چکیده

در این رساله، رده ای از مدول ها که همبافت کوزین آن ها دارای کوهمولوژی های با تولید متناهی هستند، مورد مطالعه قرار می گیرد. ابتدا نشان داده می شود که این رده از مدول ها، زیر رده ای از مدول هایی است که پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارند و با استفاده از این مطلب، محک هایی برای توصیف ردهٔ پیشین ارائه می شود.

در این راستا، مجموعه ایده آل های اول چسبیده به برخی مدول های کوهمولوژی موضعی با استفاده از کوهمولوژی های همبافت کوزین مورد بررسی قرار می گیرد و در ادامه، آخرین مدول کوهمولوژی موضعی، با مجموعه ای مشخص از ایده آل های چسبیده، شناسایی می شود.

روند به کار رفته در مطالعه همبافت کوزین، ما را به توصیف مدول های کوهن-مکالی تعمیم یافته بر حسب پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی هدایت می کند. با استفاده از این نتایج، مکان هندسی کوهن-مکالی مدول ها بررسی می شود. در پایان، دو رده از حلقه ها، که روی آن ها، مکان هندسی کوهن-مکالی هر مدول با تولید متناهی، تحت توپولوژی زاریسکی، زیر مجموعه بازی از طیف حلقه است، معرفی می شوند.

واژه های کلیدی. همبافت کوزین، پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی، مکان هندسی کوهن-مکالی، ایده آل های اول چسبیده به یک مدول، کوهمولوژی موضعی.

رده بندی موضوعی (۲۰۱۰).

13D02, 13D45, 13C14, 13D07.

مقدمه

بسیاری از مفاهیم جبر جابجایی با الهام از موضوعات هندسه جبری پدید آمده اند. یکی از این مفاهیم، همبافت کوزین یک مدول است که به عنوان ابزاری مفید در مطالعه مدول های کوهمولوژی موضعی و نیز بررسی برخی خواص حلقه های جابجایی، مطرح می شود و در واقع معادل جبری همبافت کوزین معرفی شده توسط گروتندیک[1] و هارتشورن[2] است [۱۷، Chapter IV]. آن ها از این مفهوم در اثبات قضیه دوگانی برای کوهمولوژی برخی بافه های شبه منسجم استفاده کردند.

در سال ۱۹۶۹، شارپ [3] معادل جبر جابجایی همبافت کوزین (بخش ۱.۳) را معرفی و با مشخص سازی حلقه های کوهن-مکالی و گرنشتاین بر حسب همبافت کوزین، توانمندی این ایده را در جبر جابجایی نشان داد [۲۹]. این مفهوم در [۳۵] تعمیم داده شد و در [۱۵] توسط گوتو [4]و واتانابه[5] در زمینه مدول های $\mathbb{Z}$-مدرج مورد بحث قرار گرفت. در [۲۹]، شارپ نشان می دهد که حلقه نوتری و جابجایی R، کوهن-مکالی است اگر و تنها اگر همبافت کوزین آن، $\mathcal{C}_R(R)$، دقیق باشد، که برای مدول ها نیز توسط وی در [۳۰] تعمیم داده شد، در حالی که R گرنشتاین است اگر وتنها اگر $\mathcal{C}_R(R)$ تحلیل انژکتیو مینیمال R باشد. او همچنین مدول های گرنشتاین را نیز توسط همبافت کوزین معرفی کرد و محک هایی برای آن ها ارائه داد [۳۰]. با توجه به تعریف همبافت کوزین، جملات این همبافت مدول هایی نامتناهی مولد به نظر می رسند، علی رغم این، R کوهن-مکالی است اگر و تنها اگر کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(R)$ صفر باشند. حال می توان پرسید همبافت کوزین کدام دسته از حلقه ها و مدول ها دارای کوهمولوژی های با تولید متناهی هستند و این حلقه ها و مدول ها چه خواصی دارند.

