم $\mathfrak{Q}' \in \operatorname{Min} \widehat{R}/\mathfrak{Q}^{ce}$ به طوری که $\mathfrak{Q}' \subseteq \mathfrak{Q}$. رشته دقیق $M \longrightarrow R/\mathfrak{Q}^c \longrightarrow 0$، رشته دقیق $\widehat{M} \longrightarrow \widehat{R}/\mathfrak{Q}^{ce} \longrightarrow 0$ را نتیجه می دهد. بنابراین $\mathfrak{Q}' \in \operatorname{Ass} \widehat{M}$ و لذا $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}$.

(ب). فرض کنیم $\mathfrak{Q} \in \operatorname{Min} \widehat{M}$. بنابر قضیه نزول، $\mathfrak{Q}^c \in \operatorname{Min} M$ که از آن نتیجه می شود $\dim \widehat{A}/\mathfrak{Q}^{ce} = \dim R/\mathfrak{Q}^c = \dim M$. از آنجا که، بنابر قسمت (الف)، $\mathfrak{Q} \in \operatorname{Min} \widehat{R}/\mathfrak{Q}^{ce}$ و با استفاده از این واقعیت که $R/\mathfrak{Q}^c$ یکسان بعد رسمی است، داریم $\dim \widehat{R}/\mathfrak{Q} = \dim \widehat{R}/\mathfrak{Q}^{ce}$ که نتیجه می دهد $\dim \widehat{R}/\mathfrak{Q} = \dim M$. □

لم ۳.۳.۳. *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه موضعی باشد به طوری که برای هر $\mathfrak{p} \in Spec\ R$، $R/\mathfrak{p}$ دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است. آنگاه عبارت های زیر معادلند.*

(الف) *M یک R-مدول یکسان بعد است و برای هر $\mathfrak{p} \in Supp\ M \setminus \{\mathfrak{m}\}$، $M_{\mathfrak{p}}$ یک $R_{\mathfrak{p}}$-مدول کوهن-مکالی است.*

(ب) *M کوهن-مکالی تعمیم یافته است.*

برهان. (الف)$\Rightarrow$(ب). از آنجا که برای $i > 0$، $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M/\Gamma_{\mathfrak{m}}(M))$، می توانیم فرض کنیم $\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ و لذا $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass} M$. از طرفی، برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$، $M_{\mathfrak{p}}$ کوهن-مکالی است، پس $\operatorname{Ass} M = \operatorname{Min} M$. در نتیجه بنابر لم ۱۱.۳.۱، $\mathcal{H}^{-1}_M = 0$. از آنجا که M یکسان بعد است و برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} M$، $R/\mathfrak{p}$ پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد، بنابر گزاره ۴.۲.۲، M دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است. در نتیجه بنابر نتیجه ۶.۲.۲، $R/(0 :_R M)$ زنجیره وار جهانی است. حال، اگر M را به عنوان $R/0 :_R M$-مدول در نظر بگیریم، لم ۲.۳.۳ نتیجه می دهد $\widehat{M}$ یکسان بعد است. پس بنابر نتیجه ۶.۱.۲، $\mathcal{C}_{\widehat{R}}(\widehat{M})$ متناهی است. اکنون، گزاره زا با استفاده از استقراء روی $d = \dim M$ ثابت می کنیم. برای $d = 2$، بنابر نتیجه ۶.۱.۳، داریم

$$\operatorname{Att} \mathrm{H}^1_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{M}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} \mathcal{H}^{-1}_{\widehat{M}} : \operatorname{ht}_{\widehat{M}}(\mathfrak{p}) = 1\} \cup \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} \mathcal{H}^{0}_{\widehat{M}} : \operatorname{ht}_{\widehat{M}}(\mathfrak{p}) = 2\}.$$

اگر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} \mathcal{H}^{-1}_{\widehat{M}}$ و $\operatorname{ht}_{\widehat{M}}(\mathfrak{p}) = 1$، آنگاه $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} \widehat{M}$ و لذا $\mathfrak{p}^c \in \operatorname{Ass} M = \operatorname{Min} M$. از طرف دیگر، چون $\mathfrak{p} \in \operatorname{Att} \mathrm{H}^1_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{M})$، بنابر قضیه ۲.۱.۱، $\mathfrak{p}^c \in \operatorname{Att} \mathrm{H}^1_{\mathfrak{m}}(M)$ که با لم ۷.۲.۲ در تناقض است. پس

$\operatorname{Att}\mathrm{H}^{1}_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{M}) \subseteq \{\widehat{\mathfrak{m}}\}$. حال، بنابر نتیجه ۱.۱.۱ (الف)، $\mathrm{H}^{1}_{\mathfrak{m}}(M)\otimes_R \widehat{R}$ یک $\widehat{R}$-مدول با تولید متناهی است و این گام اول استقراء را ثابت می کند.

حال فرض می کنیم $d > 2$ و حکم در حالت $d-1$ ثابت شده است. فرض کنیم x یک پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی M باشد. از آنجا که $\operatorname{Min} M = \operatorname{Ass} M$، x روی M غیر مقسوم علیه صفر است. از طرف دیگر، چون M :$_R$ $R/0$ زنجیره وار است، به راحتی دیده می شود که M/xM در فرض استقراء برای $d-1$ صدق می کند. بنابراین، برای هر $i < d-1$، $\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M/xM)$ با تولید متناهی است. رشته دقیق $0 \longrightarrow M \xrightarrow{x} M \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0$، رشته دقیق طولانی

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M) \xrightarrow{x.} \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M/xM) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M) \xrightarrow{x.} \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow \cdots$$

را نتیجه می دهد. از آنجا که برای $j < d$، $x\mathrm{H}^{j}_{\mathfrak{m}}(M) = 0$، برای $i = 0, \ldots, d-2$، رشته دقیق

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M/xM) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow 0$$

به دست می آید و حکم نتیجه می شود.

(ب)⇒(لفا) با توجه به قضیه ۱۶.۲.۱ (الف) واضح است. □

حال می توانیم محکی برای کوهن-مکالی تعمیم یافته بودن یک حلقه یکسان بعد، بر حسب پوچسازهای یکنواخت کوهمولوژی موضعی، ارائه دهیم.

نتیجه ۴.۳.۳. *فرض کنیم R یک حلقه نوتری و موضعی یکسان بعد باشد. عبارت های زیر معادلند.*

(الف) R کوهن-مکالی تعمیم یافته است.

(ب) برای هر $\mathfrak{p} \in Spec\, R\setminus\{\mathfrak{m}\}$، $R_{\mathfrak{p}}$ یک حلقه کوهن-مکالی است و $R/\mathfrak{p}$ پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد.

برهان. (الف)⇒(ب). با توجه به قضیه ۱۶.۲.۱ (الف)، می دانیم برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \setminus \{\mathfrak{m}\}$، $R_{\mathfrak{p}}$ یک کوهن-مکالی است. ادامه حکم نیز از لم ۱.۳.۳ نتیجه می شود.

(ب)⇒(الف) با توجه به لم ۳.۳.۳ به دست می آید. □

ملاحظه زیر را جهت کامل شدن بحث و ارجاع های بعدی، بیان می کنیم.

ملاحظه ۵.۳.۳. *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه موضعی است.*

(الف) یک R-مدول با تولید متناهی M، کوهن-مکالی تعمیم یافته است اگر و تنها اگر کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ با طول متناهی باشند.

(ب) یک R- مدول با تولید متناهی M، شبه- باکسبام است اگر وتنها اگر $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی باشد و برای هر i، $\mathfrak{m}\mathcal{H}^i_M = \circ$.

برهان. (الف) . فرض کنیم M کوهن-مکالی تعمیم یافته است. بنابر قضیه ۱۶.۲.۱ (الف)، برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M \setminus \{\mathfrak{m}\}$، $M_\mathfrak{p}$ کوهن-مکالی است. پس $\operatorname{Supp} \mathcal{H}^i_M \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ و حکم از لم ۳.۳.۳، نتیجه می شود. عکس مطلب از لم ۳.۳.۳ به دست می آید.

