دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده‌ی ریاضی

پایان‌نامه‌ی دکتری ریاضی

گرایش ریاضی محض

عنوان:

صفر شدن و تقارن در صفر شدن Ext روی کلاسهایی از حلقه های جابجایی

نگارنده:

سعید ناصح

استاد راهنما:

دکتر مسعود طوسی

خرداد ۱۳۸۸

تشکر

آنچه در پیش روست، رساله‌ی دوره‌ی دکتری اینجانب است که در بازه‌ی زمانی مهر ۸۳ ـ خرداد ۸۸ تهیه شده است.

لذا بر حسب وظیفه، از استاد راهنمایم، آقای دکتر طوسی که در طول این مدت زحمات فراوانی برای من کشیدند صمیمانه تشکر می‌کنم.

نیز لازم به ذکر است که بنده به مدت ٦ ماه بخش تحقیقاتی این رساله را تحت نظر آقای پروفسور یوشینو در دانشگاه اوکایاما انجام داده‌ام. لذا از همه‌ی زحماتشان و فرصتی که در اختیار بنده قرار دادند تا از راهنمایی های سودمند ایشان استفاده کنم، کمال تشکر را دارم.

همچنین از آقای دکتر یاسمی که به عنوان استاد مشاور، در همه‌ی امور مرا یاری و راهنمایی کردند و بودن در کنار ایشان از بهترین فرصتها برای من بوده است، صمیمانه تشکر می‌کنم.

تهیه‌ی مطالب این رساله مستلزم کار مداوم و طولانی بود. از همسرم که با حوصله و شکیبایی و با به عهده گرفتن بسیاری از وظایف من، مرا بینهایت یاری کرد بینهایت تشکر می‌کنم و این رساله را به پاس زحماتش به او تقدیم می‌کنم.

چکیده

در[۸]، آوراموف و بوخوایتز ثابت کردند که برای هر R ـ مدول متناهی مولد M و N روی حلقه‌ی تقاطع کامل موضعی R، اگر $\operatorname{Ext}^i_R(M,N)=0$ برای $i \gg 0$ آنگاه $\operatorname{Ext}^i_R(N,M)=0$ برای $i \gg 0$. در فصل اول این رساله، تعمیم این قضیه را بیان و آنرا با برهان متفاوت اثبات می‌کنیم. به عبارت دیگر روی حلقه‌ی تقاطع کامل موضعی R، ثابت می‌کنیم که اگر $\operatorname{Ext}^i_R(M,N)=0$ برای $i \gg 0$، آنگاه $\operatorname{Ext}^i_R(N,M)=0$ برای $i \gg 0$، هرگاه یکی از شرایط زیر برقرار باشد: (۱) M متناهی مولد و N دلخواه باشد، (۲) M دلخواه و N دارای طول متناهی باشد و یا (۳) M کامل و N متناهی مولد باشد.

در فصل دوم، ما منحصرا با متناهی بودن Ext-index های توسیع های حلقه‌ها سروکار داریم که منشا آن سؤالی از هونیکه و یورگنسن راجع به موضعی سازی حلقه های AB است. در این فصل، طرز جدیدی از نگرش به این مسأله را مطرح کرده و به بررسی این موضوع در حالت کلی‌تر می‌پردازیم. در این راستا حدس‌هایی را مطرح کرده و در ادامه به ارتباط میان این حدسها و سؤال مطرح شده خواهیم پرداخت. همچنین جوابهای مثبتی را برای این حدسها در حالتهای خاص ارایه خواهیم کرد. به علاوه به عنوان یکی از مهمترین مطالب این رساله، در فصل ۲ مثال مهمی از حلقه‌های با Ext-index متناهی را معرفی می‌کنیم. در این راستا قضیه‌ی مهمی را ثابت کرده و به کمک آن شکل بسیار قوی تری از یک حدس معروف از آسلندر و ریتن که بیش از سی سال پیش مطرح شده بود را برای حلقه‌های موضعی آرتینی نتیجه می‌گیریم.

در فصل سوم، نتایج دیگری را راجع به صفر شدن فانکتور Ext ارایه می‌کنیم. در واقع کار ما در این فصل دسته بندی مدولهای با بعد پروژکتیو متناهی با توجه به فانکتورهای فروبنیوس است. در واقع اگر M مدولی متناهی مولد روی حلقه‌ی موضعی R باشد و اگر $\operatorname{depth}(R)=d$ و $\operatorname{char}(R)=p>0$ باشد، آنگاه $\operatorname{pd}_R(M)<\infty$ اگر برای $d+1$ مقدار متوالی از i و بی‌نهایت مقدار از n داشته باشیم $\operatorname{Ext}^i_R(M,{}^{f^n}R)=0$. به علاوه اگر R حلقه‌ی تقاطع کامل موضعی باشد و اگر برای یک $i \geq d$ و یک $n>0$ داشته باشیم $\operatorname{Ext}^i_R(M,{}^{f^n}R)=0$، آنگاه M دارای بعد پروژکتیو متناهی است.

کلمات کلیدی:

۱. حلقه‌ی منظم
۲. حلقه‌ی تقاطع کامل
۳. حلقه‌ی گورنشتاین
۴. حلقه‌ی کوهن ـ مکولی
۵. حلقه‌ی AB
۶. توسیع بدیهی
۷. حدس آسلندرـ ریتن
۸. فانکتور فروبنیوس
۹. بعد پروژکتیو
۱۰. بعد انژکتیو
۱۱. بعد یکدست

فهرست

مقدمه

در سرتاسر این رساله، همه‌ی حلقه‌ها جابجایی، نوتری و یکدار هستند. در حالتی که $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ی موضعی است، برای هر R ـ مدول M، $\widehat{M}$ کاملسازی M نسبت به ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ است. همچنین در کل این رساله، برای R ـ مدول M، منظور از $\mathrm{pd}_R(M)$، $\mathrm{id}_R(M)$ و $\mathrm{fd}_R(M)$ به ترتیب بعدهای پروژکتیو، انژکتیو و یکدست R ـ مدول M است. در حالتی که $(R,\mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی است، $\mathrm{depth}_R(M)$ طول بزرگترین M ـ رشته‌ی منظم در $\mathfrak{m}$ است. ما همواره $\mathrm{depth}_R(R)$ را با $\mathrm{depth}(R)$ نمایش می‌دهیم. پیش از هر چیز ابتدا تعریف اساسی زیر را یادآوری می‌کنیم:

تعریف . ۰ . ۱. فرض کنید R یک حلقه باشد.

(۱) در حالتی که R موضعی باشد، R کوهن ـ مکولی است اگر $\dim(R) = \mathrm{depth}(R)$. در حالتی که R موضعی نیست، R کوهن ـ مکولی است اگر $\dim(R_\mathfrak{p}) = \mathrm{depth}(R_\mathfrak{p})$ برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R.

(۲) در حالتی که R موضعی باشد، R گورنشتاین است اگر $\mathrm{id}_R(R) < \infty$. در حالتی که R موضعی نیست، R گورنشتاین است اگر $\mathrm{id}_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}) < \infty$ برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R.

(۳) حلقه‌ی موضعی $(R,\mathfrak{m})$ را حلقه‌ی موضعی منظم نامیم هرگاه $\mathrm{pd}_R(R/\mathfrak{m}) < \infty$. در حالتی که R موضعی نیست، R را حلقه‌ی منظم نامیم هرگاه $R_\mathfrak{p}$ برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R یک حلقه‌ی موضعی منظم باشد.

(۴) حلقه‌ی موضعی $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ی تقاطع کامل است هرگاه کاملسازی R نسبت به ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$، $\widehat{R}$، به صورت خارج قسمت یک حلقه‌ی موضعی منظم به یک رشته‌ی منظم باشد.

در سالهای اخیر، توجه به صفرشدن فانکتورهای Ext و Tor روی حلقه‌های جابجایی نوتری به طور

چشمگیری افزایش یافته است. علاقه‌ی ما به این موضوع به قضیه‌ای از آوراموف[1] و بوخوایتز[2] برمی‌گردد. برای بیان این قضیه به نمادگذاری زیر نیاز داریم:

فرض کنید R یک حلقه باشد. می‌گوییم R دارای خاصیت (ee) (برای مدولهای متناهی مولد) است هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

اگر M و N دو R ـ مدول (متناهی مولد) باشند به طوری که $\mathrm{Ext}_R^i(M,N)=0$ برای $i\gg 0$ آنگاه $\mathrm{Ext}_R^i(N,M)=0$ برای $i\gg 0$.

آوراموف و بوخوایتز ثابت کردند که برای هر حلقه‌ی تقاطع کامل موضعی R، خاصیت (ee) برای مدولهای متناهی مولد برقرار است ([۸، قضیه‌ی III]). سپس آنها این سؤال را مطرح کردند که چه کلاسی از حلقه های موضعی دارای خاصیت گفته شده، یعنی تقارن در صفرشدن Ext برای مدولهای متناهی مولد، هستند. آنها به این موضوع اشاره کردند که کلاس مذکور جایی بین کلاس حلقه های تقاطع کامل موضعی و کلاس حلقه های گورنشتاین موضعی قرار می‌گیرد. اما آنها به درستی نمی‌دانستند که آیا این کلاس واقعا برابر با یکی از کلاس‌های تقاطع کامل موضعی و یا گورنشتاین موضعی است یا نه.

سپس هونیکه[3] و یورگنسن[4] [۲۱]، خاصیت بالا را برای مدولهای متناهی مولد روی حلقه های گورنشتاین موضعی بررسی کردند. در واقع آنها کلاسی از حلقه های گورنشتاین موضعی را تعریف کردند (که آنها را حلقه های AB نامیدند) و نشان دادند که این نوع از حلقه ها دارای این خاصیت برای مدولهای متناهی مولد هستند [۲۱، قضیه‌ی ۱.۴]. همچنین آنها ثابت کردند که کلاس معرفی شده، یعنی کلاس حلقه های AB اکیدا بزرگتر از کلاس حلقه های تقاطع کامل موضعی است [۲۱، قضیه‌ی ۳.۶]. هر چند تعریف حلقه‌های AB را در فصل سوم بیان می‌کنیم، اما برای دادن توضیحات جامع تر در اینجا به بیان آن می‌پردازیم: فرض کنید R یک حلقه‌ی دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Ext\text{-}index}(R)=\mathrm{Sup}\left\{n \mid \mathrm{Ext}_R^n(M,N)\neq 0 \text{ و } i>n \text{ برای } \mathrm{Ext}_R^i(M,N)=0\right\},$$

جایی که این سوپریمم روی همه‌ی جفت R ـ مدولهای متناهی مولد (M,N) گرفته می‌شود به طوری که $\mathrm{Ext}_R^i(M,N)=0$ برای $i\gg 0$. حلقه‌ی گورنشتاین موضعی R را AB می‌نامیم هرگاه $\mathrm{Ext\text{-}index}(R)<\infty$.

---

[1] Avramov

[2] Buchweitz

[3] Huneke

[4] D. Jorgensen

در ادامه‌ی توضیحات بالا، لازم به ذکر است که یورگنسن و شوگا[5]، مثالی از حلقه های آرتینی گورنشتاین موضعی $(R, \mathfrak{m})$ با $\mathfrak{m}^4 = 0$ و $\operatorname{codim}(R) = 6$ را معرفی کردند که دارای خاصیت (e e) برای مدولهای متناهی مولد نبود[۲۳]. به عبارت دیگر آنها نشان دادند که کلاس حلقه های AB اکیدا کوچکتر از کلاس حلقه های گورنشتاین موضعی است و به این ترتیب سؤال آوراموف و بوخوایتز به طور کامل پاسخ داده شد. در واقع دیاگرام زیر بین کلاسهای حلقه‌های موضعی به دست آمد:

کوهن ـ مکولی $\longleftarrow$ گورنشتاین $\longleftarrow$ AB $\longleftarrow$ تقاطع کامل $\longleftarrow$ منظم.

هونیکه و یورگنسن در پایان مقاله‌ی [۲۱] سؤالی را راجع به موضعی سازی حلقه های AB مطرح کردند. این سؤال این بود که آیا موضعی سازی یک حلقه‌ی AB روی هر ایده‌آل اول AB است یا نه. این نقطه‌ی شروع تحقیق ما در این رساله بود که هر چند به طور کامل حل نشد، اما خودبخود به نتایج مهم دیگری در مورد صفرشدن فانکتورهای Ext و Tor انجامید.