در سال ۲۰۰۱، دیبایی و طوسی، حین مطالعه ساختار همبافت های دوگانی، کلاسی از مدول ها را یافتند که کوهمولوژی های همبافت کوزین آن ها متناهی مولدند. نظریه همبافت های دوگانی نیز خاستگاهی هندسی دارد که نخستین بار گروتندیک و هارتشورن در [۱۷، Chapter V]، آن را معرفی و به عنوان ابزاری

[1] A. Grothendieck
[2] R. Hartshorne
[3] R. Y. Sharp
[4] S. Goto
[5] K. Watanabe

مفید در اثبات قضیه دوگانی استفاده کردند. پس از آن شارپ و تعدادی دیگر از ریاضیدانان با مطالعه معادل جبر جابجایی این مفهوم ، بر مفید بودن این ابزار در این حوزه نیز صحه گذاشتند.

در ادامه این بخش، R حلقه ای جابجایی و نوتری و M یک R-مدول با تولید متناهی است.

یک همبافت دوگانی برای حلقه R، یک همبافت کراندار انژکتیو مانند $I^\bullet$ است که تمام مدول های کوهمولوژی آن، $\mathrm{H}^i(I^\bullet)$، با تولید متناهی هستند و برای هر مدول با تولید متناهی M، نگاشت طبیعی

$$M \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(M, I^\bullet), I^\bullet)$$

یک شبه یکریختی است. همبافت دوگانی $I^\bullet$، یک همبافت دوگانی اساسی نامیده می شود اگر

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} I^i \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec} R} E(R/\mathfrak{p})$$

که در آن $E(R/fp)$ پوش انژکتیو $R/\mathfrak{p}$، به عنوان یک R-مدول است. لذا هر ایده ال اول R دقیقا در یک جمله از $I^\bullet$ و تنها یک بار ظاهر می شود [۳۴، ۱.۱]. می دانیم R همبافت دوگانی دارد اگر و تنها اگر دارای همبافت دوگانی اساسی باشد ([۱۶، ۳.۶] و [۳۴، ۱.۲] را ببینید)، که با تقریب یکریختی همبافت ها و انتقال یکتاست [۳۲، ۴.۵] و [۱۶، ۴.۲].

یافتن و مشخص کردن این همبافت یکتا به عنوان سوالی طبیعی، نتایج جالبی را در پی داشته است. در سال ۱۹۹۸ ، دیبایی و طوسی نشان دادند که اگر حلقه موضعی R که در شرط (S_2) صدق می کند، همبافت دوگانی داشته باشد، آنگاه همبافت دوگانی اساسی R، با همبافت کوزین مدول متعارف R نسبت به صافی ارتفاع (که در این حالت با صافی بعد معادل است) یکریخت است [۸، ۲.۴]. به عنوان کاربردی از این نتیجه، آن ها ثابت کردند که اگر حلقه موضعی R در شرط (S_2) صدق کند و دارای مدول متعارف K باشد، آنگاه متناهی مولد بودن کوهمولوژی های همبافت کوزین K، نسبت به صافی های مشخصی، شرط لازم و کافی برای این است که R همبافت دوگانی داشته باشد [۸، ۳.۴]. در سال ۲۰۰۱، آن ها خواص ساختاری همبافت دوگانی مطرح شده در [۸]، را تعمیم داده و نشان دادند کوهمولوژی های همبافت کوزین M، روی حلقه موضعی R، با تولید متناهی هستند اگر R همبافت دوگانی داشته باشد، M یکسان بعد باشد و در شرط (S_2) صدق کند[۹]. در ادامه [۸] و [۹] ، دیبایی و طوسی در سال ۲۰۰۵ برخی خواص همبافت های کوزین را به واسطه همبافت های دوگانی مطالعه و نتایج زیر را ثابت کردند.

قضیه ۱. [۴، Theorem ۲.۱] فرض کنیم تمام تار های رسمی R کوهن-مکالی هستند و M در شرط

$(S_۲)$ صدق می کند. اگر $\widehat{M}$ یکسان بعد باشد، آنگاه کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهی هستند.