(ب). مشابه (الف) ثابت می شود. $\square$

فصل ۴

مکان هندسی کوهن-مکالی مدول ها

در سراسر این فصل M یک R-مدول با تولید متناهی است. در حالتی که $(R,\mathfrak{m})$ حلقه موضعی باشد، $\widehat{M}$ نشان دهنده تکمیل M نسبت به $\mathfrak{m}$ است. موضوع اصلی این فصل مطالعه مکان هندسی کوهن-مکالی یک مدول می باشد. نشان می دهیم این مکان هندسی، در حالت های مشخصی، زیر مجموعه بازی از $\operatorname{Spec} R$ ، نسبت به توپولوژی زاریسکی، است. نتایج این فصل به کوهن-مکالی بودن تارهای رسمی روی ایده آل های اول مشخصی نیز مرتبط هستند.

۱.۴ باز بودن مکان هندسی کوهن-مکالی

مکان هندسی کوهن-مکالی مدول M، به صورت

$$\mathrm{CM}(M) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : \text{است} \text{ مدول کوهن-مکالی } - R_{\mathfrak{p}} \text{ به عنوان } M_{\mathfrak{p}}\}$$

تعریف می شود. قرار می دهیم $\text{non-CM}(M) = \operatorname{Spec} R \setminus \mathrm{CM}(M)$. به وضوح، مکان هندسی کوهن-مکالی یک مدول کوهن-مکالی برابر $\operatorname{Spec} R$ و برای یک مدول کوهن-مکالی تعمیم یافته M روی حلقه موضعی $(R,\mathfrak{m})$، بنابر قضیه ۱۶.۲.۱ (الف)، شامل $\operatorname{Spec} R \setminus \{\mathfrak{m}\}$ است. در این حالت ها، $\mathrm{CM}(M)$ زیر مجموعه های بازی از $\operatorname{Spec} R$ هستند. هدف این بخش، مطالعه مکان هندسی کوهن-مکالی M و مشخص کردن این است که چه زمانی زیر مجموعه بازی از $\operatorname{Spec} R$، تحت توپولوژی زاریسکی، است. ابتدا به ملاحظه زیر، جهت استفاده های بعدی، اشاره می کنیم.

ملاحظه ۱.۱.۴ . *برای یک R-مدول با بعد متناهی M ، اگر همبافت کوزین M متناهی باشد، آنگاه*

$$\textit{non-CM}(M) = V(\prod_i (\circ :_R \mathcal{H}^i_M)).$$

پس $CM(M)$ باز است.

برهان. با توجه به قضیه ۷.۳.۱ و قضیه ۶.۳.۱، واضح است که

$$\mathrm{CM}(M) = \mathrm{Spec}\,(R) \setminus \bigcup_{i\geq -1} \mathrm{Supp}\,_R(\mathcal{H}^i_M).$$

□

همان طور که در نتیجه ۶.۱.۲ دیدیم، همبافت کوزین هر مدول یکسان بعد، روی حلقه موضعی کامل، متناهی است. پس طبیعی است که بپرسیم روی چه حلقه هایی باز بودن مکان هندسی کوهن-مکالی، از تکمیل حلقه به ارث می رسد. به عنوان یک مثال از چنین حلقه هایی، می توان حلقه های با تارهای رسمی کوهن-مکالی را در نظر گرفت. برای اثبات این ادعا، ابتدا فرمول متداول بعد و عمق را یاد آوری می کنیم.

لم ۲.۱.۴. *[۱۴، Chapitre IV ، (۶.۱.۲)، (۶.۱.۳)،(۶.۳.۳)] فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ و $(S,\mathfrak{n})$ حلقه هایی موضعی، $f : R \longrightarrow S$ و $k = R/\mathfrak{m}$ یک همومورفیسم موضعی یکدست باشد. برای R-مدول با تولید متناهی M، $M \otimes_R S$ یک S-مدول با تولید متناهی است و گزاره های زیر برقرارند.*

(الف) $dim\ M \otimes_R S = dim\ M + dim\ S \otimes_R k$؛

(ب) $depth\ M \otimes_R S = depth\ M + depth\ S \otimes_R k$؛

(ج) $M \otimes_R S$ یک S- مدول کوهن- مکالی است اگر و تنها اگر M یک R- مدول کوهن- مکالی و $S \otimes_R k$ یک حلقه کوهن- مکالی باشد.

به عنوان نتیجه ای واضح از لم بالا، نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۳.۱.۴. *فرض کنیم $\mathfrak{P} \in Supp\ \widehat{M}$ و $\mathfrak{p} = R \cap \mathfrak{P}$. اگر تار رسمی $\widehat{R} \otimes_R k(\mathfrak{p})$ روی $\mathfrak{p}$ کوهن- مکالی باشد، آنگاه $M_{\mathfrak{p}}$ کوهن- مکالی است اگر و تنها اگر $\widehat{M}_{\mathfrak{P}}$ کوهن- مکالی باشد.*

برهان. با توجه به این که همومورفیسم طبیعی موضعی $R_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \widehat{R}_{\mathfrak{P}}$ یکدست است، حکم از لم بالا نتیجه می شود. □

حال، به راحتی می توان دید که خاصیت باز بودن مکان هندسی کوهن-مکالی، اگر همه تارهای رسمی کوهن-مکالی باشد، از حلقه تکمیل، به ارث می رسد.

نتیجه ۴.۱.۴. *فرض کنیم همه تارهای رسمی R کوهن- مکالی هستند. اگر مکان هندسی کوهن- مکالی $\widehat{M}$ زیر مجموعه باز $Spec\ \widehat{R}$، تحت توپولوژی زاریسکی باشد، آنگاه مکان هندسی کوهن- مکالی M نیز یک زیر مجموعه باز $Spec\ R$ تحت توپولوژی زاریسکی است.*

برهان. به طور معادل، نشان می دهیم $\mathrm{Min}\,(\text{non-CM}(M))$ یک مجموعه متناهی است. ایده آل اول $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}\,(\text{non-CM}(M))$ را انتخاب کرده و فرض می کنیم $\mathfrak{Q}$ عضو مینیمال مجموعه ناتهی

$$\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Supp}\,\widehat{M} : \mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}\}$$

باشد. از آنجا که تار رسمی R روی $\mathfrak{p}$ کوهن-مکالی است، بنابر نتیجه ۳.۱.۴، $\widehat{M}_{\mathfrak{Q}}$ کوهن-مکالی نیست. از طرف دیگر، برای هر $\mathfrak{q} \in \mathrm{Supp}\,\widehat{M}$ که $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{Q}$، داریم $\mathfrak{q} \cap R \subset \mathfrak{p}$ و لذا بنابر نتیجه ۳.۱.۴، $\widehat{M}_{\mathfrak{q}}$ کوهن-مکالی است. پس، $\mathfrak{Q} \in \mathrm{Min}\,(\text{non-CM}(\widehat{M}))$ که مجموعه ای متناهی است. □

لم زیر نشان می دهد که مکان هندسی کوهن-مکالی M، باز است اگر این مطلب برای زیر مدول های مشخصی از M برقرار باشد.