ساختار این رساله به صورت زیر است:

در فصل اول تعمیم قضیه‌ی گفته شده از آوراموف و بوخوایتز ([۸، قضیه‌ی III]) را بیان و آنرا با برهان متفاوت اثبات می‌کنیم. به عبارت دیگر روی حلقه‌ی تقاطع کامل موضعی R، ثابت می‌کنیم که اگر $\operatorname{Ext}_R^i(M, N) = 0$ برای $i \gg 0$، آنگاه $\operatorname{Ext}_R^i(N, M) = 0$ برای $i \gg 0$، هرگاه یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) M متناهی مولد و N دلخواه است،

(۲) M دلخواه و N دارای طول متناهی است،

(۳) M کامل و N متناهی مولد است. (قضایای ۱. ۱. ۹، ۱. ۲. ۳ و گزاره‌ی ۱. ۲. ۱)

در فصل دوم، ما منحصرا با متناهی بودن Ext-index های توسیع های حلقه‌ها سروکار داریم. همانطور که قبلا گفته شد، هونیکه و یورگنسن در پایان مقاله‌ی [۲۱] سؤالی را راجع به موضعی سازی حلقه های AB مطرح کردند که آیا موضعی سازی یک حلقه‌ی AB روی هر ایده‌آل اول AB است یا نه. در فصل ۲، طرز جدیدی از نگرش به این مسأله را مطرح کرده و به بررسی این موضوع در حالت کلی‌تر می‌پردازیم. در این راستا حدس‌های زیر را مطرح کرده و در ادامه به ارتباط میان این حدسها و سؤال مطرح شده خواهیم پرداخت ([۳۲]):

حدس (L). فرض کنید R یک حلقه باشد و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. اگر $\operatorname{Ext\text{-}index}(R) < \infty$ آنگاه $\operatorname{Ext\text{-}index}(R_\mathfrak{p}) < \infty$.

---

[5] Sega

حدس (E). فرض کنید R یک جبر روی یک میدان k باشد و ℓ یک توسیع میدانی متناهی از k باشد. اگر $\text{Ext-index}(R) < \infty$ آنگاه $\text{Ext-index}(R \otimes_k \ell) < \infty$.

حدس (P). فرض کنید R یک حلقه باشد. اگر $\text{Ext-index}(R) < \infty$ آنگاه $\text{Ext-index}(R[x]) < \infty$.

سپس ارتباط میان این حدسها را در قضیه‌ی ۲. ۴. ۳ به صورت زیر بیان می‌کنیم:

قضیه.

(۱) فرض کنید حدس (P) برای همه‌ی حلقه‌های کوهن ـ مکولی موضعی R با $\dim(R) = ۱$ درست باشد. آنگاه حدس (L) برای همه‌ی حلقه‌های کوهن ـ مکولی موضعی از هر بعد متناهی دلخواه درست است.

(۲) فرض کنید حدس (P) برای یک k ـ جبر (k یک میدان است) R درست باشد. آنگاه حدس (E) برای R و هر توسیع جبری ساده‌ی ℓ از k درست است.

(۳) فرض کنید حدس‌های (L) و (E) برای همه‌ی حلقه‌های گورنشتاین که شامل یک میدان هستند درست باشد. آنگاه حدس (P) برای همه‌ی حلقه‌های گورنشتاین با بعد متناهی که شامل یک میدان هستند درست است.

همچنین جوابهای مثبتی را برای این حدسها در حالتهای خاص ارایه خواهیم کرد. لذا در بخش‌های ۳.۲ و ۵.۲، قضایای زیر را ثابت می‌کنیم که اولین قضیه حدس (L)، قضیه‌ی دوم حدس (P) و قضیه‌ی سوم حدس (E) را در حالت های خاص ثابت می‌کنند (لم ۲. ۳. ۲، گزاره‌ی ۲. ۵. ۱ و قضیه‌ی ۲. ۵. ۴):

قضیه. فرض کنید $\text{Max}(R)$ (به ترتیب $\text{Min}(R)$) مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آلهای ماکسیمال (به ترتیب ایده‌آلهای اول مینیمال) R است. فرض کنید $\mathfrak{m} \in \text{Max}(R) \cap \text{Min}(R)$. آنگاه

$$\text{Ext-index}(R_\mathfrak{m}) \leq \text{Ext-index}(R).$$

به عبارت دیگر اگر $\text{Ext-index}(R) < \infty$، آنگاه $\text{Ext-index}(R_\mathfrak{m}) < \infty$.

قضیه. فرض کنید R یک حلقه‌ی آرتینی گورنشتاین با Ext-index متناهی باشد و هر میدان خارج قسمتی R به طور جبری بسته باشند. آنگاه $\text{Ext-index}(R[x_۱, ..., x_n]) < \infty$.

قضیه. فرض کنید که k یک میدان ناشمارا و R یک k ــ جبر از بعد متناهی باشد به طوری که $\text{Ext-index}(R) < \infty$. فرض کنید $k(x)$ یک توسیع متعالی از k باشد. آنگاه $\text{Ext-index}(R \otimes_k k(x)) < \infty$. به طور دقیقتر $\text{Ext-index}(R \otimes_k k(x)) \leq \text{Ext-index}(R)$.

به علاوه به عنوان یکی از مهمترین مطالب این رساله، در فصل ۲ مثال مهمی از حلقه‌های با Ext-index متناهی را معرفی می‌کنیم. در واقع با استفاده از قضیه‌ی زیر که مهمترین قضیه‌ی بخش ۲.۲ است ثابت می‌کنیم که توسیع بدیهی هر حلقه‌ی موضعی آرتینی به وسیله‌ی میدان خارج قسمتی آن دارای Ext-index متناهی است:

قضیه. (قضیه‌ی ۲. ۲. ۲) فرض کنید $(R,\mathfrak{m},k)$ یک حلقه‌ی موضعی و M و N دو $R(k)$ ـ مدول متناهی مولد ناصفر و غیر آزاد باشند، جایی که $R(k)$ توسیع بدیهی R به وسیله‌ی k است. آنگاه $\operatorname{Tor}_n^{R(k)}(M,N) \neq 0$ برای هر $n \geq 3$.

به علاوه، صورت بسیار قوی تری از یک حدس معروف از آسلندر[۶] و ریتن[۷] که بیش از سی سال پیش مطرح شده بود را برای حلقه‌های موضعی آرتینی با استفاده از این قضیه می‌توان نتیجه گرفت (نتیجه‌ی ۲. ۲. ۱۱).

در فصل ۳، نتایج دیگری را راجع به صفر شدن فانکتور Ext ارایه می‌کنیم. در واقع کار ما در این فصل دسته بندی مدولهای با بعد پروژکتیو متناهی با توجه به فانکتور فروبنیوس است. فرض کنید $(R,\mathfrak{m},k)$ یک حلقه با مشخصه‌ی $p > 0$ باشد. فرض کنید $f : R \longrightarrow R$ با $f(r) = r^p$، نگاشت فروبنیوس باشد. نیز برای هر $n \in \mathbb{N}$ فرض کنید $f_R^n : R \longrightarrow R$ به صورت $f_R^n(r) = r^{p^n}$ تعریف شود. هر f_R^n یک ساختار R ـ مدولی جدید برای R تعریف می‌کند که آن را با ${}^{f^n}R$ نمایش می‌دهیم؛ در واقع برای هر $r,s \in R$، $r.s = r^{p^n}s$.

پسکین[۸] و اسپیرو[۹] [۳۳] نشان دادند که هرگاه R یک حلقه‌ی نوتری از مشخصه‌ی $p > 0$ و M یک R ـ مدول متناهی مولد باشد، آنگاه $\operatorname{Tor}_i^R(M, {}^{f^n}R) = 0$ برای هر $i,n > 0$ به شرطی که $\operatorname{pd}_R(M) < \infty$. سپس هرزوگ[۱۰]، عکس این قضیه را نشان داد و به علاوه یک نسخه‌ی دیگر از این قضیه را برای بعد انژکتیو بیان کرد(قضیه‌ی ۳. ۱. ۱). سپس که[۱۱] و لی[۱۲] [۲۵] این قضیه را به نحوی تعمیم دادند و پس از آن تاکاهاشی[۱۳] و یوشینو[۱۴] قضیه‌ی زیر را ثابت کردند:

قضیه . ۰ . ۲. [۳۹، قضیه‌ی ۵.۴] *فرض کنید* $\varphi : (R,\mathfrak{m},k) \longrightarrow (S,\mathfrak{n},l)$ *یک همریختی موضعی بین*

---

[۶] Auslander

[۷] Reiten

[۸] Peskin

[۹] Szpiro

[۱۰] Herzog

[۱۱] Koh

[۱۲] Lee

[۱۳] Takahashi

[۱۴] Yoshino

حلقه‌های موضعی و M یک S ـ مدول متناهی مولد باشد. فرض کنید $\operatorname{char}(R) = p > 0$ باشد و n یک عدد طبیعی به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد.

(۱) اگر برای هر i به اندازه‌ی کافی بزرگ $\operatorname{Tor}_i^R({}^{f^n}R, M) = 0$، آنگاه $\operatorname{fd}_R(M) < \infty$.

(۲) اگر برای هر i به اندازه‌ی کافی بزرگ $\operatorname{Ext}_R^i({}^{f^n}R, M) = 0$، آنگاه $\operatorname{id}_R(M) < \infty$.

پس از آن، قسمتی از قضیه‌ی هرزوگ در حالتی که R، حلقه‌ی تقاطع کامل است توسط آوراموف و میلر[۱۵] [۱۱]، تعمیم داده شد. آنها قضیه‌ی زیر را ثابت کردند:

قضیه . ۰ . ۳. [۱۱، قضیه‌ی اصلی] *فرض کنید R یک حلقه‌ی حلقه‌ی تقاطع کامل موضعی از مشخصه‌ی $p > 0$ و M یک R ـ مدول متناهی مولد باشد به طوری که $\operatorname{Tor}_i^R(M, {}^{f^n}R) = 0$ برای یک $i, n > 0$. آنگاه* $\operatorname{pd}_R(M) < \infty$.

آنها برای اثبات این قضیه از ابزاری به نام کمپلکسیتی استفاده کردند. اما بعد از آن دوتا[۱۶] [۱۶]، همین قضیه را با تکنیک معمول تری اثبات کرد. پس از آن در ادامه‌ی قضایای قبل، لی[۱۷] [۲۷] ثابت کرد که اگر R یک حلقه‌ی تقاطع کامل موضعی از مشخصه‌ی $p > 0$ و M یک R ـ مدول متناهی مولد باشد به طوری که $\operatorname{Ext}_R^i({}^{f^n}R, M) = 0$ برای یک $i, n > 0$، آنگاه $\operatorname{id}_R(M) < \infty$.

از آنجا که فانکتور فروبنیوس سه فانکتور متفاوت تولید می‌کند که عبارت اند از $\operatorname{Tor}_i^R(-, {}^{f^n}R)$، $\operatorname{Ext}_R^i({}^{f^n}R, -)$ و $\operatorname{Ext}_R^i(-, {}^{f^n}R)$ و همانطور که ذکر شد، نتایجی درباره‌ی دسته بندی مدولهای با بعد پروژکتیو (به ترتیب انژکتیو) متناهی با توجه به فانکتور $\operatorname{Tor}_i^R(-, {}^{f^n}R)$ (به ترتیب $\operatorname{Ext}_R^i({}^{f^n}R, -)$) داده شده است، طبیعی است درباره‌ی دسته بندی مدولهای با بعد پروژکتیو یا انژکتیو متناهی در مورد سومین فانکتور یعنی $\operatorname{Ext}_R^i(-, {}^{f^n}R)$ فکر کنیم. هدف اصلی فصل ۳ مطالعه‌ی این فانکتور است که چگونه مدولهای با بعد پروژکتیو متناهی را دسته بندی می‌کند. در واقع در این فصل قضیه‌های زیر را ثابت خواهیم کرد:

قضیه. فرض کنید $\varphi : (R, \mathfrak{m}, k) \longrightarrow (S, \mathfrak{n}, l)$ یک همریختی موضعی بین حلقه‌های موضعی و M یک S ـ مدول متناهی مولد باشد. فرض کنید $\operatorname{depth}(R) = d$، $\operatorname{char}(R) = p > 0$ و n عدد صحیحی باشد به طوری که $p^n \geq \mu(R)$ (برای تعریف $\mu(R)$ به ۳. ۲. ۳ مراجعه کنید). اگر $t \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که

---

[۱۵] Miller

[۱۶] Dutta

[۱۷] Li

$\operatorname{Ext}^i_R(M, {}^{f^n}R) = 0$ برای هر $t \le i \le t+d$، آنگاه $\operatorname{pd}_R(M) < \infty$.