این ایده ها توسط لیپ من[۶]، نایاک [۷]و سستری [۸] نیز در [۲۱] دنبال شده است. کاوازاکی [۹] با انگیزه گرفتن از [۸] و [۹]، همبافت کوزین یک مدول روی حلقه نوتری را مطالعه کرد و نتایج زیر را به دست آورد.

قضیه ۲. [۲۰، Theorem ۱.۱] فرض کنیم M یکسان بعد و

(الف) R زنجیره وار جهانی است ،

(ب) تمام تارهای رسمی موضعی سازی های R کوهن-مکالی هستند،

(ج) مکان هندسی کوهن-مکالی هر R-جبر با تولید متناهی باز است،

آنگاه مدول های کوهمولوژی همبافت کوزین M با تولید متناهی و تنها تعداد متناهی از آن ها ناصفرند.

مفروضات قضیه فوق از لحاظی لازم هم هستند.

قضیه ۳. [۲۰، Theorem ۱.۴] فرض کنیم R حلقه ای زنجیره وار باشد. آنگاه عبارت های زیر معادلند.

- حلقه R در شرایط (الف)، (ب) و (ج) از قضیه ۲ صدق می کند.
- برای هر R-مدول با تولید متناهی و یکسان بعد M، مدول های کوهمولوژی همبافت کوزین M با تولید متناهی هستند و تنها تعداد متناهی از آن ها ناصفرند.

قضیه ۴. [۲۰، Theorem ۵.۵] فرض کنیم R حلقه ای موضعی و زنجیره وار و M یک R-مدول با تولید متناهی و یکسان بعد باشند. اگر تارهای رسمی R کوهن-مکالی باشند، آنگاه مدول های کوهمولوژی $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهی هستند.

می دانیم اگر حلقه موضعی R زنجیره وار و جهانی باشد، آنگاه برای هر R-مدول با تولید متناهی یکسان بعد، $\widehat{M}$ نیز یکسان بعد است. در اثبات قضیه فوق، فرض زنجیره وار جهانی بودن R، تنها برای اثبات یکسان بعد بودن $\widehat{M}$ به کار رفته است. لذا این قضیه را می توان تعمیمی از قضیه ۱ دانست.

پس از یادآوری برخی نتایج شناخته شده و مفاهیم ابتدایی مورد نیاز در فصل اول، مطالعه همبافت های کوزین را با توضیح برخی خواص اساسی کوهمولوژی های همبافت کوزین و تکنیک هایی مفید در این

---

[۶] J. Lipman
[۷] S. Nayak
[۸] P. Sastry
[۹] T. Kawasaki

زمینه در بخش اول از فصل دوم، آغاز می کنیم. به عنوان نتایجی از این بحث، در نتیجه ۶.۱.۲ ، نشان می دهیم شرط (S_2) در قضیه ۱ زاید است و در گزاره ۲.۳.۲ برهان دیگری برای قضیه ۴ ارائه می دهیم.

در تمام نتایج فوق در مورد متناهی بودن همبافت کوزین R-مدول M، شرایط تعیین کننده مشترکی برای R و M وجود دارند:

(الف) M یکسان بعد است،

(ب) R زنجیره وار جهانی است،

(ج) تارهای رسمی R کوهن-مکالی هستند.

زمانی که R موضعی است، این شرایط بر اساس قضیه ۴، برای با تولید متناهی بودن کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ کافی و بر اساس قضیه ۳ شرایط (ب) و (ج) برای با تولید متناهی بودن کوهمولوژی های همبافت های کوزین تمام R-مدول های یکسان بعد، لازم نیز هستند. حال سوال طبیعی این است که اگر کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهی باشند، کدام یک از شرایط بالا برقرارند.

در سال ۲۰۰۶، ژو[10] خواص حلقه های نوتری دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی را مطالعه کرد و نشان داد چنین حلقه هایی زنجیره وار جهانی و به طور موضعی یکسان بعدند [۳۷].

عضو $x \in R \setminus \cup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min}_M}\mathfrak{p}$، پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی M نامیده می شود اگر برای هر ایده آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از R، و برای هر $i < \dim M_{\mathfrak{m}}$، داشته باشیم $x\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$.