لم ۵.۱.۴. *فرض کنیم S خانواده همه زیرمجموعه های T از $\mathit{Min}\ M$ باشد که عضوی مانند $\mathfrak{q} \in \mathit{Supp}\ M$ موجود است به طوری که برای هر $\mathfrak{p} \in T$، $ht(\mathfrak{q}/\mathfrak{p})$ مقداری ثابت است. برای هر $T \in S$، زیر مدول M^T از M را نظیر می کنیم به طوری که $\mathit{Ass}\ M^T = T$ و $\mathit{Ass}\ M/M^T = \mathit{Ass}\ M \setminus T$. آنگاه*

$$\mathit{CM}(M) = \bigcup_{T \in S} (\mathit{CM}(M^T) \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathit{Ass}\ M \setminus T} V(\mathfrak{p})).$$

برهان. برای هر $T \in S$، زیر مدولی ار M مانند M^T موجود است به طوری که $\mathrm{Ass}\,M^T = T$ و $\mathrm{Ass}\,M/M^T = \mathrm{Ass}\,M \setminus T$ ([۱، صفحه ۲۶۳، Proposition ۴]). واضح است که

$$\mathrm{Supp}\,M/M^T = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,M \setminus T} \mathrm{V}(\mathfrak{p}).$$

فرض می کنیم $\mathfrak{q} \in \mathrm{CM}(M)$ و قرار دهیم $T' := \{\mathfrak{P} \cap A : \mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}\,M_{\mathfrak{q}}\}$. از آن جا که $M_{\mathfrak{q}}$ کوهن-مکالی است، برای هر $\mathfrak{p} \in T'$، $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) = \dim M_{\mathfrak{q}}$ و لذا $T' \in S$. ادعا می کنیم $\mathfrak{q} \notin \mathrm{Supp}\,M/M^{T'}$. به برهان خلف، فرض می کنیم $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,M/M^{T'}$ موجود است به طوری که $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$. پس $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}} \in \mathrm{Ass}\,M_{\mathfrak{q}}$ که نتیجه می دهد $\mathfrak{p} \in T'$ و با این واقعیت که $\mathrm{Ass}\,M/M^{T'} = \mathrm{Ass}\,M \setminus T'$، در تناقض است. بنابراین، با توجه به رشته دقیق

$$0 \longrightarrow M^{T'} \longrightarrow M \longrightarrow M/M^{T'} \longrightarrow 0 \qquad (۱.۱.۴)$$

داریم $(M^{T'})_{\mathfrak{q}} \cong M_{\mathfrak{q}}$ و لذا $\mathfrak{q} \in \mathrm{CM}(M^{T'})$.

برعکس، فرض کنیم $T \in S$ و $\mathfrak{q} \in \mathrm{CM}(M^T) \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,M \setminus T} \mathrm{V}(\mathfrak{p})$. یعنی $(M^T)_{\mathfrak{q}}$ کوهن-مکالی است و $\mathfrak{q} \notin \mathrm{Supp}\,M/M^T$. بنابراین، با توجه به (۱.۱.۴)، با جایگذاری T به وسیله T'، $M_{\mathfrak{q}}$ کوهن-مکالی است. □

اگر M :$_R$ $R/0$ زنجیره وار باشد، آنگاه هر مدول M^T، در لم بالا، یک R-مدول یکسان بعد است. بنابراین،

ملاحظه ۶.۱.۴. *اگر R زنجیره وار باشد و برای هر زیرمدول یکسان بعد N از M، $CM(N)$ باز باشد، آنگاه $CM(M)$ باز است.*

حال، به راحتی می توان دید که روی یک حلقه موضعی R که همه تارهای رسمی آن کوهن- مکالی هستند، مکان هندسی هر R- مدول با تولید متناهی باز است.

ملاحظه ۷.۱.۴. *فرض کنیم همه تارهای رسمی R کوهن- مکالی باشند. آنگاه مکان هندسی کوهن- مکالی M یک زیر محموعه باز از $Spec\, R$، تحت توپولوژی زاریسکی، است.*

برهان. *بنابر نتیجه ۴.۱.۴ ، کافی است نشان دهیم $CM(\widehat{M})$ زیر مجموعه باز $Spec\, \widehat{R}$، تحت توپولوژی زاریسکی است.*

از آنجا که $\widehat{R}$ زنجیره وار است، با توجه به ملاحظه ۶.۱.۴ ، می توان فرض کرد $\widehat{M}$ یکسان بعد است. در نهایت، نتیجه ۶.۱.۲، نشان می دهد $\mathcal{C}_{\widehat{A}}(\widehat{M})$ متناهی است، پس با توجه به ملاحظه ۱.۱.۴ ، $CM(\widehat{M})$ باز است. $\square$

حال می توانیم نشان دهیم، هر عضو مینیمال از $\mathrm{non\text{-}CM}(M)$ یا ایده آل اول چسبیده به $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)$، برای برخی اندیس های i، است و یا $R_{\mathfrak{p}}$ حلقه کوهن-مکالی نیست.

قضیه ۸.۱.۴. *فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ حلقه زنجیره وار موضعی و M یک R- مدول یکسان بعد است. آنگاه*

$$Min\, (non\text{-}CM(M)) \subseteq \bigcup_{0\leq i\leq dim\, M} Att\, H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cup non\text{-}CM(R).$$

برهان. فرض کنیم $\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}\,(\mathrm{non\text{-}CM}(M))$. از آنجا که R زنجیره وار و M یکسان بعد است، $M_{\mathfrak{p}}$ نیز یک $R_{\mathfrak{p}}$-مدول یکسان بعد است. فرض کنیم $R_{\mathfrak{p}}$ حلقه کوهن-مکالی باشد. برای هر $\mathfrak{q}\in \mathrm{Spec}\, R$ با این خاصیت که $\mathfrak{q}\subseteq\mathfrak{p}$ ، بنابر گزاره ۲.۳.۲، $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}$ پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد. بنابراین، لم ۳.۳.۳، نتیجه می دهد که $M_{\mathfrak{p}}$ یک $R_{\mathfrak{p}}$-مدول کوهن-مکالی تعمیم یافته است. از آنجا که $M_{\mathfrak{p}}$ کوهن-مکالی نیست، عدد صحیح i، $i<\dim M_{\mathfrak{p}}$ موجود است که $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\neq 0$. به ویژه $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ یک $R_{\mathfrak{p}}$-مدول ناصفر و با طول متناهی است. پس $\mathrm{Att}\,\mathrm{H}^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})=\{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}\}$. حال، بنابر قضیه ۷.۲.۱، برای $t=\dim\,(A/\mathfrak{p})$، داریم $\mathfrak{p}\in \mathrm{Att}\,\mathrm{H}^{i+t}_{\mathfrak{m}}(M)$ و حکم ثابت می شود. $\square$

نتیجه ۹.۱.۴. *فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ زنجیره وار موضعی و $non\text{-}CM(R)$ یک مجموعه متناهی باشد. آنگاه مکان هندسی کوهن- مکالی M باز است.*

برهان. با توجه به لم ۵.۱.۴، می توان فرض کرد M یکسان بعد است. حال، قضیه ۸.۱.۴، نتیجه می دهد که $\mathrm{Min}\,(\text{non-CM}(M))$ یک مجموعه متناهی است. به عبارت دیگر $\text{non-CM}(M)$ زیر مجموعه بسته $\mathrm{Spec}\,R$، تحت توپولوژی زاریسکی است. □

مثال ۱۰.۱.۴. *فرض کنیم R در شرط (S_{d-2}) صدق می کند، $d := dim\ R$، و $\mathcal{C}_R(R)$ متناهی است. آنگاه بنابر قضیه ۸.۳.۱ و لم ۱۱.۳.۱ (الف)، برای $i \leq d-4$ و $i \geq d-1$، $\mathcal{H}^i_R = 0$. حال، با توجه به قضیه ۹.۳.۱(ب)، $dim\ \mathcal{H}^{d-3}_R \leq 1$ و $dim\ {}^{d-2}_R \leq 0$. پس، $non\text{-}CM(R) = Supp\ \mathcal{H}^{d-2}_R \cup Supp\ \mathcal{H}^{d-1}_R$ یک مجموعه متناهی است.*

با توجه به ملاحظه ۷.۱.۴، اگر تارهای رسمی حلقه موضعی R، کوهن-مکالی باشند، آنگاه مکان هندسی کوهن-مکالی هر R-مدول با تولید متناهی باز است و در نتیجه ۹.۱.۴، دیدیم که اگر R زنجیره وار و موضعی باشد به طوری که $\text{non-}CM(R)$ یک مجموعه متناهی است، همان گزاره برقرار است. مثالهای زیر نشان می دهند که این دو رده از حلقه ها متمایز هستند.