همچنین تعمیمی از قضیه‌ی الف را برای حلقه‌های تقاطع کامل موضعی به صورت زیر بیان می‌کنیم:

قضیه. فرض کنید M یک R ـ مدول متناهی مولد روی حلقه‌ی تقاطع کامل موضعی $(R, \mathfrak{m}, k)$ با مشخصه‌ی $p > 0$ باشد و $\dim(R) = d$. اگر برای یک $i \ge d$ و یک $n > 0$ داشته باشیم $\operatorname{Ext}^i_R(M, {}^{f^n}R) = 0$، آنگاه M دارای بعد پروژکتیو متناهی است.

فصل ۱

تقارن در صفر شدن Ext روی حلقه های تقاطع کامل موضعی

در سراسر این تزحلقه های تقاطع کامل را به اختصار با ci نمایش می‌دهیم.

فرض کنید R یک حلقه‌ی موضعی باشد. در این فصل برای R ـ مدولهای M و N رابطه‌ی بین صفر شدن $\mathrm{Ext}^i_R(M,N)$ و $\mathrm{Ext}^i_R(N,M)$ را برای i های به اندازه‌ی کافی بزرگ بررسی می‌کنیم. این موضوع در ابتدا توسط آوراموف[۱۸] و بوخوایتز[۱۹] [۸] مطرح شد.

قضیه ۱. ۰. ۴. [۸، قضیه‌ی III] *فرض کنید R یک حلقه‌ی ci موضعی باشد و M و N دو R ـ مدول متناهی مولد باشند. در این صورت اگر $\mathrm{Ext}^i_R(M,N)=0$ برای $i\gg 0$ آنگاه $\mathrm{Ext}^i_R(N,M)=0$ برای $i\gg 0$.*

در برهان این قضیه آنها از مجموعه‌های جبری آفین مرتبط به M و N که آنها را واریته‌های پایه[۲۰] نامیدند استفاده کردند. در این فصل ما سه تعمیم این قضیه را با برهان‌های متفاوت بیان می‌کنیم.

---

[۱۸] Avramov

[۱۹] Buchweitz

[۲۰] Support varieties

۱.۱ تعاریف و قضیه‌ی اصلی (تعمیم اول)

در این بخش گزاره‌ی بالا را در حالتی که M متناهی مولد و N دلخواه است ثابت می‌کنیم. اما در ابتدا چند مطلب مورد نیاز را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ یک حلقه‌ی کوهن ـ مکولی موضعی و M یک R ـ مدول متناهی مولد ناصفر باشد.

(۱) M را کوهن ـ مکولی می‌نامیم هرگاه $\operatorname{depth}_R(M) = \dim_R(M)$ و آن را ماکسیمال کوهن ـ مکولی (یا به اختصار MCM) می‌نامیم هرگاه $\operatorname{depth}_R(M) = \dim(R)$.

(۲) R ـ مدول ماکسیمال کوهن ـ مکولی C را مدول کانونی می‌نامیم هرگاه $\operatorname{id}_R(C) < \infty$ و $\dim_k(\operatorname{Ext}_R^s(k, C)) = ۱$ وقتی که $s = \operatorname{depth}_R(M)$.

قضیه ۲.۱.۱. *فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ یک حلقه‌ی کوهن ـ مکولی موضعی با $\dim(R) = d$ باشد.*

(۱) [۱۲، قضیه‌ی ۴.۳.۳] *R ـ مدولهای کانونی یکریختند (به عبارت دیگر اگر R مدول کانونی داشته باشد، مدول کانونی R با تقریب یکریختی یکتاست و در نتیجه از حالا به بعد آن را با C_R نمایش می‌دهیم).*

(۲) [۱۲، قضیه‌ی ۷.۳.۳] *R گورنشتاین است اگر و فقط اگر R مدول کانونی داشته باشد و $R = C_R$.*

(۳) [۱۲، قضیه‌ی ۱۰.۳.۳] *اگر R مدول کانونی داشته باشد، برای هر R ـ مدول ماکسیمال کوهن ـ مکولی M داریم:*

(الف) $\operatorname{Hom}_R(M, C_R)$ یک R ـ مدول ماکسیمال کوهن ـ مکولی است.

(ب) برای هر $i > ۰$ داریم $\operatorname{Ext}_R^i(M, C_R) = ۰$.

(ج) نگاشت طبیعی $M \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(M, C_R), C_R)$ یکریختی است.

(۴) [۱۲، قضیه‌ی ۵.۳.۳(b)] *اگر R دارای مدول کانونی C_R باشد، آنگاه برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ داریم $C_{R_\mathfrak{p}} \cong (C_R)_\mathfrak{p}$.*

(۵) [۱۲، نتیجه‌ی ۱۲.۳.۳] *اگر R دارای مدول کانونی C_R باشد، آنگاه $R[x_۱, x_۲, \cdots, x_n]$ نیز دارای مدول کانونی است.*

نتیجه ۱ . ۱ . ۳. *اگر R یک حلقه‌ی کوهن ــ مکولی موضعی باشد و اگر C_R موجود باشد، آنگاه $\operatorname{Hom}_R(-, C_R)$ هر رشته‌ی دقیق*

$$\cdots \longrightarrow X_n \xrightarrow{h_n} X_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{h_1} X_0 \longrightarrow 0$$

از R ـ مدولهای MCM را به یک رشته‌ی دقیق از R ـ مدولهای MCM می‌برد.

برهان. فرض کنید $\Lambda_1 : 0 \longrightarrow \ker h_1 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow 0$ و برای هر $i > 1$ رشته‌های دقیق کوتاه $\Lambda_i : 0 \longrightarrow \ker h_i \longrightarrow X_i \longrightarrow \ker h_{i-1} \longrightarrow 0$ را در نظر بگیرید. با استفاده از استقرا و رشته‌های Λ_i ($i \geq 1$) به راحتی دیده می‌شود که $\ker h_i$ ($i \geq 1$) یک R ـ مدول MCM است و لذا حکم به وضوح از قسمت (۳.الف و ب) قضیه‌ی قبل نتیجه می‌شود. ■

فرض کنید R یک حلقه و M یک R ـ مدول باشد. ما همواره از نماد M^* برای نمایش دادن $\operatorname{Hom}_R(M, R)$ استفاده می‌کنیم. حال اگر R گورنشتاین موضعی و M یک R ـ مدول MCM باشد، طبق قضیه‌ی ۱ . ۱ . ۲ داریم $M \cong M^{**}$ (اصطلاحا M انعکاسی است). حال برای $i > 0$ فرض کنید $M_i = \operatorname{Ker}(f_{i-1})$ بطوری که f_{i-1}، نگاشت در تحلیل آزاد مینیمال زیر از M است:

$$\mathcal{F} : \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0.$$

به این M_i ها سیزیجی های مثبت M گفته می‌شود که تحت یکریختی یکتا هستند.

حال فرض کنید

$$\mathcal{G} : \cdots \longrightarrow G_2 \xrightarrow{g_2} G_1 \xrightarrow{g_1} G_0 \xrightarrow{g_0} M^* \longrightarrow 0$$

یک تحلیل آزاد مینیمال برای M^* باشد. چون طبق قضیه‌ی ۱ . ۱ . ۲، M^*، MCM است، با توجه به نتیجه‌ی ۱ . ۱ . ۳

$$\mathcal{G}^* : 0 \longrightarrow M^{**} \longrightarrow G_0^* \xrightarrow{g_1^*} G_1^* \xrightarrow{g_2^*} G_2^* \longrightarrow \cdots$$

یک رشته‌ی دقیق است. حال چون M یک R ـ مدول انعکاسی است، از تلفیق $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}^*$ رشته‌ی دقیق زیر را به دست می آوریم:

$$\mathcal{C}(M) : \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} F_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} F_{-2} \xrightarrow{\partial_{-2}} \cdots$$

که در آن $F_{i-1} = G^*_{-i}$ برای $i \leq 0$، $\partial_i = f_i$ برای $i > 0$، $\partial_0 = g^*_0 f_0$ و بالاخره $\partial_i = g^*_{-i}$ برای $i < 0$.
حال داریم $M = M_0 = \mathrm{Ker}(\partial_{-1})$ و برای عدد صحیح منفی i سیزیجی های منفی M را به صورت $M_i = \mathrm{Ker}(\partial_{i-1})$ تعریف می‌کنیم.

لم زیر در[۲۱، لم ۱.۱] برای حالتی که N یک R ـ مدول متناهی مولد است ثابت شده است، اما ما در اینجا باهمان برهان حالت کلی تری از آن را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۱.۴. فرض کنیدR یک حلقه‌ی گورنشتاین موضعی، M یک R ـ مدول MCM و N یک R ـ مدول دلخواه باشد. آنگاه برای یک $t \geq 3$ ثابت و برای $1 \leq i \leq t-2$ داریم:

$$\mathrm{Ext}^i_R(M_{-t}, N) \cong \mathrm{Tor}^R_{t-i-1}(M^*, N).$$

برهان. فرض کنید $t \geq 3$ یک عدد صحیح باشد. با توجه به توضیحات بالا رشته‌ی دقیق زیر از R ـ مدولها وجود دارد به طوری که F_i ها آزادند:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow F_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} F_{-2} \xrightarrow{\partial_{-2}} \cdots \longrightarrow F_{-t} \longrightarrow M_{-t} \longrightarrow 0.$$

در نتیجه رشته‌ی دقیق زیر از R ـ مدولها را داریم:

$$F^*_{-t} \xrightarrow{\partial^*_{-t}} \cdots \xrightarrow{\partial^*_{-2}} F^*_{-1} \longrightarrow M^* \longrightarrow 0.$$

بنابراین همبافت های زیر از R ـ مدولها موجود است:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_{-t}, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_{-t}, N) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_{-1}, N)$$

$$F^*_{-t} \otimes_R N \longrightarrow \cdots \longrightarrow F^*_{-1} \otimes_R N \longrightarrow M^* \otimes_R N \longrightarrow 0$$

همچنین چون F_i ها آزادند، نگاشتهای طبیعی

$$h_i : \mathrm{Hom}_R(F_i, R) \otimes_R N \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_i, N)$$

که با ضابطه‌ی $f \otimes n \longmapsto \{a \longmapsto f(a)n\}$ تعریف می‌شوند یکریختی هستند. لذا به راحتی دیده می‌شود که دیاگرام زیر از R ـ مدولها جابجایی است:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_R(F_i, R) \otimes_R N & \xrightarrow{\partial^*_i \otimes N} & \mathrm{Hom}_R(F_{i+1}, R) \otimes_R N \\
\Big\downarrow h_i & & \Big\downarrow h_{i+1} \\
\mathrm{Hom}_R(F_i, N) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\partial_{i+1}, N)} & \mathrm{Hom}_R(F_{i+1}, N)
\end{array}$$

در نتیجه برای $1 \leq i \leq t-2$ داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^i_R(M_{-t},N) &= \mathrm{H}(\mathrm{Hom}_R(F_{-t+(i-1)},N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_{-t+i},N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_{-t+(i+1)})) \\ &\cong \mathrm{H}(F^*_{-t+(i-1)} \otimes_R N \longrightarrow F^*_{-t+i} \otimes_R N \longrightarrow F^*_{-t+(i+1)} \otimes_R N) \\ &= \mathrm{Tor}^R_{t-i-1}(M^*,N).\end{aligned}$$

■

تعریف ۱. ۱. ۵. فرض کنید S یک حلقه‌ی دلخواه و L و K دو S ـ مدول دلخواه باشند.

(۱) با توجه به نماد استفاده شده در [۳] تعریف می‌کنیم

$$p^S(L,K) = \mathrm{Sup}\{i \in \mathbb{N} \mid \ \mathrm{Ext}^i_S(L,K) \neq 0\}.$$

(۲) تعریف می‌کنیم

$$\xi(S) = \mathrm{Sup}\ \{p^S(L,K) \big|\ p^S(L,K) < \infty \ \text{دلخواه}\ K\text{، متناهی مولد}\ L\ \}.$$

یادداشت ۱. ۱. ۶.