فصل دوم رساله را با بهبود دادن برخی نتایج ژو برای مدول های دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی و یافتن محک هایی برای تشخیص این مدول ها، در بخش ۲.۲ ، ادامه می دهیم. در گزاره ۲.۲.۲ و نتیجه ۶.۲.۲ ، نشان می دهیم اگر R-مدول با تولید متناهی M پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی داشته باشد، آنگاه به طور موضعی یکسان بعد است و $R/0 :_R M$ زنجیره وار جهانی است. در نهایت نتیجه اصلی این بخش را با اثبات این که اگر مدول های کوهمولوژی $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهی باشند آنگاه M دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است (قضیه ۱۳.۲.۲) و لذا M یکسان بعد و $R/0 :_R M$ زنجیره وار جهانی است، ارائه می دهیم.

روند به کار گرفته شده در مطالعه همبافت های کوزین، ابزاری سودمند جهت بحث در مورد پوچساز های یکنواخت کوهمولوژی موضعی نیز به شمار می رود و می توان برخی نتایج شناخته شده در این زمینه را با روش هایی متفاوت وشاید ساده تر اثبات کرد. به عنوان نمونه نتیجه ۹.۲.۲ و گزاره ۱۱.۲.۲ را ببینید.

این دیدگاه، ما را قادر می سازد تا مدول هایی که کوهمولوژی های همبافت کوزین آن ها با تولید متناهی هستند را روی حلقه های با تارهای رسمی کوهن-مکالی، مشخص نماییم. آخرین بخش فصل دوم به کاربردهایی از این شیوه اختصاص دارد. در قضیه ۳.۳.۲ ، نشان می دهیم روی چنین حلقه هایی،

[10] C. Zhou

کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهیند اگر و تنها اگر M پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی داشته باشد، اگر و تنها اگر $\widehat{M}$ یک $\widehat{R}$-مدول یکسان بعد باشد. نتایج به دست آمده در مورد همبافت کوزین در بخش ۱.۲، ما را قادر می سازد که ارتفاع یک ایده ال از حلقه R را با استفاده از همبافت کوزین، در قضیه ۵.۳.۲ ، بیان کنیم.

برای R-مدول با تولید متناهی M روی حلقه موضعی $(R, \mathfrak{m})$، مفهوم مهم دیگری که وابستگی زیادی به پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد، عبارت است از

$$\mathfrak{a}(M) = \bigcap_{i<\dim M} (0 :_R \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)).$$

بنا بر تعریف، R-مدول M، دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی است، اگر وتنها اگر

$$\mathfrak{a}(M) \nsubseteq \cup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} M}\mathfrak{p}.$$

از طرف دیگر اگر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} M$، آنگاه $\mathfrak{a}(M) \subseteq \mathfrak{p}$ اگر و تنها اگر $i < \dim M$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{p} \in \operatorname{Att} \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)$ (لم ۷.۲.۲ را ببینید). این واقعیات می توانند انگیزه ای برای مطالعه روابط بین مدول های کوهمولوژی موضعی و همبافت های کوزین باشند.

می دانیم برای یک R-مدول با تولید متناهی M و $\dim M = d$، $\operatorname{Att} \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(M) = \operatorname{Assh} M$ (قضیه ۴.۲.۱). فصل سوم را با بحث در مورد $\operatorname{Att} \mathrm{H}^t_{\mathfrak{m}}(M)$، برای اندیس های t مشخصی، به ویژه $\operatorname{Att} \mathrm{H}^{d-1}_{\mathfrak{m}}(M)$، بر حسب کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ آغاز می کنیم. به عنوان نتیجه ای از این بحث، در نتیجه ۶.۱.۳، محکی برای ناصفر بودن $\mathrm{H}^{d-1}_{\mathfrak{m}}(M)$، در حالتی که کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهی هستند، ارائه می شود.