مثال ۱۱.۱.۴ حلقه موضعی S را معرفی می کند به طوری که همه تارهای رسمی آن کوهن-مکالی هستند و مجموعه $\text{non-CM}(S)$ نامتناهی است. مثال ۱۲.۱.۴ حلقه موضعی T را معرفی می کند به طوری که $\text{non-CM}(T)$ مجموعه ای متناهی است و حداقل یک تار رسمی دارد که کوهن-مکالی نیست.

مثال ۱۱.۱.۴. *فرض کنیم k یک میدان باشد و $S = k[[X,Y,Z,U,V]]/(X) \cap (Y,Z)$. واضح است که S حلقه ای موضعی با تارهای رسمی کوهن-مکالی است. با توجه به قضیه وجودی ضعیف راتلیف [۲۴، Theorem ۳۱.۲]، تعداد نامتناهی ایده آل اول P از $k[[X,Y,Z,U,V]]$ وجود دارد به طوری که $(X,Y,Z) \subset P \subset (X,Y,Z,U,V)$. برای هر یک از این ایده آل اول $\mathfrak{p}$، $S_{\overline{P}}$ یکسان بعد نیست و در نتیجه کوهن-مکالی نیست. به بیان دیگر، $non\text{-}CM(S)$ مجموعه ای نامتناهی است.*

مثال ۱۲.۱.۴. *در [۱۳، Proposition ۳.۳] نشان داده شده است که حوزه صحیح موضعی $(R,\mathfrak{m})$ با بعد ۲ وجود دارد به طوری که $\widehat{R} = \mathbb{C}[[X,Y,Z]]/(Z^2, tZ)$، که در آن $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط است و برای عضوی مانند $s \in \mathbb{C}[[Y]] \setminus \mathbb{C}\{Y\}$، $t = X + Y + Y^2 s$. از آنجا که $Ass\ \widehat{R} = \{(Z),(Z,t)\}$، $\widehat{R}$ در شرط (S_1) صدق نمی کند. پس $\mathcal{H}^{-1}_{\widehat{R}} \neq 0$ در حالی که بنابر قضیه ۸.۳.۱، $\mathcal{H}^{-1}_R = 0$. حال لم ۵.۱.۲ نتیجه می دهد تار رسمی از R وجود دارد که کوهن-مکالی نیست. از آنجا که R حوزه صحیح است، $non\text{-}CM(R) = \{\mathfrak{m}\}$.*

۲.۴ حلقه هایی باتارهای رسمی کوهن-مکالی

در نتیجه ۴.۱.۴ نشان داده شد که اگر همه تارهای رسمی R ، کوهن-مکالی باشند، آنگاه مکان هندسی کوهن-مکالی هر R-مدول با تولید متناهی M زیر مجموعه باز $\mathrm{Spec}\,R$ تحت توپولوژی زاریسکی است.

این نتیجه می تواند انگیزه ای برای یافتن حلقه هایی باشد که تارهای رسمی کوهن-مکالی دارند. به طور دقیق تر، تاثیر کوهن-مکالی بودن تارهای زسمی مشخصی را بر ساختار مدول بررسی می کنیم.

در سراسر این بخش، $(R, \mathfrak{m})$ موضعی و M یک R-مدول با تولید متناهی از بعد d است.

لم زیر، هسته نتیجه اصلی این بحش، قضیه ۲.۲.۴، به شمار می رود.

گزاره ۱.۲.۴ . *فرض کنیم $\mathfrak{p}$ ایده آل اولی از $\operatorname{Spec} R$ باشد به طوری که $R/\mathfrak{p}$ پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی داشته باشد. آنگاه تار رسمی R روی $\mathfrak{p}$ کوهن-مکالی است.*

برهان. می دانیم اگر S، تصویر $R \setminus \mathfrak{p}$ در $\widehat{R}$ باشد، $(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}) \otimes_R \widehat{R} \cong S^{-1}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})$. بنابراین، باشد نشان دهیم برای هر $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} \widehat{R}$ به طوری که $S \cap \mathfrak{q} = \emptyset$، $(S^{-1}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R}))_{S^{-1}\mathfrak{q}}$ کوهن-مکالی است. برای این منظور، کافی است نشان دهیم $(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})_\mathfrak{q}$ یک $\widehat{R}_\mathfrak{q}$-مدول کوهن-مکالی است. از آنجا که $R/\mathfrak{p}$ پوچساز یکنواحت کوهمولوژی موضعی دارد، پس $\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R}$ هم دارای پوچساز یکنواحت کوهمولوژی موضعی است، به ویژه، بنابر گزاره ۲.۲.۲، $\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R}$ یکسان بعد است. به برهان خلف، فرض کنیم $(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})_\mathfrak{q}$ کوهن-مکالی نیست. می توان فرض کرد $\mathfrak{q} \in \operatorname{Min}(\text{non-CM}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R}))$ و $(\mathfrak{q} \cap R) \cap (R \setminus \mathfrak{p}) = \emptyset$. به عبارت دیگر، $\text{non-CM}((\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})_\mathfrak{q}) = \{\mathfrak{q}\widehat{R}_\mathfrak{q}\}$ و $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$.

اگر R و M در لم ۶.۱.۴، را به ترتیب با $\widehat{R}_\mathfrak{q}$ و $(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})_\mathfrak{q}$، جایگزین کنیم، با توجه به این که برای هر $\mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec} \widehat{R}$، $\widehat{R}/\mathfrak{q}'$ یکسان بعد است، بنابر گزاره ۲.۳.۲، $\mathcal{C}_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\mathfrak{q}')$ و در نتیجه $\mathcal{C}_{\widehat{R}_\mathfrak{q}}(\widehat{R}_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}'\widehat{R}_\mathfrak{q})$ متناهی است. پس برای هر $\mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec} \widehat{R}$ به طوری که $\mathfrak{q}' \subseteq \mathfrak{q}$، بنابر قضیه ۱۳.۲.۲، $\widehat{R}_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}'\widehat{R}_\mathfrak{q}$، به عنوان $\widehat{R}_\mathfrak{q}$-مدول، پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد.

از آنجا که $(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})_\mathfrak{q}$ یکسان بعد است، لم ۳.۳.۳ نتیجه می دهد $(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})_\mathfrak{q}$ به عنوان $\widehat{R}_\mathfrak{q}$-مدول، کوهن-مکالی تعمیم یافته است. به ویژه اندیس $i < \dim(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})_\mathfrak{q}$ وجود دارد به طوری که، $\operatorname{Att}\mathrm{H}^i_{\mathfrak{q}\widehat{R}_\mathfrak{q}}((\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})_\mathfrak{q}) = \{\mathfrak{q}\widehat{R}_\mathfrak{q}\}$ و لذا $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{q}\widehat{R}_\mathfrak{q}}((\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})_\mathfrak{q})$. حال، قضیه ۷.۲.۱ نتیجه می دهد که برای اندیسی مانند $j < \dim R/\mathfrak{p}$، $\mathfrak{q} \in \operatorname{Att}\mathrm{H}^j_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})$ و لذا $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R \in \operatorname{Att}\mathrm{H}^j_\mathfrak{m}(R/\mathfrak{p})$ که با لم ۷.۲.۲ در تناقض است. $\square$

گزاره بالا ما را قادر می سازد که معیاری برای مدول های با تولید متناهی که پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارند، بر حسب مجموعه مشخصی از تار های رسمی حلقه زمینه، ارائه دهیم.

قضیه ۲.۲.۴ . *عبارت های زیر معادلند.*

(الف) $\widehat{M}$ یک R-مدول یکسان بعد است و تارهای رسمی R روی ایده آل های اول مینیمال M کوهن-مکالی هستند.

(ب) M پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد.

برهان. (الف)⇐(ب).