(۱) فرض کنید R یک حلقه و x یک عنصر منظم از R باشد. فرض کنید M و N دو R/xR ـ مدول باشند. آنگاه با توجه به [۳۴، ۱۱.۶۵]، رشته‌ی بلند تغییر حلقه های زیر را داریم:

$$\begin{array}{lllllll} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_{R/xR}(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_R(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^0_{R/xR}(M,N) \\ & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^2_{R/xR}(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^2_R(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_{R/xR}(M,N) \\ & \longrightarrow & \cdots & & & & . \end{array}$$

(۲) فرض کنید R یک حلقه و $0 \longrightarrow K \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$ یک رشته‌ی دقیق از R ـ مدولها باشد. برای هر R ـ مدول M و N و هر عدد طبیعی l، گزاره‌های زیر به راحتی دیده می‌شوند:

(الف) اگر برای هر $j = 0, 1, \cdots, n-1$ و $i > l$ داشته باشیم $\mathrm{Ext}^i_R(M,X_j) = 0$، آنگاه برای هر $i > l$ داریم $\mathrm{Ext}^i_R(M,C) \cong \mathrm{Ext}^{i+n}(M,K)$.

(ب) اگر برای هر $j = 0, 1, \cdots, n-1$ و $i > l$ داشته باشیم $\mathrm{Ext}^i_R(X_j,N) = 0$، آنگاه برای هر $i > l$ داریم $\mathrm{Ext}^{i+n}_R(C,N) \cong \mathrm{Ext}^i(K,N)$.

گزاره ۱. ۱. ۷.

(۱) اگر R یک حلقه باشد به طوری که $\xi(R) < \infty$ و x یک عنصر منظم از R باشد، آنگاه $\xi(R/xR) < \infty$.

(۲) فرض کنید R یک حلقه‌ی گورنشتاین موضعی با $\dim(R) = d$ باشد. اگر $\xi(R) < \infty$ آنگاه $\xi(R) = d$.

(۳) هر حلقه‌ی ci موضعی دارای ξ متناهی است.

(۴) اگر R یک حلقه باشد که $\xi(R) < \infty$، آنگاه به ازای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$، $\xi(R_\mathfrak{p}) < \infty$.

برهان. (۱) قرار دهید $n = \xi(R)$. فرض کنید M و N دو R/xR ـ مدول باشند به طوری که M متناهی مولد و N دلخواه است و برای $i \gg 0$ داریم $\operatorname{Ext}^i_{R/xR}(M,N) = 0$. حال با توجه به رشته‌ی بلند تغییر حلقه‌ها که در ۱. ۱. ٦(۱) ذکر شد، برای $i \gg 0$ داریم $\operatorname{Ext}^i_R(M,N) = 0$. طبق تعریف $\xi(R)$، برای $i > n$ داریم $\operatorname{Ext}^i_R(M,N) = 0$. در نتیجه با توجه دوباره به رشته‌ی بلند تغییر حلقه ها در بالا برای $i > n - 1$ داریم:

$$\operatorname{Ext}^i_{R/xR}(M,N) \cong \operatorname{Ext}^{i+2}_{R/xR}(M,N).$$

اما چون برای $i \gg 0$ داریم $\operatorname{Ext}^i_{R/xR}(M,N) = 0$، پس برای $i > n - 1$ به دست می‌آوریم $\operatorname{Ext}^i_{R/xR}(M,N) = 0$ و لذا $\xi(R/xR) < \infty$.

(۲) چون $\operatorname{id}(R) = d$، پس R ـ مدول متناهی مولدی مانند K موجود است به طوری که $\operatorname{Ext}^d_R(K,R) \neq 0$ و $\operatorname{Ext}^i_R(K,R) = 0$ برای $i > d$. پس $\xi(R) \geq d$.

حال فرض کنید $\xi(R) > d$. پس R ـ مدول متناهی مولد M و R ـ مدول دلخواه N موجودند به طوری که $\operatorname{Ext}^i_R(M,N) = 0$ برای هر $i > \xi(R)$ و $\operatorname{Ext}^{\xi(R)}_R(M,N) \neq 0$. حال با توجه به ۱. ۱. ٦، برای هر $i > d$ داریم:

$$\operatorname{Ext}^{i+1}((M_d)_{-d-1}, N) \cong \operatorname{Ext}^{i-d}_R(M_d, N) \cong \operatorname{Ext}^i_R(M,N).$$

پس $\operatorname{Ext}^i_R((M_d)_{-d-1}, N) = 0$ برای $i > \xi(R) + 1$ و $\operatorname{Ext}^{\xi(R)+1}((M_d)_{-d-1}, N) \neq 0$ که با تعریف $\xi(R)$ در تناقض است. لذا $\xi(R) = d$.

(۳) اگر M یک R ـ مدول متناهی مولد و N یک R ـ مدول دلخواه باشند، چون نگاشت $R \hookrightarrow \widehat{R}$ یک نگاشت یکدست باوفاست، برای هر i داریم $\operatorname{Ext}^i_R(M,N) = 0$ اگر و تنها اگر $\operatorname{Ext}^i_{\widehat{R}}(\widehat{M}, N \otimes_R \widehat{R}) = 0$ و این نشان می‌دهد که اگر $\xi(\widehat{R}) < \infty$ آنگاه $\xi(R) < \infty$. پس بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که $R = S/(x_1, \ldots, x_c)$ به طوری که S یک حلقه‌ی منظم موضعی و $x_1, \ldots, x_c$ یک S ـ رشته‌ی منظم است. می‌دانیم هر مدول متناهی مولد روی S دارای بعد پروژکتیو متناهی است و لذا $\xi(S) < \infty$. در نتیجه طبق (۱) $\xi(R)$ نیز متناهی است.

(۴) فرض کنید M یک $R_\mathfrak{p}$ ـ مدول متناهی مولد و N یک $R_\mathfrak{p}$ ـ مدول دلخواه باشند به طوری که

$\operatorname{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(M,N)=0$ برای $i\gg 0$. فرض کنید $M=R_\mathfrak{p}y_1+\cdots+R_\mathfrak{p}y_t$ و بگیرید $M'=Ry_1+\cdots+Ry_t$. می‌دانیم $M_\mathfrak{p}\cong M'_\mathfrak{p}\cong M$. بنابراین اگر $0\longrightarrow M'\longrightarrow\mathcal{F}$ یک تحلیل آزاد برای R ـ مدول M' باشد آنگاه $0\longrightarrow M'_\mathfrak{p}\longrightarrow\mathcal{F}\otimes_R R_\mathfrak{p}$ یک تحلیل آزاد برای $R_\mathfrak{p}$ ـ مدول $M'_\mathfrak{p}$ است. لذا

$$\operatorname{Ext}^i_R(M',N)\cong\operatorname{Ext}^i_R(M',\operatorname{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p},N))\cong\operatorname{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(M,N).$$

پس برای $i\gg 0$ داریم $\operatorname{Ext}^i_R(M',N)=0$. پس برای هر $i>\xi(R)$ داریم $\operatorname{Ext}^i_R(M',N)=0$. لذا برای هر $i>\xi(R)$ داریم $\operatorname{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(M,N)=0$ و این نشان می‌دهد که $\xi(R_\mathfrak{p})<\infty$. ■

یادداشت ۱.۱.۸.

(۱) فرض کنید R یک حلقه‌ی کوهن مکولی موضعی از بعد d و M یک R ـ مدول متناهی مولد باشد. آنگاه با توجه به [۱۲، ۲.۱.۲۶]، سیزیجی dام M در هر تحلیل آزاد دلخواه، یا صفر است و یا MCM است.

(۲) فرض کنید R و S دو حلقه باشند و T یک فانکتور جمعی پادورد دقیق چپ از کاتگوری R ـ مدولها به کاتگوری S ـ مدولها باشد. فرض کنید $0\longrightarrow M\longrightarrow\mathcal{Q}$ یک تحلیل چپ برای R ـ مدول M باشد به طوری که برای هر $i>0$ و هر $j\geq 0$ داشته باشیم $(\mathcal{R}^iT)(Q_j)=0$، وقتی که $\mathcal{R}^iT$، iامین فانکتور مشتق شده‌ی راست از T است. آنگاه برای هر $i\geq 0$ داریم $(\mathcal{R}^iT)(M)\cong\operatorname{H}^i(T(\mathcal{Q}))$.

حال به اثبات قضیه‌ی اصلی این فصل می‌پردازیم.

قضیه ۱.۱.۹. *فرض کنید R یک حلقه‌ی گورنشتاین موضعی از بعد d باشد به طوری که $\xi(R)<\infty$. فرض کنید M یک R ـ مدول متناهی مولد و N یک R ـ مدول دلخواه باشند. در این صورت اگر $\operatorname{Ext}^i_R(M,N)=0$ برای $i\gg 0$ آنگاه $\operatorname{Ext}^i_R(N,M)=0$ برای $i>d$.*

برهان. فرض کنید L، d امین سیزیجی از M در یک تحلیل آزاد مانند $0\longrightarrow M\longrightarrow\mathcal{P}$ باشد. می‌دانیم با توجه به یادداشت قبل، L یک R ـ مدول MCM است و طبق ۱.۱.۶(۲)، برای هر $i>d$ داریم $\operatorname{Ext}^{i-d}_R(L,N)\cong\operatorname{Ext}^i_R(M,N)$. پس برای $i\gg 0$ داریم $\operatorname{Ext}^i_R(L,N)=0$. لذا طبق ۱.۱.۶، برای هر $t\geq 1$ و $i\gg 0$، $\operatorname{Ext}^i_R(L_{-t},N)=0$. چون $\xi(R)<\infty$، با توجه به گزاره‌ی ۱.۱.۷(۲)، برای هر $t\geq 1$ و هر $i>d$، $\operatorname{Ext}^i_R(L_{-t},N)=0$. از طرف دیگر با توجه به ۱.۱.۶(۲) برای هر $i\geq 1$ داریم $\operatorname{Ext}^i_R(L_{-t},N)\cong\operatorname{Ext}^1_R(L_{i-t-1},N)$. بنابراین برای هر $t\geq 1$ و هر $i>d$ داریم $\operatorname{Ext}^1_R(L_{i-t-1},N)=0$. حال با اعمال تغییر مناسبی روی i و t، به دست می آوریم $\operatorname{Ext}^1_R(L_{-t'},N)=0$ برای هر $t'\geq 1$. پس با توجه

به لم ۱. ۱. ۴، $\mathrm{Tor}^R_{t'-2}(L^*, N) = 0$ برای هر $t' \geq 3$.

حال اگر $\mathcal{F} \longrightarrow N \longrightarrow 0$ یک تحلیل آزاد برای N باشد، آنگاه $\mathcal{F} \otimes_R L^* \longrightarrow N \otimes_R L^* \longrightarrow 0$ یک رشته‌ی دقیق است. همچنین طبق ۱. ۱. ۲(۳.الف)، L^* یک مدول MCM است و در نتیجه طبق ۱. ۱. ۲(۳.ب)، برای $i \geq 1$ و هر R ـ مدول آزاد F، $\mathrm{Ext}^i_R(F \otimes_R L^*, R) = 0$. پس طبق یادداشت ۱. ۱. ۸(۲)، با گرفتن $T = \mathrm{Hom}_R(-, R)$، برای $i \geq 1$ داریم

$$\mathrm{Ext}^i_R(N \otimes_R L^*, R) = \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_R(\mathcal{F} \otimes_R L^*, R)).$$

بنابراین برای $i \geq 1$ یکریختی های زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^i_R(N \otimes_R L^*, R) &\cong \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_R(\mathcal{F}, \mathrm{Hom}_R(L^*, R)))\\
&\cong \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_R(\mathcal{F}, L^{**}))\\
&\cong \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_R(\mathcal{F}, L))\\
&= \mathrm{Ext}^i_R(N, L).
\end{aligned}$$

اما R یک حلقه‌ی گورنشتاین است و لذا برای $i > d$ داریم $\mathrm{Ext}^i_R(N \otimes_R L^*, R) = 0$. در نتیجه برای $i > d$ داریم $\mathrm{Ext}^i_R(N, L) = 0$. حال با استفاده از ۱. ۱. ٦(۲) نتیجه می‌شود که $\mathrm{Ext}^i_R(N, M) = 0$ برای $i > d$. توجه کنید از اینکه $\mathrm{id}(R) = d$ نتیجه می‌شود که برای R ـ مدول آزاد F و برای $i > d$ داریم $\mathrm{Ext}^i_R(N, F) = 0$.

■

۱. ۲ نتایج (تعمیم‌های دوم و سوم)

در این بخش دو تعمیم دیگر از قضیه‌ی ۱. ۰. ۴ را بیان و اثبات می‌کنیم. به عبارت دیگر قضیه‌ی ۱. ۰. ۴ را در حالتی که

(۱) M دلخواه و N دارای طول متناهی و

(۲) M کامل و N متناهی مولد

هستند ثابت می‌کنیم.

فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی باشد و $E(R/\mathfrak{m})$ پوشش انژکتیو برای $R/\mathfrak{m}$ باشد. فرض کنید T یک R ـ مدول باشد. یادآوری می‌کنیم که دوگان ماتلیس T، $\operatorname{Hom}_R(T,E(R/\mathfrak{m}))$ است که آن را با $T^\vee$ نمایش می‌دهیم. می‌گوییم T ماتلیس ـ انعکاسی است هرگاه $T \cong T^{\vee\vee}$. توجه کنید که اگر T دارای طول متناهی باشد آنگاه T ماتلیس ـ انعکاسی است. به علاوه یکریختی های زیر را برای R ـ مدولهای V و W داریم:

$$\operatorname{Tor}_i^R(V,W)^\vee \cong \operatorname{Ext}_R^i(V,W^\vee)$$

و $\operatorname{Ext}_R^i(V,W)^\vee \cong \operatorname{Tor}_i^R(V,W^\vee)$ به شرطی که V متناهی مولد باشد.

همچنین $T^\vee = 0$ اگر و تنها اگر $T = 0$.

گزاره ۱ . ۲ . ۱. *فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی گورنشتاین موضعی از بعد d باشد به طوری که $\xi(R) < \infty$. آنگاه برای همه‌ی R ـ مدولهای M و N که M دارای طول متناهی و N دلخواه است اگر $\operatorname{Ext}_R^i(N,M) = 0$ برای $i \gg 0$، آنگاه $\operatorname{Ext}_R^i(M,N) = 0$ برای $i > d$.*

برهان. برای هر $i \geq 0$ داریم

$$\operatorname{Ext}_R^i(N,M) \cong \operatorname{Ext}_R^i(N,M^{\vee\vee}) \cong \operatorname{Tor}_i^R(N,M^\vee)^\vee \cong \operatorname{Ext}_R^i(M^\vee,N^\vee).$$

در نتیجه طبق فرض و قضیه‌ی ۱ . ۱ . ۹، برای هر $i > d$ داریم $\operatorname{Ext}_R^i(N^\vee,M^\vee) = 0$. چون برای هر $i \geq 0$ داریم $\operatorname{Ext}_R^i(N^\vee,M^\vee) \cong \operatorname{Tor}_i^R(N^\vee,M)^\vee$، لذا برای هر $i > d$ داریم $\operatorname{Tor}_i^R(N^\vee,M) = 0$. از طرف دیگربرای هر $i \geq 0$ داریم $\operatorname{Tor}_i^R(N^\vee,M) \cong \operatorname{Ext}_R^i(M,N)^\vee$ و در نتیجه $\operatorname{Ext}_R^i(M,N) = 0$ برای هر $i > d$. ■

حال به عنوان نتیجه‌ای از قضیه‌ی ۱ . ۱ . ۹ و گزاره‌ی قبلی نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید:

نتیجه ۱ . ۲ . ۲. *فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی گورنشتاین موضعی آرتینی باشد به طوری که $\xi(R) < \infty$. فرض کنید M و N دو R ـ مدول باشند به طوری که M متناهی مولد و N دلخواه است. حال اگر $\operatorname{Ext}_R^i(N,M) = 0$ برای $i \gg 0$، آنگاه $\operatorname{Ext}_R^i(M,N) = 0$ برای $i > 0$.*

اکنون به عنوان آخرین مطلب در این بخش قضیه‌ی زیر را ثابت می‌کنیم:

قضیه ۱ . ۲ . ۳. *فرض کنید R یک حلقه‌ی گورنشتاین موضعی از بعد d باشد به طوری که $\xi(R) < \infty$. فرض کنید M یک R ـ مدول متناهی مولد و N یک R ـ مدول کامل باشند. در این صورت اگر $\operatorname{Ext}_R^i(N,M) = 0$ برای $i \gg 0$ آنگاه $\operatorname{Ext}_R^i(M,N) = 0$ برای $i \gg 0$.*

برای اثبات این قضیه به چند مطلب نیاز داریم که آنها را در زیر می‌آوریم:

تعریف ۱ . ۲ . ۴. فرض کنید که $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی و N یک R ـ مدول دلخواه باشد. فرض کنید $\tau_N : N \longrightarrow \widehat{N}$ نگاشت طبیعی باشد. می‌گوییم N مدول نیمه ـ کامل[1] است هرگاه τ_N پوشا باشد. همچنین می‌گوییم N مدول مجزا[2] است هرگاه τ_N یک به یک باشد.

یادداشت ۱ . ۲ . ۵. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی و N یک R ـ مدول دلخواه باشد. فرض کنید $0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow L/K \longrightarrow 0$ یک رشته‌ی دقیق از R ـ مدولها باشد. با توجه به [۲۸، بخش ۸] داریم:

(۱) N مجزاست اگر و فقط اگر $\bigcap_n \mathfrak{m}^n N = 0$ برای هر $n \in \mathbb{N}_0$.

(۲) L/K مجزاست اگر و فقط اگر K در L بسته باشد.

(۳) [۳۶، نتیجه. ۲.۱] فرض کنید $f : M \longrightarrow N$ یک نگاشت بین مدول نیمه ـ کامل M و مدول مجزای N باشد. اگر $N = f(M) + \mathfrak{m}N$، آنگاه N کامل است.

(۴) با استفاده از (۲) و (۳) داریم که اگر K در L بسته و L نیمه ـ کامل باشد، آنگاه L/K کامل است.

(۵) [۳۸، تعریف ۱۱.۱.۲] فرض کنید S یک حلقه باشد. فرض کنید M یک S ـ مدول و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل S باشد. S ـ زیرمدول آزاد $L \subseteq M$ را $\mathfrak{a}$ ـ اساسی می‌نامیم هرگاه نشاندن طبیعی $\rho : L \longrightarrow M$ خالص[3] باشد (یعنی برای هر S ـ مدول H، $\rho \otimes Id_H : L \otimes_S H \longrightarrow M \otimes_S H$ یک به یک است) و L در توپولوژی $\mathfrak{a}$ ـ ادیک M چگال است (یعنی $\bigcap_{n\geq 1}(L + \mathfrak{a}^n M) = M$ یا به عبارت دیگر $L + \mathfrak{a}^n M = M$ برای هر n).

(۶) [۳۸، گزاره‌ی ۱۲.۱.۲(۱)] هر R ـ مدول یکدست دارای یک زیرمدول $\mathfrak{m}$ ـ اساسی است.

حال با استفاده از (۵) و (۶) داریم :

(۷) برای هر R ـ مدول یکدست F، R ـ زیرمدول آزاد $L \subseteq F$ موجود است به طوری که نشاندن طبیعی $\rho : L \longrightarrow F$ خالص است و L در توپولوژی $\mathfrak{m}$ ـ ادیک F چگال است. در نتیجه $L/\mathfrak{m}^n L \cong F/\mathfrak{m}^n F$ برای هر n. لذا اگر F کامل نیز باشد آنگاه $F \cong \widehat{L}$. به عبارت دیگر هر R ـ مدول یکدست کامل تکمیل شده‌ی یک R ـ مدول آزاد است (و بر عکس [۳۶، ۴.۲]).

(۸) [۳۶، گزاره. ۳.۱] هر R ـ زیرمدول بسته‌ی یک مدول کامل، کامل است.

(۹) فرض کنید J یک مجموعه از اندیس‌ها و $\{M_n\}_{n\in J}$ یک مجموعه از R ـ مدولها باشد. آنگاه با توجه

---

[1] Quasi-complete module

[2] Separated module

[3] Pure

به [۳۶، ۴.۹] تکمیل شده‌ی $M = \bigoplus_{n\in J} M_n$ به صورت زیر است

$$\widehat{M} = \{(m_n)_{n\in J} \in \Pi_{n\in J}\widehat{M_n} |\ \text{برای همه‌ی } s \text{ ها، همه به جز تعداد متناهی } m_n \text{ به } \mathfrak{m}^s\widehat{M_n} \text{ تعلق دارند}\}.$$

(۱۰) فرض کنید F یک R ـ مدول آزاد و $x \in \mathfrak{m}$ یک عنصر منظم روی R باشد. همانطور که در (۹) گفته شد، $\widehat{F}$ زیرمدولی از $S = \Pi_{n\in J}\widehat{R}_n$ است به طوری که برای هر n، $\widehat{R}_n = \widehat{R}$. طبق [۳۶، ۴.۲]، نگاشت $\widehat{F}/x\widehat{F} \longrightarrow S/xS$ یک به یک است. اما $S/xS \cong R/xR \otimes_R S \cong \Pi_{n\in J}(\widehat{R}_n/x\widehat{R}_n)$. چون $\widehat{R}/x\widehat{R}$ کامل است، پس طبق [۳۶، ۵.۱]، $\Pi_{n\in J}(\widehat{R}_n/x\widehat{R}_n)$ کامل است. در نتیجه S/xS کامل است و لذا طبق (۱)، $\cap_{n\geq \circ}\mathfrak{m}^n(S/xS) = \circ$. حال چون $\cap_{n\geq \circ}\mathfrak{m}^n(\widehat{F}/x\widehat{F}) \longrightarrow \cap_{n\geq \circ}\mathfrak{m}^n(S/xS)$ یک به یک است، پس داریم $\cap_{n\geq \circ}\mathfrak{m}^n(\widehat{F}/x\widehat{F}) = \circ$ و لذا طبق (۱) و (۲) و (۴)، $\widehat{F}/x\widehat{F}$ یک R ـ مدول کامل است.

لم ۱ . ۲ . ۶. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی و M یک R ـ مدول کامل در توپولوژی $\mathfrak{m}$ ـ ادیک باشد. فرض کنید $x \in \mathfrak{m}$ روی R و M منظم باشد. اگر

$$\circ \longrightarrow T \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow \circ$$

یک رشته‌ی دقیق از R ـ مدولها باشد به طوری که F یکدست کامل است، آنگاه T و T/xT هر دو در توپولوژی $\mathfrak{m}$ ـ ادیکشان کاملند.

قبل از اثبات لم توجه می‌کنیم که M/xM لزوما کامل نیست، زیرا xM لزوما در M بسته نیست. به مثال زیر از ا.م.سایمون توجه کنید:

مثال ۱ . ۲ . ۷. فرض کنید $R = k[[X,Y,Z]]$ که k یک میدان است. بگیرید $M_n = R/(XY - Z^n)$ و فرض کنید M تکمیل شده‌ی $\bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n$ باشد. با توجه به ۱ . ۲ . ۵(۹)، $M \subset \Pi_{n=1}^{\infty} M_n$. توجه می‌کنیم که X روی R و M منظم است. تصاویر X، Y و Z را در M_n به ترتیب با x_n، y_n و z_n نمایش می‌دهیم. فرض کنید $w_t = (z_1, z_2^2, z_3^3, ..., z_t^t, \circ, \circ, ...)$ برای هر t. داریم $w_t = X.v_t$ جایی که $(v_t)_i = y_i$ اگر $i \leq t$ و $(v_t)_i = \circ$ در غیر این صورت. بنابراین $w_t \in XM$. حال دنباله‌ی کشی w_t دارای حدی در $M - XM$ است، در واقع داریم

$$\lim_{t\to\infty} w_t = (z_1, z_2^2, z_3^3, ..., z_t^t, z_{t+1}^{t+1}, ...)$$

و $(z_1, z_2^2, z_3^3, ..., z_t^t, z_{t+1}^{t+1}, ...) = X(y_1, y_2, ..., y_t, y_{t+1}, ...)$ که به XM متعلق نیست، زیرا با توجه به ساختاری که طبق تعریف برای M گفته شد، $(y_1, y_2, ..., y_t, y_{t+1}, ...)$ عضوی از M نیست.

با این حال اگر F یک R ــ مدول یکدست کامل باشد، همانطور که در ۱. ۲. ۵(۴) گفته شد، F تکمیل شده‌ی یک R ــ مدول آزاد است و لذاطبق ۱. ۲. ۵(۱۰)، F/xF کامل است، در واقع xF در F بسته است. با در دست داشتن این مطلب ابتدا لم ۱. ۲. ۶ را ثابت می‌کنیم:

برهان. چون M کامل است، T در F بسته است و لذا طبق یادداشت ۱. ۲. ۵(۸) کامل است. طبق فرض رشته‌ی دقیق زیر را داریم:

$$0 \longrightarrow T/xT \longrightarrow F/xF \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0.$$

لذا $xT = T\bigcap xF$ و xT در T بسته است، زیرا $F \longrightarrow T$ پیوسته است. در نتیجه طبق ۱. ۲. ۵(۳)، T/xT کامل است. ■

یادداشت ۱. ۲. ۸. فرض کنید R یک حلقه باشد.