موضوع اصلی بخش ۲.۳ سوال زیر است که توسط دیبایی و یاسمی در [۱۰] مطرح شد. آن ها برای یک R-مدول با تولید متناهی و ایده آل $\mathfrak{a}$ از R، مجموعه $\operatorname{Att} \mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(M)$ را مشخص می کنند و نشان می دهند $\operatorname{Att} \mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(M) \subseteq \operatorname{Assh} M$. حال، سوال زیر جالب و طبیعی به نظر می رسد.

سوال ۵. [۱۰، ۲.۹ Question] آیا برای هر زیرمجموعه دلخواه T از $\operatorname{Assh} R$، ایده آلی از R مانند $\mathfrak{a}$ موجود است به طوری که $\operatorname{Att} \mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(M) = T$؟

قضیه ۱۱.۲.۳ پاسخ مثبتی برای سوال فوق، در حالتی که R حلقه ای موضعی و کامل است، ارائه می دهد. در [۱۱، ۱.۶ Theorem]، ثابت می شود که اگر $(R, \mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی و کامل باشد، آنگاه برای هر دو ایده آل $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ از R، اگر $\operatorname{Att} \mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(M) = \operatorname{Att} \mathrm{H}^d_{\mathfrak{b}}(M)$، آنگاه $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(M) \cong \mathrm{H}^d_{\mathfrak{b}}(M)$. به عنوان کاربردی از این مطلب، در نتیجه ۱۲.۲.۳، نشان می دهیم تعداد آخرین مدول های کوهمولوژی موضعی غیر یکریخت M نسبت به تمام ایده آل های R برابر است با $2^{|\operatorname{Assh} M|}$.

در بخش آخر ۳.۳، با استفاده از نتایج بخش های ۱.۳ و ۲.۳ و نیز فصل دوم، رده مدول های کوهن-مکالی تعمیم یافته را مطالعه می کنیم. در نتیجه ۴.۳.۳، محک های جدیدی برای مدول های کوهن-مکالی تعمیم یافته، برحسب پوچساز های یکنواخت کوهمولوژی موضعی، ارائه می دهیم. نتایج این بخش در فصل آخر رساله، برای مطالعه مکان هندسی کوهن-مکالی مدول ها، مفیدند.

مکان هندسی کوهن-مکالی M، به صورت

$$\mathrm{CM}(M) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : \text{است}\ \text{مدول کوهن مکالی}-R_{\mathfrak{p}}\ \text{به عنوان}\ M_{\mathfrak{p}}\}$$

معرفی می شود. خواص توپولوژیکی مکان هندسی کوهن-مکالی یک R-مدول و تعیین این که چه زمانی یک زیر مجموعه باز $\operatorname{Spec} R$، در توپولوژی زاریسکی، است توسط تعداد زیادی از ریاضیدانان بررسی شده است. گروتندیک در [۱۴] نشان می دهد که اگر R حلقه عالی باشد، آنگاه $\mathrm{CM}(M)$ یک زیر مجموعه باز $\operatorname{Spec} R$، در توپولوژی زاریسکی، است و در [۱۷]، هارتشورن نشان می دهد که اگر R همبافت دوگانی داشته باشد، آنگاه $\mathrm{CM}(M)$ یک زیر مجموعه باز $\operatorname{Spec} R$ است. در [۲۶]، روتهاوس[۱۱] و سگا[۱۲] مکان هندسی کوهن-مکالی مدول های مدرج روی حلقه نوتری مدرج استاندارد $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} R_i$ را به عنوان $R_\circ$-مدول مطالعه کردند.

هدف اصلی بخش اول از فصل چهارم، این است که تعیین شود چه زمانی $\mathrm{CM}(M)$ یک زیر مجموعه باز $\operatorname{Spec} R$، در توپولوژی زاریسکی، است. در این راستا، دو رده از حلقه ها، که روی آن ها، مکان هندسی کوهن-مکالی هر مدول با تولید متناهی تحت توپولوژی زاریسکی، زیر مجموعه ای باز از $\operatorname{Spec} R$ است، معرفی می شوند. یکی از آن ها، رده حلقه هایی است که تارهای رسمی آن ها کوهن-مکالی هستند (ملاحظه ۷.۱.۴) و دیگری رده حلقه های موضعی زنجیره وار R است که $\text{non-CM}(R) = \operatorname{Spec} R \setminus \mathrm{CM}(R)$ مجموعه ای متناهی است (نتیجه ۹.۱.۴). در نهایت، با ارائه مثال هایی در ۱۱.۱.۴ و ۱۲.۱.۴ ، نشان می دهیم این دو رده از حلقه ها متمایز هستند.