بنابر گزاره ۲.۳.۲، $\mathcal{C}_{\widehat{R}}(\widehat{M})$ متناهی است که نتیجه می دهد مکان هندسی کوهن-مکالی M باز است و به طور معادل $\operatorname{Min}(\text{non-CM}(\widehat{M}))$ یک مجموعه متناهی است(ملاحظه ۱.۱.۴ را ببینید) . پس لم ۱۰.۳.۱ نتیجه می دهد

$$\bigcap_{\mathfrak{q}\in\text{non-CM}(\widehat{M})} \mathfrak{q} \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{q}\in\operatorname{Min}\widehat{M}} \mathfrak{q}. \qquad (۲.۱.۴)$$

بنابر نتیجه ۸.۱.۲، برای هر عضو $r \in (\bigcap_{\mathfrak{q}\in\text{non-CM}(\widehat{M})} \mathfrak{q}) \cap R$، عدد صحیح و مثبت n موجود است که برای هر $0 \leq i < \dim M$ داریم $r^n \mathrm{H}^i_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{M}) = 0$. از طرف دیگر $\mathrm{H}^i_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{M}) \cong \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)$، پس کافی است نشان دهیم

$$(\bigcap_{\mathfrak{q}\in\text{non-CM}(\widehat{M})} \mathfrak{q}) \cap R \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Min} M} \mathfrak{p}. \qquad (۲.۲.۴)$$

فرض کنیم (۲.۲.۴) برقرار نباشد. از آنجا که $\operatorname{Min}(\text{non-CM}(\widehat{M}))$ مجموعه ای متناهی است، ایده آلهای اول $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} M$ و $\mathfrak{q} \in \text{non-CM}(\widehat{M})$ موجودند به طوری که $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$. با توجه به این که هومورفیسم حلقه ای $R_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (\widehat{R})_{\mathfrak{q}}$، یکدست باوفا است و تار رسمی آن روی $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$، $((R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}) \otimes_R \widehat{R})_{\mathfrak{q}}$، کوهن-مکالی است، بنابر نتیجه ۳.۱.۴، $M_{\mathfrak{p}}$ کوهن-مکالی نیست اما $\dim_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = 0$ که تناقض است.

(ب)⇐(الف). با توجه به گزاره ۴.۲.۲، M یکسان بعد است و برای هر ایده آل اول مینیمال M مانند $\mathfrak{p}$، $R/\mathfrak{p}$ دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است. پس بنابر گزاره ۱.۲.۴، تار رسمی روی $\mathfrak{p}$ کوهن-مکالی است. □

نتیجه زیر نشان می دهد اگر تارهای رسمی R کوهن-مکالی باشند، آنگاه R زنجیره وار جهانی است اگر و تنها اگر برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$، $\mathcal{C}_R(R/\mathfrak{p})$ متناهی باشد.

نتیجه ۳.۲.۴. *گزاره های زیر معادلند.*

(الف) R زنجیره وار جهانی است و همه تارهای رسمی آن کوهن-مکالی هستند.

(ب) برای $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$، همبافت کوزین $\mathcal{C}_R(R/\mathfrak{p})$ متناهی است.

(ج) برای $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$، $R/\mathfrak{p}$ پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد.

برهان. (الف)⇐(ب) با توجه به گزاره ۲.۳.۲، واضح است.

(ب)⇐(ج) با توجه به قضیه ۱۳.۲.۲، واضح است.

(ج)⇐(الف). بنابر نتیجه ۶.۲.۲، برای هر ایده آل اول $\mathfrak{p}$، $R/\mathfrak{p}$ زنجیره وار جهانی است و لذا R نیز چنین است.

ادامه اثبات، از گزاره ۱.۲.۴ نتیجه می شود. □

همان طور در لم ۸.۲.۲ دیده شد، $\mathrm{non\text{-}CM}(M) \subseteq \mathrm{V}(\mathrm{a}(M))$. هدف نهایی، پاسخ به این سوال است که چه زمانی، تساوی برقرار است. در سال ۱۹۸۲، شنزل[۱] ثابت کرد که اگر M یکسان بعد باشد و R همبافت دوگانی داشته باشد، آنگاه تساوی برقرار است [۲۷، صفحه ۵۲]. یادآوری می کنیم که اگر R دارای همبافت دوگانی باشد، آنگاه تصویر همریخت یک حلقه گرنشتاین است و لذا تارهای رسمی آن کوهن-مکالی هستند. پس با توجه به نتیجه ۶.۱.۲ و لم ۱۰.۲.۲ $\mathcal{C}_R(M)$ برای R-مدول یکسان بعد M، متناهی است.

در زیر نشان می دهیم اگر $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی باشد، آنگاه $\mathrm{non\text{-}CM}(M) = \mathrm{V}(\mathrm{a}(M))$.

نتیجه ۴.۲.۴. *فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی و با بعد متناهی d باشد به طوری که $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است. آنگاه*

$$V\left(\prod_{i=-1}^{d-1}(0:_R \mathcal{H}_M^i)\right) = \mathit{non\text{-}CM}(M) = V(\mathrm{a}(M)).$$

برهان. نامساوی اول، از ملاحظه ۱.۱.۴ به دست می آید و دومی، با توجه به لم ۸.۲.۲ و نتیجه ۸.۱.۲ واضح است. □

همان طور که در گزاره ۱.۲.۴ دیدیم، اگر $R/\mathfrak{p}$ پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی داشته باشد، آنگاه تار رسمی R روی $\mathfrak{p}$ کوهن-مکالی است. پس برای یافتن تار های رسمی کوهن-مکالی، مطالعه ایده آل های اول $\mathfrak{p}$ که $R/\mathfrak{p}$ دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است، می تواند مفید باشد. مشخص سازی این ایده آل ها، ما را در مشخص سازی مدول های M با خاصیت $\mathrm{non\text{-}CM}(M) = \mathrm{V}(\mathrm{a}(M))$ نیز یاری می کند (نتیجه ۳.۲.۴ را ببینید) .

گزاره ۵.۲.۴. *فرض می کنیم $\mathfrak{p} \in \mathit{Spec}\, R$. شرط لازم و کافی برای این که $R/\mathfrak{p}$ پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی داشته باشد، این است که R-مدول یکسان بعد M موجود باشد به طوری که*

$$\mathfrak{p} \in \mathit{Supp}\, M \setminus V(\mathrm{a}(M))$$

[۱] P. Schenzel

برهان. شرط لازم با قرار دادن $M := R/\mathfrak{p}$، واضح است. برای عکس مطلب، فرض کنیم M یک R-مدول یکسان بعد است به طوری که $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M \setminus \mathrm{V}(\mathfrak{a}(M))$. با استقراء روی $h := \operatorname{ht}_M \mathfrak{p}$، نشان می دهیم $R/\mathfrak{p}$ پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد. اگر $h = ۰$، آنگاه $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} M$. زیر مدول N از M را طوری انتخاب می کنیم که $\operatorname{Ass} N = \{\mathfrak{p}\}$ و $\operatorname{Ass} M/N = \operatorname{Ass} M \setminus \{\mathfrak{p}\}$. واضح است که $(M/N)_\mathfrak{p} = ۰$ پس عضو $r \in R \setminus \mathfrak{p}$، موجود است به طوری که $r(M/N) = ۰$. از طرف دیگر، این واقعیت که $\mathfrak{a}(M) \not\subseteq \mathfrak{p}$، نتیجه می دهد عضوی مانند $s \in R \setminus \mathfrak{p}$ موجود است به طوری برای هر $i < \dim M$، $s\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M) = ۰$. رشته دقیق $\mathrm{H}^{i-۱}_\mathfrak{m}(M/N) \longrightarrow \mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(N) \longrightarrow \mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M)$ باعث می شود که برای هر $i < \dim N$، $rs\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(N) = ۰$. از آنجا که $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} N$، بنابر گزاره ۴.۲.۲، $R/\mathfrak{p}$ دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است.