(۱) [۱۸، صفحه‌ی ۸۵، نتیجه‌ی ۷.۲.۳] فرض کنید $\dim(R) = d < \infty$. آنگاه برای هر R ــ مدول یکدست F، داریم $\mathrm{pd}_R(F) \leq d$.

(۲) [۲۸، صفحه‌ی ۱۴۰، لم ۲] فرض کنید M و N دو R ـ مدول باشند. فرض کنید $x \in R$ روی R و M منظم باشد و $xN = 0$. آنگاه برای هر $n \geq 0$ یکریختی های زیر را داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^n_R(M,N) &\cong \mathrm{Ext}^n_{R/xR}(M/xM,N),\\ \mathrm{Ext}^{n+1}_R(N,M) &\cong \mathrm{Ext}^n_{R/xR}(N,M/xM)\,.\end{aligned}$$

(۳) [۳۶، صفحه‌ی ۲۳۳] فرض کنید $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R و N یک R ــ مدول باشد که در توپولوژی $\mathfrak{a}$ ـ ادیک کامل است. برای هر R ـ مدول M، اگر $\mathrm{Ext}^i_R(M,N) \neq 0$، آنگاه $\mathrm{Ext}^i_R(M,N) \neq \mathfrak{a}\,\mathrm{Ext}^i_R(M,N)$.

(۴) [۱۳، صفحه‌ی ۷۹، ۴.۳.۳] فرض کنید R حلقه‌ای گورنشتاین و موضعی باشد. آنگاه برای هر R ـ مدول F داریم $\mathrm{fd}_R(F) < \infty$ اگر و فقط اگر $\mathrm{id}_R(F) < \infty$.

حال آمادگی اثبات قضیه‌ی ۱. ۲. ۳ را داریم:

برهان. حکم را با استقرا روی d ثابت می‌کنیم. در حالتی که $d = 0$ است حکم از نتیجه‌ی ۱. ۲. ۲ به دست می‌آید.

فرض کنید $d \geq 1$ باشد. فرض کنید $0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathcal{P}$ یک تحلیل آزاد برای M باشد. رشته‌ی دقیق کوتاه $\Lambda : 0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$، را در نظر بگیرید. چون $\mathrm{id}(P_0) = d$، با استفاده از ۱. ۱. ۶(۲)، داریم

$\operatorname{Ext}^i_R(N, M_۱) = ۰$ برای $i \gg ۰$.

از طرف دیگر طبق [۳۶، گزاره. ۵.۲] تحلیل یکدست کامل $۰ \longrightarrow N \longrightarrow \mathcal{F}$ برای N وجود دارد. طبق لم ۱. ۲. ۶، $N_۲$ یک R ـ مدول کامل است. همچنین طبق ۱. ۲. ۸(۱)، برای هر j، $\operatorname{pd}(F_j) \leq d$. لذا با استفاده از رشته های دقیق کوتاه $۰ \longrightarrow N_j \longrightarrow F_{j-۱} \longrightarrow N_{j-۱} \longrightarrow ۰$: Ω_j $(j = ۱, ۲)$، $\operatorname{Ext}^i_R(N_۲, M_۱) = ۰$ برای $i \gg ۰$. چون $\operatorname{depth}(R) \geq ۱$، $x \in \mathfrak{m}$ موجود است به طوری که x روی R منظم است. از آنجا که $M_۱ \subseteq P_۰$ و $N_۲ \subseteq F_۱$، پس x روی $M_۱$ و $N_۲$ نیز منظم است. لذا رشته‌ی دقیق

$$\operatorname{Ext}^i_R(N_۲, M_۱) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+۱}_R(N_۲/xN_۲, M_۱) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+۱}_R(N_۲, M_۱)$$

را داریم که از رشته‌ی دقیق کوتاه $۰ \longrightarrow N_۲ \xrightarrow{x.} N_۲ \longrightarrow N_۲/xN_۲ \longrightarrow ۰$ به دست می‌آید. بنابراین برای $i \gg ۰$ داریم $\operatorname{Ext}^i_R(N_۲/xN_۲, M_۱) = ۰$. لذا طبق ۱. ۲. ۸(۲)، $\operatorname{Ext}^i_{R/xR}(N_۲/xN_۲, M_۱/xM_۱) = ۰$ برای $i \gg ۰$. اما R/xR یک حلقه‌ی گورنشتاین موضعی از بعد $d - ۱$ است که طبق گزاره‌ی ۱. ۱. ۷، دارای ξ متناهی است. همچنین طبق لم ۱. ۲. ۶، همه‌ی N_i/xN_i ها به ازای $i \geq ۲$ کامل است و لذا طبق استقرا $\operatorname{Ext}^i_{R/xR}(M_۱/xM_۱, N_۲/xN_۲) = ۰$ برای $i \gg ۰$. حال با استفاده‌ی مجدد از ۱. ۲. ۸(۲)، $\operatorname{Ext}^i_R(M_۱, N_۲/xN_۲) = ۰$ برای $i \gg ۰$. نیز با استفاده دوباره از رشته‌ی $۰ \longrightarrow N_۲ \xrightarrow{x.} N_۲ \longrightarrow N_۲/xN_۲ \longrightarrow ۰$، رشته‌ی دقیق زیر از R ـ مدولها را خواهیم داشت:

$$\operatorname{Ext}^i_R(M_۱, N_۲/xN_۲) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+۱}_R(M_۱, N_۲) \xrightarrow{x.} \operatorname{Ext}^{i+۱}_R(M_۱, N_۲) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+۱}_R(M_۱, N_۲/xN_۲).$$

در نتیجه $\operatorname{Ext}^i_R(M_۱, N_۲) = x \operatorname{Ext}^i_R(M_۱, N_۲)$ برای $i \gg ۰$. در نتیجه با استفاده از ۱. ۲. ۸(۳)، $\operatorname{Ext}^i_R(M_۱, N_۲) = ۰$ برای $i \gg ۰$. حال چون R گورنشتاین است طبق ۱. ۲. ۸(۴)، $\operatorname{id}(F_j) \leq d$. لذا با استفاده از رشته های دقیق Ω_j $(j = ۱, ۲)$، داریم $\operatorname{Ext}^i_R(M_۱, N) = ۰$ برای $i \gg ۰$. نیز با استفاده از رشته‌ی دقیق کوتاه Λ به دست می‌آوریم $\operatorname{Ext}^i_R(M, N) = ۰$ برای $i \gg ۰$. ■

در پایان به عنوان کاربردی دیگر از ۱. ۲. ۸(۳)، با روشی مشابه بالا، یکی دیگر از خواص حلقه های گورنشتاین موضعی با ξ متناهی را بیان می‌کنیم:

گزاره ۱. ۲. ۹. *فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی گورنشتاین موضعی کامل از بعد d باشد و $\xi(R) < \infty$. بگیرید*

$$\xi'(R) = \operatorname{Sup}\{p^R(N, M) | p^R(N,M) < \infty \text{ و دلخواه است } N \text{ ،متناهی مولد } M\}.$$

آنگاه $\xi'(R)=d$.

برهان. حکم را با استقرا روی d ثابت می‌کنیم. در حالتی که $d=0$ است حکم از نتیجه‌ی ۱. ۲. ۲ و قضیه‌ی ۱. ۱. ۹ به دست می‌آید.

فرض کنید $d \geq 1$ باشد. چون $\mathrm{id}(R)=d$، پس R ـ مدول L موجود است به طوری که $\mathrm{Ext}_R^d(L,R)\neq 0$ و $\mathrm{Ext}_R^i(L,R)=0$ برای $i>d$. پس $\xi'(R)\geq d$.

فرض کنید M یک R ــ مدول متناهی مولد و N یک R ــ مدول دلخواه باشد به طوری که $\mathrm{Ext}_R^i(N,M)=0$ برای $i \gg 0$. چون $\mathrm{id}(R)=d$، پس با توجه به یادداشت ۱. ۱. ۶(۲)، می‌توان M و N را با اولین سیزیجی شان در تحلیل های آزاد عوض کرد. لذا یک عنصر $x\in \mathfrak{m}$ موجود است به طوری که x روی R، M و N منظم است. لذا با استفاده از رشته‌ی دقیق $0\longrightarrow M \xrightarrow{x.} M \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0$ مانند برهان قضیه‌ی قبل داریم $\mathrm{Ext}_R^i(N,M/xM)=0$ برای $i\gg 0$. لذا طبق ۱. ۲. ۸(۲)، $\mathrm{Ext}_{R/xR}^i(N/xN,M/xM)=0$ برای $i\gg 0$. حال با توجه به فرض استقرا $\mathrm{Ext}_{R/xR}^i(N/xN,M/xM)=0$ برای $i>d-1$. لذا با استفاده‌ی مجدد از ۱. ۲. ۸(۲) و رشته‌ی $0\longrightarrow M \xrightarrow{x.} M \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0$ داریم $\mathrm{Ext}_R^i(N,M)=x\,\mathrm{Ext}_R^i(N,M)$ برای $i>d$. اما M یک R ـ مدول کامل است. در نتیجه با استفاده از ۱. ۲. ۸(۳)، $\mathrm{Ext}_R^i(N,M)=0$ برای $i>d$.

این نشان می‌دهد که $\xi'(R)\leq d$. ■

فصل ۲

حلقه‌های دارای Ext-index متناهی

۱.۲ تاریخچه، مقدمه و چند حدس

فرض کنید R یک حلقه باشد. می‌گوییم R دارای خاصیت (ee) (برای مدولهای متناهی مولد) است هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

اگر M و N دو R ـ مدول (متناهی مولد) باشند به طوری که $\operatorname{Ext}_R^i(M,N)=0$ برای $i \gg 0$ آنگاه $\operatorname{Ext}_R^i(N,M)=0$ برای $i \gg 0$.

همانطور که در فصل اول ذکر شد، آوراموف[1] و بوخوایتز[2] خاصیت (ee) را برای مدولهای متناهی مولد روی حلقه های ci موضعی ثابت کردند. سپس آنها این سؤال را مطرح کردند که چه کلاسی از حلقه های موضعی دارای خاصیت (ee) برای مدولهای متناهی مولد هستند. آنها به این موضوع اشاره کردند که کلاس مذکور جایی بین کلاس حلقه های ci موضعی و کلاس حلقه های گورنشتاین موضعی قرار می‌گیرد. اما آنها به درستی نمی‌دانستند که آیا این کلاس واقعا برابر با یکی از کلاس‌های ci موضعی و یا گورنشتاین موضعی است یا نه.

---

[1] Avramov

[2] Buchweitz

سپس هونیکه[۳] و یورگنسن[۴] [۲۱]، خاصیت (e e) را برای مدولهای متناهی مولد روی حلقه های گورنشتاین موضعی بررسی کردند. در واقع آنها کلاسی از حلقه های گورنشتاین موضعی را تعریف کردند (که آنها را حلقه های AB نامیدند) و نشان دادند که برای مدولهای متناهی مولد روی این نوع از حلقه ها خاصیت (e e) برقرار است [۲۱، قضیه‌ی ۱.۴]. همچنین آنها ثابت کردند که کلاس معرفی شده، یعنی کلاس حلقه های AB اکیدا بزرگتر از کلاس حلقه های ci موضعی است [۲۱، قضیه‌ی ٦.۳].

سپس یورگنسن و شوگا[۵]، مثالی از حلقه های آرتینی گورنشتاین موضعی (R, m) با $\mathrm{m}^4 = 0$ و $\operatorname{codim}(R) = 6$ را معرفی کردند که دارای خاصیت (e e) برای مدولهای متناهی مولد نبود[۲۳]. به عبارت دیگر آنها نشان دادند که کلاس حلقه های AB اکیدا کوچکتر از کلاس حلقه های گورنشتاین موضعی است و به این ترتیب سؤال آوراموف و بوخوایتز به طور کامل پاسخ داده شد.

حال ما تعریف حلقه های دارای Ext-index متناهی را یادآوری می‌کنیم:

تعریف ۲. ۱. ۱. (۱) با استفاده از [۲۱]، برای حلقه‌ی دلخواه S تعریف می‌کنیم

$$\text{Ext-index}(S) = \operatorname{Sup}\{p^S(L,K) \mid p^S(L,K) < \infty \text{ و } L \text{ و } K \text{ متناهی مولدند}\}.$$

(برای تعریف $p^S(L,K)$ به ۱. ۱. ۵ مراجعه کنید.)

(۲) حلقه‌ی گورنشتاین موضعی R را AB می‌نامیم هرگاه $\text{Ext-index}(R) < \infty$.