با الهام از نتایج فوق، در بخش ۲.۴، حلقه های با تارهای رسمی کوهن-مکالی را مطالعه می کنیم. یکی از نتایج اصلی این بخش، قضیه ۲.۲.۴ است که محکی برای R-مدول های با تولید متناهی که پوچساز یکنواخت کوهمولوژی های موضعی دارند، بر حسب مجموعه مشخصی از تار های رسمی R ارائه می دهد. به ویژه نشان می دهیم، برای یک ایده آل اول $\mathfrak{p}$ از R، حلقه $R/\mathfrak{p}$ زنجیره وار جهانی و تار رسمی R روی $\mathfrak{p}$ کوهن-مکالی است اگر و تنها اگر $R/\mathfrak{p}$ دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی باشد (قضیه ۲.۲.۴ و لم ۱۰.۲.۲).

[۱۱] C. Rotthaus
[۱۲] L. M. Şega

نتیجه ۳.۲.۴ خلاصه خوبی از روابط بین پوچسازهای یکنواخت کوهمولوژی موضعی و همبافت های کوزین است که نشان می دهد حلقه موضعی R زنجیره وار جهانی است و تارهای رسمی آن کوهن-مکالی هستند اگر و تنها اگر برای هر ایده آل اول $\mathfrak{p}$ از R حلقه $R/\mathfrak{p}$ دارای پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی باشد.

اگر کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهی باشند، آنگاه $\text{non-CM}(M) = \text{V}(\text{a}(M))$ (نتیجه ۴.۲.۴ را ببینید). این بخش را با قضیه ۸.۲.۴ ، که مدول های M با خاصیت فوق را بدون فرض با تولید متناهی بودن کوهمولوژی های همبافت کوزین، مشخص می کند، به پایان می بریم. این قضیه نتیجه می دهد که اگر کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهی باشند، آنگاه تارهای رسمی R روی ایده آل های اول مشخصی، کوهن-مکالی هستند (نتیجه ۹.۲.۴).

با توجه به نتیجه ۱.۳.۲ ، اگر کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهی باشند، آنگاه M به طور موضعی یکسان بعد و $R/0 :_R M$زنجیره وار جهانی است. از طرف دیگر اگر تمام تارهای رسمی یک حلقه زنجیره وار جهانی، کوهن-مکالی باشند، آنگاه برای هر R-مدول باتولید متناهی و یکسان بعد، کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(M)$ با تولید متناهی هستند (قضیه ۴).

این نتایج این حدس را تقویت می کند که روی حلقه موضعی R، اگر کوهمولوژی های $\mathcal{C}_R(R)$ با تولید متناهی باشند، آنگاه تارهای رسمی R کوهن-مکالی هستند (بخش ۴.۴ را ببینید).

در سراسر این رساله، هر یک از تعاریف و گزاره های شناخته شده، همراه یک مرجع ارائه شده اند و بقیه که مرجعی برای آن ها ذکر نشده است، اصیل محسوب می شوند که بیشتر آن ها در [۶]، [۵] و [۷] آورده شده اند. همچنین سبک ارجاع به مطالب مندرج در متن رساله، به شیوه نگارش پارسی است. به عنوان نمونه برای دیدن "گزاره ۵.۲.۴"، باید به بخش دوم از فصل ۴ مراجعه شود. اما شیوه ارجاع به مراجع لاتین، به همان سبک لاتین است. مثلاً برای دیدن [۲، ۸.۲.۵] باید به بخش دوم از فصل ۸ مرجع [۲]، مراجعه کرد.