حال فرض کنیم $h > ۰$. برای هر $\mathfrak{q} \in \operatorname{Supp} M$ به طوری که $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$، $\mathfrak{q} \not\in \mathrm{V}(\mathfrak{a}(M))$. پس بنابر فرض استقراء $R/\mathfrak{q}$، پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد. از آنجا که $\mathfrak{p} \not\in \mathrm{V}(\mathfrak{a}(M))$، بنابر نتیجه ۴.۲.۴، $M_\mathfrak{p}$ کوهن-مکالی است. زیر مدول K از M را طوری انتخاب می کنیم که $\operatorname{Ass} K = \operatorname{Min} M$ و $\operatorname{Ass} M/K = \operatorname{Ass} M \setminus \operatorname{Min} M$. اگر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M/K$،

آنگاه ایده آل اول $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} M/K$ موجود است به طوری که $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. بنابراین $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} M$ و $\mathfrak{q} \not\in \operatorname{Min} M$. از آنجا که $M_\mathfrak{p}$ کوهن-مکالی است، پس $M_\mathfrak{q}$ نیز کوهن-مکالی است که نتیجه می دهد $\mathfrak{q} \in \operatorname{Min} M$ و تناقض است. در نتیجه $\mathfrak{p} \not\in \operatorname{Supp} M/K$ و لذا عضو $r \in A \setminus \mathfrak{p}$ موجود است به طوری که $r(M/K) = ۰$. حال با تاثیر کوهمولوژی موضعی روی رشته دقیق $۰ \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow M/K \longrightarrow ۰$، داریم $\mathfrak{a}(K) \not\subseteq \mathfrak{p}$. از آنجا که $M_\mathfrak{p} \cong K_\mathfrak{p}$، $K_\mathfrak{p}$ کوهن-مکالی است و $\operatorname{ht}_K \mathfrak{p} > ۰$، عضو $x \in \mathfrak{p}$ موجود است به طوری که روی K غیر مقسوم علیه صفر است. رشته دقیق $۰ \longrightarrow K \xrightarrow{x} K \longrightarrow K/xK \longrightarrow ۰$ نتیجه می دهد که $\mathfrak{a}(K)^۲ \subseteq \mathfrak{a}(K/xK)$ و لذا $\mathfrak{a}(K/xK) \not\subseteq \mathfrak{p}$. چون، $\operatorname{ht}_{K/xK}(\mathfrak{p}) < h$، $R/\mathfrak{p}$ پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد. $\square$

به عنوان اولین کاربرد از گزاره بالا، نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۶.۲.۴. *فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی است که در شرط (S_n) صدق می کند. اگر $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی باشد، آنگاه تارهای رسمی R روی ایده آل های اول $\mathfrak{p} \in Supp\ M$ که $ht_M \mathfrak{p} \leq n$ کوهن-مکالی هستند.*

برهان. فرض کنیم $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ به طوری که $\operatorname{ht}_M \mathfrak{p} \leq n$. بنابر نتیجه ۴.۲.۴، $\mathrm{V}(\mathfrak{a}(N)) = \text{non-}CM(N)$. از طرف دیگر $M_\mathfrak{p}$ کوهن-مکالی است، لذا حکم از گزاره ۵.۲.۴ نتیجه می شود. $\square$

حال می توان نشان داد که اگر $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی باشد، آنگاه تار های رسمی R، روی ایده آل های اول مشخصی، کوهن-مکالی هستند.

نتیجه ۷.۲.۴. *فرض کنیم $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است. آنگاه تارهای رسمی R روی همه ایده آل های اول $\mathfrak{p}$ از $Supp\ M$ که $ht_M\mathfrak{p} \leq 1$، کوهن-مکالی هستند.*

برهان. بنابر نتیجه ۳.۱.۲، یک R-مدول با تولید متناهی مانند N که در شرط (S_1) صدق می کند، موجود است به طوری که $\operatorname{Supp} N = \operatorname{Supp} M$ و $\mathcal{C}_R(N)$ متناهی است. حال، حکم از نتیجه ۶.۲.۴، به دست می آید. □

در نتیجه ۴.۲.۴، نشان داده شد که، برای R-مدول با تولید متناهی M، اگر $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی باشد، آنگاه $\text{non-CM}(M) = \mathrm{V}(\mathrm{a}(M))$.

در ادامه، مدول هایی مانند M را که در شرط $\text{non-CM}(M) = \mathrm{V}(\mathrm{a}(M))$ صدق می کنند، بدون این فرض که همبافت کوزین آن متناهی باشد، مشخص سازی می کنیم.

قضیه ۸.۲.۴. *برای R-مدول یکسان بعد M، عبارت های زیر معادلند.*

(الف) *برای هر $\mathfrak{q} \in CM(M)$، $R/\mathfrak{q}$ پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد.*

(الف′) *برای هر $\mathfrak{q} \in CM(M)$، $\widehat{R}/\mathfrak{q}\widehat{R}$ یک R-مدول یکسان بعد است و تار رسمی $(R_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}) \otimes_R \widehat{R}$ کوهن-مکالی است.*

(ب) $\textit{non-CM}(M) = V(\mathrm{a}(M))$.

(ج) $\textit{non-CM}(M) \supseteq V(\mathrm{a}(M))$.

برهان. معادل بودن (الف) و (الف′)، از قضیه ۲.۲.۴ نتیجه می شود.

(الف)$\Rightarrow$(ب). رابطه شمول $\text{non-CM}(M) \subseteq \mathrm{V}(\mathrm{a}(M))$ با توجه به لم ۸.۲.۲، واضح است.

حال فرض کنیم $\mathfrak{p} \supseteq \mathrm{a}(M)$. پس عدد صحیح i، $0 \leq i < d$، موجود است به طوری که $\mathfrak{p} \supseteq 0 :_R \mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M)$. ایده آل اول $\mathfrak{Q} \in \operatorname{Att}\mathrm{H}^i_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{M})$ وجود دارد به طوری که $\mathfrak{q} := R \cap \mathfrak{Q} \in \operatorname{Att}\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M)$ و $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$. برای این که ثابت کنیم $\mathfrak{p} \in \text{non-CM}(M)$، کافی است نشان دهیم $\mathfrak{q} \in \text{non-CM}(M)$. به فرض خلف، فرض کنیم $\mathfrak{q} \in \mathrm{CM}(M)$، با توجه به فرض، $R/\mathfrak{q}$ پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد و لذا، بنابر قضیه ۲.۲.۴، تار رسمی $k(\mathfrak{q}) \otimes_R \widehat{R}$ کوهن-مکالی است. از آنجا که نگاشت $R_\mathfrak{q} \longrightarrow \widehat{R}_\mathfrak{Q}$ یکدست باوفا است، $k(\mathfrak{q}) \otimes_{R_\mathfrak{q}} \widehat{R}_\mathfrak{Q}$ نیز کوهن-مکالی است. بنابراین با تاثیر فرمول متداول بعد و عمق، لم ۲.۱.۴، روی $R_\mathfrak{q} \longrightarrow \widehat{R}_\mathfrak{Q}$، $\widehat{M}_\mathfrak{Q}$ کوهن-مکالی است. از طرف دیگر، برای هر $\mathfrak{r} \in \operatorname{Min} M$، $R/\mathfrak{r}$ دارای

پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است (زیرا در این حالت بعد $M_{\mathfrak{r}}$ صفر است و لذا $(\mathfrak{r} \in \mathrm{CM}(M)$.
پس، بنابر گزاره ۴.۲.۲، M و در نتیجه $\widehat{M}$، دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است. بنابراین، با توجه به گزاره ۲.۲.۲، $\widehat{M}$ یکسان بعد است. حال بنابر نتیجه ۶.۱.۲، $\mathcal{C}_{\widehat{R}}(\widehat{M})$ متناهی است. از آنجا که $\mathfrak{Q} \in \mathrm{Att}\,\mathrm{H}^{i}_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{M})$، بنابر نتیجه ۴.۲.۴، $\mathfrak{Q} \in \mathrm{non\text{-}CM}(\widehat{M})$ و این تناقض است.

(ج)$\Longrightarrow$(الف). فرض کنیم $\mathfrak{q} \in \mathrm{CM}(M)$ پس با توجه به فرض $\mathfrak{q} \not\supseteq \mathfrak{a}(M)$. حال گزاره ۵.۲.۴ نتیجه می دهد $R/\mathfrak{q}$ دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است. □

آخرین نتیجه این بخش کاربردی از قضیه بالا است، که نتیجه ۷.۲.۴ را به تعمیمی از این واقعیت که تار های رسمی یک حلقه کوهن-مکالی، کوهن-مکالی است، بهبود می بخشد.