به وضوح با توجه به تعریف، هر حلقه‌ی دارای ξ متناهی، دارای Ext-index متناهی است. در زیر مثالهای شناخته شده‌ی دیگری از حلقه های با Ext-index متناهی را ذکر می‌کنیم:

مثال ۲. ۱. ۲.

(۱) حلقه های ci موضعی [۲۱، نتیجه‌ی ۵.۳].

(۲) حلقه های گلد[٦] [۲۴، گزاره‌ی ۴.۱].

(۳) حلقه های گورنشتاین موضعی با مالتیپلیسیتی[۷] مینیمال [۲۱، قضیه‌ی ٦.۳].

---

[۳] Huneke

[۴] Jorgensen

[۵] Sega

[٦] Golod rings

[۷] Multiplicity

(۴) حلقه های گورنشتاین موضعی با codim کمتر از ۵ [۳۵، قضیه‌ی ۴.۳].

و همه‌ی حلقه های موضعی $(R,\mathfrak{m})$ که دارای یکی ازدو شرط زیر باشند:

(۵) $\mathfrak{m}^{۲} = ۰$ [۲۴، گزاره‌ی ۱.۱].

(۶) $\mathfrak{m}^{۳} = ۰$ و $\mu(\mathfrak{m}) = ۳$ [۲۴، گزاره‌ی ۱.۱].

همچنین در بخش بعد، به عنوان یک مثال جدید از حلقه های با Ext-index متناهی، توسیع بدیهی هر حلقه‌ی موضعی آرتینی $(R,\mathfrak{m})$ نسبت به $R/\mathfrak{m}$ را معرفی می‌کنیم [۳۲].

نیز هونیکه و یورگنسن در پایان مقاله‌ی [۲۱] سؤالی را راجع به موضعی سازی حلقه های AB مطرح کردند. این سؤال این بود که آیا موضعی سازی یک حلقه‌ی AB روی هر ایده‌آل اول AB است یا نه. در این فصل، طرز جدیدی از نگرش به این مسأله را مطرح کرده و به بررسی این موضوع در حالت کلی‌تر می‌پردازیم. در این راستا حدس‌های زیر را مطرح کرده و سپس به ارتباط میان این حدسها و سؤال مطرح شده می‌پردازیم ([۳۲]). همچنین جوابهای مثبتی را برای این حدسها در حالتهای خاص ارایه می‌کنیم.

حدس ۲.۱.۳. *(موضعی سازی) فرض کنید R یک حلقه باشد و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. اگر $\operatorname{Ext-index}(R) < \infty$ آنگاه $\operatorname{Ext-index}(R_{\mathfrak{p}}) < \infty$.*

حدس ۲.۱.۴. *(توسیع) فرض کنید R یک جبر روی یک میدان k باشد و ℓ یک توسیع میدانی متناهی از k باشد. اگر $\operatorname{Ext-index}(R) < \infty$ آنگاه $\operatorname{Ext-index}(R \otimes_k \ell) < \infty$.*

حدس ۲.۱.۵. *(چند جمله‌ای) فرض کنید R یک حلقه باشد. اگر $\operatorname{Ext-index}(R) < \infty$ آنگاه $\operatorname{Ext-index}(R[x]) < \infty$.*

برای سهولت حدسهای ۲.۱.۳، ۲.۱.۴ و ۲.۱.۵ را به ترتیب با **(L)**، **(E)** و **(P)** نشان می‌دهیم.

پس از بیان نتایج اولیه در بخش ۳، به ارتباط میان حدسها در بخش ۴ می‌پردازیم و نیز در بخش ۵ به بررسی برخی حالات خواهیم پرداخت که در آنها حدس‌های مذکور درست است.

۲ . ۲ توسیع های بدیهی، Ext-index متناهی و حدس آسلندر ـ ریتن

در مثال ۲. ۱. ۲ گفتیم که توسیع بدیهی هر حلقه‌ی موضعی آرتینی $(R, \mathfrak{m})$ نسبت به $R/\mathfrak{m}$ یک حلقه‌ی با Ext-index متناهی است. در این بخش به برهان این موضوع می‌پردازیم.

فرض کنید M یک R ـ مدول باشد. توسیع بدیهی R توسط M همان حلقه‌ی $R \oplus M$ است که آنرا با $R(M)$ نمایش داده و ضرب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(r, m).(r', m') = (rr', rm' + r'm).$$

می‌دانیم که همریختی های حلقه‌ای $\rho : R \longrightarrow R(M)$ به طوری که $\rho(r) = (r, ۰)$ و $\pi : R(M) \longrightarrow R$ با $\pi(r, m) = r$ موجودند و نیز $\pi\rho$ نگاشت همانی روی R می‌باشد.

یادداشت ۲. ۲. ۱. یک همبافت زنجیری مثل M از R ـ مدولها، یک خانواده $(M^n, d^n_M)_{n\in\mathbb{Z}}$ از R ـ مدولها همراه با همریختی های R ـ مدولی $d^n_M : M^n \longrightarrow M^{n+۱}$ است به طوری که $dd = ۰$. برای هر $i \in \mathbb{Z}$، $M[i]$ یک همبافت زنجیری جدید است که $M[i]^n = M^{n-i}$ و $d^n_{M[i]} = (-۱)^i d^{n-i}_M$. M یک همبافت زنجیری کراندار از راست گفته می‌شود هرگاه $a \in \mathbb{Z}$ موجود باشد به طوری که $M^n = ۰$ برای هر $n > a$. کاتگوری همبافتهای زنجیری کراندار از راست، یک زیر کاتگوری پر[۱] از کاتگوری همبافتهای زنجیری است.

اگر $N = (N^n, d^n_N)_{n\in\mathbb{Z}}$ یک همبافت زنجیری دیگر از R ـ مدولها باشد، منظور از $M \otimes_R N$ همبافتی به صورت زیر است:

$$(M \otimes_R N)^n = \coprod_{i\in\mathbb{Z}} M^i \otimes_R N^{n-i}$$

و $d^n_{M\otimes_R N}$ روی مولد $m \otimes h$ در $(M \otimes_R N)^n$ به صورت زیر عمل می‌کند:

$$d^n_{M\otimes_R N}(m \otimes h) = d^i_M(m) \otimes h + (-۱)^i m \otimes d^{n-i}_N(h).$$

نگاشت $\alpha : M \longrightarrow N$ یک کوازی ـ یکریختی گفته می‌شود هرگاه نگاشت $\mathrm{H}(\alpha) : \mathrm{H}(M) \longrightarrow \mathrm{H}(N)$ یکریختی باشد. در این صورت می‌نویسیم $M \xrightarrow{\simeq} N$. حال گوییم همبافتهای M و N هم‌ارز هستند و می‌نویسیم $M \simeq N$، اگر و فقط اگر همبافت Z و دو کوازی ـ یکریختی $M \xrightarrow{\simeq} Z \xleftarrow{\simeq} N$ موجود باشند.

اگر M و N دو همبافت زنجیری از راست کراندار از R ـ مدولها باشند، منظور از $M \otimes^{\mathbf{L}}_R N$ کلاس هم‌ارزی

---
[۱] Full subcategory

R ـ همبافتهایی است که توسط $F \otimes_R N$ و یا $M \otimes_R F'$ به دست می‌آیند، به طوری که F و F' همبافتهای زنجیری کراندار از راست هستند که هر جمله‌ی آنها یک R ـ مدول یکدست است و $M \simeq F$ و یا $N \simeq F'$. نیز برای R ـ مدولهای L و T و عدد صحیح i، می‌توان L و T را به صورت دو همبافت در نظر گرفت و در این صورت داریم $\mathrm{Tor}_i^R(L,T) = \mathrm{H}_i(L \otimes_R^{\mathbf{L}} T)$.

اگر M و N دو همبافت زنجیری از راست کراندار از R ـ مدولها باشند و $\varphi = (\varphi^n)_{n\in\mathbb{Z}} : M \longrightarrow N$ یک نگاشت بین آنها باشد، آنگاه مخروط نگاشتی[۲] از φ یک همبافت زنجیری $\mathrm{cone}(\varphi) = (\mathrm{cone}(\varphi)^n, d^n_{\mathrm{cone}(\varphi)})_{n\in\mathbb{Z}}$ است که $\mathrm{cone}(\varphi)^n = M^{n+1} \oplus N^n$ و برای $m \in M^{n+1}$ و $h \in N^n$ داریم

$$d^n_{\mathrm{cone}(\varphi)}(m,h) = (d_M^{n+1}(m), d_N^n(h) + (-1)^n \varphi^{n+1}(m)).$$

به علاوه $\mathrm{cone}(\varphi)$ دریک رشته‌ی دقیق مانند رشته‌ی زیر صدق می‌کند:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\nu} \mathrm{cone}(\varphi) \xrightarrow{\delta} M[1] \longrightarrow 0.$$

به سه تایی (φ,ν,δ) یک مثلث اکید روی φ می‌گوییم.

برای همبافتهای زنجیری از راست کراندار M و N و D و نگاشتهای داده شده‌ی $\varphi : M \longrightarrow N$، $\nu : N \longrightarrow D$ و $\omega : D \longrightarrow M[1]$، گوییم (φ,ν,ω) یک مثلث دقیق روی (M,N,D) است اگر یک مثلث اکید (φ',ν',δ) روی $\varphi' : M' \longrightarrow N'$ از همبافتهای زنجیری M' و N'، و یک نمودار جابجایی

$$\begin{array}{ccccccc}
M & \xrightarrow{\varphi} & N & \xrightarrow{\nu} & D & \xrightarrow{\omega} & M[1] \\
\downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\
M' & \xrightarrow{\varphi'} & N' & \xrightarrow{\nu'} & \mathrm{cone}(\varphi') & \xrightarrow{\delta} & M'[1]
\end{array}$$

موجود باشد به طوری که f و g و h هم‌ارزی های هموتوپی زنجیری هستند (برای تعریف، [۴۱، صفحه‌ی ۱۷] را ببینید).

در این بخش $(R,\mathfrak{m},k)$ یک حلقه‌ی موضعی است و ما تنها با توسیع بدیهی R توسط k ($R(k)$) کار خواهیم کرد. قضیه‌ی زیر قضیه‌ی اصلی این بخش می‌باشد:

قضیه ۲. ۲. ۲. *فرض کنید $(R,\mathfrak{m},k)$ یک حلقه‌ی موضعی و M و N دو $R(k)$ ـ مدول متناهی مولد ناصفر و غیر آزاد باشند. آنگاه $\mathrm{Tor}_n^{R(k)}(M,N) \neq 0$ برای هر $n \geq 3$.*

---

[۲] Mapping cone

برای اثبات این قضیه از لم کلیدی زیر استفاده می‌کنیم که در آن $x = (\circ, ۱) \in R(k)$. نیز توجه داریم که یکریختی حلقه‌ای $R \cong R(k)/xR(k)$ وجود دارد.