نتیجه ۹.۲.۴. *فرض کنیم $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی باشد. آنگاه تارهای رسمی R روی ایده آل های اول*

$$\mathfrak{p} \in CM(M) \cup \{\mathfrak{p} \in Supp\ M : ht_M\mathfrak{p} = 1\}$$

کوهن-مکالی هستند.

برهان. با توجه به نتیجه ۷.۲.۴، تار های رسمی R روی ایده آل های اول $\mathfrak{p}$ با $\mathrm{ht}\mathfrak{p} = 1$، کوهن-مکالی هستند. از طرف دیگر بنابر نتیجه ۴.۲.۴، $\mathrm{non\text{-}CM}(M) = \mathrm{V}(\mathfrak{a}(M))$. حال، قضیه ۸.۲.۴ برهان را کامل می کند. □

۳.۴ یادداشت

در سراسر این بخش $(R, \mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی است. همان طور که در نتیجه ۱.۳.۲ دیدیم، اگر $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی باشد، آنگاه M یکسان بعد و $R/0 :_R M$ زنجیره وار جهانی است. از طرف دیگر، گزاره ۲.۳.۲ نشان می دهد که، اگر تارهای رسمی یک حلقه موضعی و زنجیره وار جهانی R کوهن-مکالی باشند، آنگاه برای هر R-مدول یکسان بعد M، $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است. این نتایج ما را به سوال طبیعی زیر هدایت می کند.

سوال ۱.۳.۴. *فرض کنیم $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی باشد. آیا همه تارهای رسمی R روی ایده آل های اول $Supp\ M$، کوهن-مکالی هستند؟*

نتیجه ۷.۲.۴ نشان می دهد که اگر $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی باشد، آنگاه تارهای رسمی R روی ایده آل های اول $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\, M$ با $\mathrm{ht}_M\mathfrak{p} \leq 1$، کوهن-مکالی هستند. به عنوان نتیجه، در حالت های خاص زیر، می توان پاسخ مثبتی برای سوال فوق یافت.

نتیجه ۲.۳.۴ . *فرض کنیم $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است و $dim\ M \leq ۳$. آنگاه تارهای رسمی R روی ایده آل های اول $\mathfrak{p} \in Supp\ M$ کوهن- مکالی هستند.*

برهان. فرض کنیم $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$. اگر $\operatorname{ht}_M \mathfrak{p} \leq ۱$، آنگاه بنابر نتیجه ۷.۲.۴، تار رسمی روی $\mathfrak{p}$ کوهن-مکالی است. حال فرض کنیم $\operatorname{ht}_M \mathfrak{p} > ۱$. پس $\dim R/\mathfrak{p} \leq ۱$ و لذا $R/\mathfrak{p}$ پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد و در نتیجه بنابر گزاره ۱.۲.۴، تار رسمی روی $\mathfrak{p}$ کوهن-مکالی است. □

در نتیجه ۹.۲.۴، دیدیم که اگر $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی باشد، آنگاه تار های رسمی روی ایده آل های اول از $\operatorname{CM}(M) \cup \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M : ht_M \mathfrak{p} = ۱\}$ کوهن-مکالی هستند. پس، نتیجه زیر به دست می آید که در آن $\dim(\text{non-CM}(M)) = \sup\{\dim R/\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in \text{non-CM}(M)\}$.

نتیجه ۳.۳.۴. *فرض کنیم $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است و $dim\ (non\text{-}CM(M)) \leq ۱$. آنگاه تار های رسمی R روی ایده آل های اول $\mathfrak{p} \in Supp\ M$ کوهن- مکالی هستند.*

برهان. فرض کنیم $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$. اگر $M_\mathfrak{p}$ کوهن-مکالی باشد، بنابر نتیجه ۹.۲.۴، تار رسمی روی $\mathfrak{p}$ کوهن-مکالی است. حال، فرض کنیم $\mathfrak{p} \in \text{non-CM}(M)$. پس $\dim R/\mathfrak{p} \leq ۱$ و در نتیجه $R/\mathfrak{p}$ پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد. حال، بنابر گزاره ۱.۲.۴، تار رسمی روی $\mathfrak{p}$ کوهن-مکالی است. □

یک راه برای پاسخ دادن به سوال ۱.۳.۴، یافتن روشی استقرائی، مثلاً استقراء روی بعد مدول است. در این ارتباط، مساله زیر پیشنهاد می شود.

مساله ۴.۳.۴ . *فرض کنیم $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است و x عضوی غیر مقسوم علیه صفر روی M باشد. آنگاه $\mathcal{C}_R(M/xM)$ متناهی است.*

فرض کنیم $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$. زیر مدول N از M را طوری در نظر می گیریم که $\operatorname{Ass} N = \operatorname{Ass} M \setminus \operatorname{Assh} M$ و $\operatorname{Ass} M/N = \operatorname{Assh} M$ ([۱، صفحه ۲۶۳، Proposition ۴]). از آنجا که در رشته دقیق $۰ \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow ۰$ برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} N$ داریم $\operatorname{ht}_M \mathfrak{p} \geq ۱$، لم ۱.۱.۲(ب) نتیجه می دهد $\mathcal{C}_R(M/N)$ متناهی است. با توجه به این که $\operatorname{Supp} M = \operatorname{Supp} M/N$ ، $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M/N$. چون $\operatorname{Ass} M/N = \operatorname{Min} M/N$، $\mathfrak{p}$ شامل یک عضو غیر مقسوم علیه صفر روی M/N است. اگر برای مساله بالا پاسخ مثبتی داشته باشیم، همبافت کوزین $\mathcal{C}_R(\frac{M/N}{xM/N})$ متناهی است. حال با استقراء روی $\dim M$ و استفاده از نتیجه ۲.۳.۴ می توان نشان داد که تار رسمی روی $\mathfrak{p}$ کوهن-مکالی است.

با توجه به این که $\mathcal{C}_R(M)$ متناهی است، بنابر نتیجه ۱.۳.۲، M یکسان بعد و $M :_R M$ $R/0$ زنجیره وار جهانی است. پس M/xM یکسان بعد است. حال، اگر تار های رسمی روی $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ کوهن-مکالی باشند، گزاره ۲.۳.۲، نتیجه می دهد که $\mathcal{C}_R(M/xM)$ متناهی است. پس در واقع حل مساله ۴.۳.۴ معادل یافتن پاسخ مثبت برای سوال ۱.۳.۴ است.

مراجع

[1] N. Bourbaki, Commutative algebra, Translated from the French, Hermann, Paris, 1972.

[2] M. P. Brodmann, R. Y. Sharp, *Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 60. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[3] F. W. Call, *On local cohomology modules*, J. Pure Appl. Algebra **43** (1986), no. 2, 111–117.

[4] M. T. Dibaei, *A study of Cousin complexes through the dualizing complexes*, Comm. Alg. **33** (2005), 119–132.

[5] M. T. Dibaei and R. Jafari, *Top local cohomology modules with specified attached primes*, Algebra Colloquium **15** : 2 (2008) 341–344.

[6] M. T. Dibaei and R. Jafari, *Modules with finite Cousin cohomologies have uniform local cohomological annihilators*, Journal of Algebra, **319** (2008), 3291–3300.

[7] M. T. Dibaei and R. Jafari, *Cohen-Macaulay loci of modules*, Communications in Algebra, to appear.

[8] M. T. Dibaei and M. Tousi, *The structure of dualizing complex for a ring which is* (S_2), J. Math. Kyoto University, **38** (1998), 503–516.

[9] M. T. Dibaei and M. Tousi, *A generalization of the dualizing complex structure and its applications*, J. Pure and Applied Algebra 155 (2001) 17-28.

[10] M. T. Dibaei and S. Yassemi, *Some regidity results for highest order local cohomology modules*, Algebra Colloquium **14** : 3 (2007) 497–504.

[11] M. T. Dibaei and S. Yassemi, *Top local cohomology modules*, Algebra Colloquium **14** : 2 (2007) 209–214.

[12] M. T. Dibaei and S. Yassemi, *Attached primes of the top local cohomology modules with respect to an ideal*, Arch. Math. (Basel) **84** (2005), no. 4, 292–297.

[13] D. Ferrand and M. Raynaud, *Fibres formelles d'un anneau local noetherien*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **4**, t. 3 (1970), 295-311.

[14] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique IV*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **24** 1965.

[15] S. Goto and K. Watanabe, *On graded rings, I*, J. Math. Soc. Japan, **30** (1978) 179–213.

[16] J. E. Hall, *Fundumental dualizing complex for commutative Noetherian rings*, Quart. J. Math. Oxford, (2) **30** (1979), 21-32.

[17] R. Hartshorne, *Residues and duality*, vol. 20, Lect. Notes Math. Berlin Heidelberg New York, Springer-Verlog, 1966.

[18] R. Hartshorne, *Cohomological dimension of algebraic varieties*, Annals of Math., **88** (1968) 403–450.

[19] T. Kawasaki, *On macaulayfication of noetherian schemes*, Trans. Amer. Math. Soc., **352** (2000), 2517–2552.

[20] T. Kawasaki, *Finiteness of Cousin cohomologies*, Trans. Amer. Math. Soc., **360** (2008), 2709–2739.

[21] J. Lipman, S. Nayak and P. Sastry, *Pseudofunctorial behavior of Cousin complexes on formal schemes*, Contemp. Math. **375** (2005), 3–133.

[22] I. G. Macdonald, *Secondary representation of modules over a commutative ring*, Symposia Mathematica, **XI** (1973), 23–43.

[23] I. G. Macdonald and R. Y. Sharp, *An elementary proof of the non-vanishing of certain local cohomology modules*, Quart. J. Math. Oxford **23** (1972), 197–204.

[24] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, 1992.

[25] H. Petzl, *Cousin complexes and flat ring extentions*, Comm. Algebra, **25** (1997), 311–339.

[26] C. Rotthaus and L. M. Şega, *Open loci of graded modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 4959–4980.

[27] P. Schenzel, *Dualisierende Komplexe in der lokalen Algebra und Buchsbaum ringe*, Lecture Notes in Math., vol. 907, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1982. MR 83i:13013

[28] P. Schenzel, *On the use of local cohomology in algebra and geometry*, Six lectures on commutative algebra (Bellaterra, 1996), 241–292, Progr. Math., 166, Birkhäuser, Basel, 1998.

[29] R. Y. Sharp, *The Cousin complex for a module over a commutative Noetherian ring*, Math. Z. **112** (1969), 340-356.

[30] R. Y. Sharp, *Gorenstein modules*, Math. Z. **115** (1970), 117–139.

[31] R. Y. Sharp, *Some reults on the vanishing of local cohomology modules*, Proc. London Math. Soc. **30** (1975), 177–195.

[32] R. Y. Sharp, *Dualizing complexes for commutative Noetherian ring*, Math. Proc. Cambridge Philos Soc., **78** (1975), 369–386.

[33] R. Y. Sharp, *Local cohomology and the Cousin complex for a commutative Noetherian ring*, Math. Z. **153** (1977), 19–22.

[34] R. Y. Sharp, *Necessary conditions for the existence of dualizing complexes in commutative algebra*, Lecture Notes in Math. 740, Springer, Berlin, 1979.

[35] R. Y. Sharp, *A cousin complex characterization of balanced big cohen-macaulay modules*, Quart. J. Math. Oxford, **33** (1982), 471–485.

[36] R. Y. Sharp and P. Schenzel,*Cousin complex and generalized Hughes complexes*, Proc. London Math. Soc., **68** (1994), 499–517.

[37] C. Zhou, *Uniform annihilators of local cohomology*, Journal of algebra **305** (2006), 585–602.

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

$\mathfrak{a}$-adjusted depth	$\mathfrak{a}$-عمق تنظیم شده
$\mathfrak{a}$-torsion	$\mathfrak{a}$-تاب
$\mathfrak{a}$-torsion free	$\mathfrak{a}$-آزاد از تاب
Associated prime ideals	ایده آل های اول وابسته
Attached prime ideals	ایده آل اول چسبیده
$\mathfrak{b}$-minimum $\mathfrak{a}$-adjustwd depth	$\mathfrak{a}$-عمق تنظیم شده $\mathfrak{b}$-مینیمم
Canonical module	مدول متعارف
Cohen-Macaulay	کوهن-مکالی
Cohen-Macaulay locus	مکان هندسی کوهن-مکالی
Complete	کامل
Completion	تکمیل
Complex	همبافت
Cousin complex	همبافت کوزین
Depth	عمق
Dimension	بعد
Dualizing complex	همبافت دوگانی
Equidimensional	یکسان بعد
Excelent ring	حلقه عالی
Filtration	صافی
Finite Cousin complex	همبافت کوزین متناهی
Finiteness dimension	بعد متناهی
Formal fibre	تار رسمی

Fundamental dualizing complex ... همبافت دوگانی اساسی

Generalized Cohen-Macaulay ... کوهن-مکالی تعمیم یافته

Greade ... درجه

Going down ... نزول

Gorenstein ... گرنشتاین

Height ... ارتفاع

Local cohomology ... کوهمولوژی موضعی

Locally equidimensional ... به طور موضعی یکسان بعد

Parameter element ... عنصر پارامتری

Quasi-Buchsbaum ... شبه-باکسبام

Representable ... نمایش پذیر

Secondary ... ثانویه

Secondary representation ... نمایش ثانویه

Strong uniform local cohomological annihilator ... پوچساز یکنواخت قوی کوهمولوژی موضعی

Support ... محمل

Uniform local cohomological annihilator ... پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی

Universally catenary ... زنجیره وار جهانی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

$\mathfrak{a}$-آزاد از تاب ... $\mathfrak{a}$-torsion free

$\mathfrak{a}$-تاب ... $\mathfrak{a}$-torsion

$\mathfrak{a}$-عمق تنظیم شده ... $\mathfrak{a}$-adjusted depth

$\mathfrak{a}$-عمق تنظیم شده $\mathfrak{b}$-مینیمم ... $\mathfrak{b}$-minimum $\mathfrak{a}$-adjustwd depth

ارتفاع ... Height

ایده آل های اول وابسته ... Associated prime ideals

ایده آل اول چسبیده ... Attached prime ideals

بعد ... Dimension

بعد متناهی ... Finiteness dimension

به طور موضعی یکسان بعد ... Locally equidimensional

پوچساز یکنواخت قوی کوهمولوژی موضعی ... Strong uniform local cohomological annihilator

پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی ... Uniform local cohomological annihilator

تار رسمی ... Formal fibre

تکمیل ... Completion

ثانویه ... Secondary

درجه ... Greade

حلقه عالی ... Excelent ring

زنجیره وار جهانی ... Universally catenary

شبه-باکسبام ... Quasi-Buchsbaum

صافی ... Filtration

عمق ... Depth

عنصر پارامتری ... Parameter element

کامل .... Complete
کوهمولوژی موضعی .... Local cohomology
کوهن-مکالی .... Cohen-Macaulay
کوهن-مکالی تعمیم یافته .... Generalized Cohen-Macaulay
گرنشتاین .... Gorenstein
محمل .... Support
مدول متعارف .... Canonical module
مکان هندسی کوهن-مکالی .... Cohen-Macaulay locus
نزول .... Going down
نمایش پذیر .... Representable
نمایش ثانویه .... Secondary representation
همبافت .... Complex
همبافت دوگانی .... Dualizing complex
همبافت دوگانی اساسی .... Fundamental dualizing complex
همبافت کوزین .... Cousin complex
همبافت کوزین متناهی .... Finite Cousin complex
یکسان بعد .... Equidimensional

فهرست نمایه