لم ۲.۲.۳. فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ یک حلقه‌ی موضعی و X و Y دو $R(k)$ ـ مدول باشند. فرض کنید $xX = \circ = xY$ (و لذا X و Y دو $R \cong R(k)/xR(k)$ ـ مدولند). آنگاه یکریختی زیر را برای هر $n \geq ۱$ داریم:

$$\operatorname{Tor}_n^{R(k)}(X,Y) \cong \operatorname{Tor}_n^R(X,Y) \bigoplus \coprod_{i+j=n-۱} \operatorname{Tor}_i^{R(k)}(X,k) \otimes_k \operatorname{Tor}_j^R(k,Y).$$

برهان. بگیرید $A = R(k)$. در این برهان ما همواره R را همان حلقه‌ی A/xA در نظر می‌گیریم و نماد A/xA را به جای R به کار می‌بریم. با توجه به اینکه $xA = xk$، رشته‌ی دقیق زیر از A ـ مدولها را داریم:

$$\circ \longrightarrow k \xrightarrow{x\cdot} A \longrightarrow A/xA \longrightarrow \circ.$$

لذا با تانسور کردن این رشته در A/xA ـ مدول X، مثلث زیر را در کاتگوری مشتق شده‌ی $\mathrm{D}^-(A/xA)$ از همبافتهای از راست کراندار از A/xA ـ مدولها داریم (برای تعریف کاتگوری مشتق شده، به [۴۱، فصل ۱۰] مراجعه کنید) :

$$X \otimes_A^{\mathbf{L}} k \longrightarrow X \otimes_A^{\mathbf{L}} A \xrightarrow{\pi} X \otimes_A^{\mathbf{L}} A/xA \longrightarrow (X \otimes_A^{\mathbf{L}} k)[۱].$$

حال بالابر[۳] طبیعی $\varepsilon : X \otimes_A^{\mathbf{L}} A/xA \longrightarrow \mathrm{H}_\circ(X \otimes_A^{\mathbf{L}} A/xA) = X \otimes_A A/xA$ را در نظر بگیرید. چون طبق فرض $X \otimes_A A/xA = X$، نمودار جابجایی زیر را در $\mathrm{D}^-(A/xA)$ داریم:

$$\begin{array}{ccc} X \otimes_A^{\mathbf{L}} A & \xrightarrow{\pi} & X \otimes_A^{\mathbf{L}} A/xA \\ \downarrow{\cong} & & \downarrow{\varepsilon} \\ X & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{H}_\circ(X \otimes_A^{\mathbf{L}} A/xA). \end{array}$$

در نتیجه π دارای وارون چپ در کاتگوری $\mathrm{D}^-(A/xA)$ است و لذا مثلث بالا شکافته شده و یکریختی زیر را در $\mathrm{D}^-(A/xA)$ می‌دهد:

$$X \otimes_A^{\mathbf{L}} A/xA \cong X \oplus (X \otimes_A^{\mathbf{L}} k)[۱].$$

حال فانکتورهای $- \otimes_{A/xA}^{\mathbf{L}} Y$ را روی یکریختی اخیر اعمال کرده و در نتیجه یکریختی زیر را در $\mathrm{D}^-(A/xA)$ به دست می آوریم:

$$X \otimes_A^{\mathbf{L}} Y \cong (X \otimes_{A/xA}^{\mathbf{L}} Y) \oplus ((X \otimes_A^{\mathbf{L}} k) \otimes_k^{\mathbf{L}} (k \otimes_{A/xA}^{\mathbf{L}} Y))[۱].$$

---

[۳] Augmentation

حال با همولوژی گرفتن از طرفین حکم به دست می‌آید. ■

یادداشت ۲. ۲. ۴. فرض کنید $(S, \mathfrak{n}, \ell)$ یک حلقه‌ی موضعی باشد و M و N دو S ـ مدول باشند به طوری که $\operatorname{length}_S(\operatorname{Tor}_n^S(M,N)) < \infty$ برای هر n. آنگاه فانکتورهای $\mathrm{P}_{M,N}^S(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{P}_{M,N}^S(t) = \sum_{n\geq \circ} \operatorname{length}_S(\operatorname{Tor}_n^S(M,N))t^n.$$

می‌دانیم که سری پوانکاره‌ی $\mathrm{P}_M^S(t)$ از M، همان $\mathrm{P}_{\ell,M}^S(t)$ می‌باشد و نیز سری پوانکاره‌ی $\mathrm{P}_\ell^S(t)$ را به اختصار با $\mathrm{P}_S(t)$ نمایش می‌دهیم.

توجه کنید که از لم ۲. ۲. ۳ به راحتی نتیجه می‌شود

$$\mathrm{P}_{M,N}^{R(k)}(t) = \mathrm{P}_{M,N}^R(t) + \mathrm{P}_M^{R(k)}(t)\, \mathrm{P}_N^R(t)t$$

به طوری که M و N، R ـ مدولهای متناهی مولدند و $\operatorname{length}_{R(k)}(\operatorname{Tor}_n^{R(k)}(M,N)) < \infty$ برای هر n. با در نظر گرفتن $M = N = k$، به دست می‌آوریم:

$$\mathrm{P}_{R(k)}(t) = \mathrm{P}_R(t)(\text{۱} - \mathrm{P}_R(t)t)^{-\text{۱}}$$

که حالت خاصی از قضیه‌ی گولیکسن[۴] است [۱۹، قضیه‌ی ۲].

حال به برهان قضیه‌ی ۲. ۲. ۲ می‌پردازیم:

برهان. فرض کنید $A = R(k)$، $x = (\circ, \text{۱})$ و $\mathfrak{n}$ ایده‌آل ماکسیمال A باشد که می‌دانیم $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \oplus k$. توجه داریم که $x\mathfrak{n} = \circ$. فرض کنید $n \geq \text{۳}$ وجود داشته باشد به طوری که $\operatorname{Tor}_n^A(M,N) = \circ$. چون $\operatorname{Tor}_n^A(M,N) \cong \operatorname{Tor}_{n-\text{۲}}^A(\Omega M, \Omega N)$ جایی که ΩM (به ترتیب ΩN) سیزیجی اول M (به ترتیب N) در تحلیل آزاد مینیمال است. می‌دانیم $\Omega M \subseteq \mathfrak{n}F$ و $\Omega N \subseteq \mathfrak{n}G$ برای A ـــ مدولهای آزاد F و G. بنابراین $x\Omega M \subseteq x\mathfrak{n}F = \circ$ و $x\Omega N \subseteq x\mathfrak{n}G = \circ$. در نتیجه لم قبل را می‌توانیم برای A ـ مدولهای ΩM و ΩN به کار ببریم. حال چون $\operatorname{Tor}_{n-\text{۲}}^A(\Omega M, \Omega N) = \circ$ برای یک $n \geq \text{۳}$، طبق لم ۲. ۲. ۳ تساوی $\operatorname{Tor}_{n-\text{۳}}^A(\Omega M, k) \otimes_k (\Omega N \otimes_R k) = \circ$ را داریم. در نتیجه یا $\Omega N \otimes_R k = \circ$ و یا $\operatorname{Tor}_{n-\text{۳}}^A(\Omega M, k) = \circ$ برای یک $n \geq \text{۳}$. در حالت اول N یک A ـ مدول آزاد است که خلاف فرض است. اما در حالت دوم ΩM یا صفر است و یا به عنوان A ـ مدول دارای بعد پروژکتیو متناهی است. چون صفر بودن ΩM خلاف فرض است، پس

---

۴ Gulliksen

$\mathrm{pd}_A(\Omega M) < \infty$ و لذا $\mathrm{pd}_A(M) < \infty$. اما چون $\mathrm{depth}(A) = 0$، پس طبق فرمول آسلندر ـ بوکسبام[5] داریم $\mathrm{pd}_A(M) = 0$. بنابراین M یک A ـ مدول آزاد است که باز هم تناقض است. ■

حال مثالی از یک حلقه‌ی موضعی $(R, \mathfrak{m}, k)$ و $R(k)$ ـ مدولهای ناصفر غیر آزاد ارایه می‌کنیم به طوری که یکی از دو Tor اول در قضیه‌ی ۲. ۲. ۲ در آن صفر شود.

مثال ۲. ۲. ۵. فرض کنید $R = k[[Y]]$ که k یک میدان دلخواه است. بگیرید $A = R(k)$ و فرض کنید x و y تصاویر X و Y در A باشند. به راحتی می‌توان دید که $\varphi : k[[X,Y]]/(X^2, XY) \longrightarrow A$ با ضابطه‌ی $\varphi(\overline{1}) = (1, 0)$، $\varphi(\overline{X}) = (0, 1)$ و $\varphi(\overline{Y}) = y$ یکریختی است. حال رشته‌ی زیر قسمتی از تحلیل آزاد مینیمال برای A ـ مدول A/yA است:

$$A^2 \xrightarrow{(x,y)} A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{y} A \longrightarrow A/yA \longrightarrow 0.$$

با توجه به این موضوع که $A/Ay \cong k[[x]]/(x^2)$ و $A/Ax \cong k[[y]]$ و استفاده از رشته‌ی بالا، به راحتی دیده می‌شود که:

$$\mathrm{Tor}_i^A(A/Ay, A/Ay) \begin{cases} \neq 0 & (i = 1) \\ = 0 & (i = 2) \end{cases}$$

و

$$\mathrm{Tor}_i^A(A/Ay, A/Ax) \begin{cases} = 0 & (i = 1) \\ \neq 0 & (i = 2) \end{cases}.$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه‌ی ۲. ۲. ۲ می‌دانیم که $\mathrm{Tor}_i^A(A/Ay, A/Ay) \neq 0$ و $\mathrm{Tor}_i^A(A/Ay, A/Ax) \neq 0$ برای هر $i \geq 3$.

حال به عنوان کاربردهایی از قضیه‌ی ۲. ۲. ۲ نتایج زیر را بیان می‌کنیم:

نتیجه ۲. ۲. ۶. *فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ یک حلقه‌ی موضعی آرتینی و M و N دو $R(k)$ ـ مدول متناهی مولد ناصفر باشند. اگر $\mathrm{Ext}^i_{R(k)}(M, N) = 0$ برای یک $i \geq 3$، آنگاه یا M یک $R(k)$ ـ مدول آزاد است و یا N یک $R(k)$ ـ مدول انژکتیو است. به عبارت دیگر $\mathrm{Ext\text{-}index}(R(k)) = 0$.*

برهان. می‌دانیم $\mathrm{Ext}^i_{R(k)}(M, N)^\vee \cong \mathrm{Tor}_i^{R(k)}(M, N^\vee)$ و در نتیجه $\mathrm{Tor}_i^{R(k)}(M, N^\vee) = 0$ برای یک $i \geq 3$. لذا طبق قضیه‌ی ۲. ۲. ۲ یکی از دو $R(k)$ ـ مدول M و $N^\vee$ آزاد است. اما از حالت دوم نتیجه می‌شود که برای هر ایده‌آل $\mathfrak{a}$ از $R(k)$ و هر $i > 0$ داریم $\mathrm{Tor}_i^{R(k)}(R(k)/\mathfrak{a}, N^\vee) = 0$. لذا طبق توضیحی که در بخش

[5] Auslander-Buchsbaum formula

۲.۱ بیان شد، برای هر ایده‌آل $\mathfrak{a}$ از $R(k)$ و هر $i > 0$ داریم $\mathrm{Ext}^i_{R(k)}(R(k)/\mathfrak{a}, N) = 0$ و این معادل با انژکتیو بودن N است. ■

لم ۲. ۲. ۷. اگر $(R, \mathfrak{m}, k)$ یک حلقه‌ی موضعی آرتینی باشد، آنگاه $R(k)$ گورنشتاین است اگر و فقط اگر $\mathfrak{m} = 0$ (به عبارت دیگر R میدان باشد).

برهان. اگر $\mathfrak{m} = 0$، آنگاه $R = k$ و در نتیجه $R(k) \cong k[x]/(x^2)$. لذا $R(k)$ یک حلقه‌ی ci است.

حال فرض کنید $\mathfrak{m} \neq 0$. چون R آرتینی است، پس $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(R)$ و لذا $\mathrm{socle}(R) \neq 0$. پس $\dim_k(\mathrm{socle}(R)) > 0$. از طرف دیگر می‌دانیم $(0, 1) \in \mathrm{socle}(R(k))$. نیز به راحتی می‌توان دید که اگر $y \in \mathrm{socle}(R)$، آنگاه $(y, 0) \in \mathrm{socle}(R(k))$ و همچنین اگر $\{y_i\}_{i=1}^n$ یک پایه برای $\mathrm{socle}(R)$ به عنوان k ــ فضای برداری باشد، آنگاه $\{(y_i, 0)\}_{i=1}^n \cup \{(0, 1)\}$ یک پایه برای $\mathrm{socle}(R(k))$ به عنوان k ــ فضای برداری است. لذا $\dim_k(\mathrm{socle}(R(k))) = \dim_k(\mathrm{socle}(R)) + 1$ و این نشان می‌دهد که $\dim_k(\mathrm{socle}(R(k))) > 1$. پس $R(k)$ نمی‌تواند حلقه‌ای گورنشتاین باشد. ■

نتیجه ۲. ۲. ۸. *فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ یک حلقه‌ی موضعی آرتینی با $\mathfrak{m} \neq 0$ و $E = E_{R(k)}(k)$ پوشش انژکتیو $R(k)$ ـ مدول k باشد. آنگاه $\mathrm{Ext}^i_{R(k)}(E, R(k)) \neq 0$ برای هر $i \geq 3$.*

برهان. به برهان خلف فرض کنید $\mathrm{Ext}^i_{R(k)}(E, R(k)) = 0$ برای یک $i \geq 3$. طبق نتیجه‌ی ۲. ۲. ۶، یا E یک $R(k)$ ـ مدول آزاد است و یا $R(k)$ یک $R(k)$ ـ مدول انژکتیو است. در هر دو حالت $R(k)$ باید یک حلقه‌ی گورنشتاین باشد. اما طبق لم قبل، $R(k)$ نمی‌تواند حلقه‌ای گورنشتاین باشد. ■

بیش از ۳۰ سال پیش، آسلندر[۶] و ریتن[۷] [۶]، حدس زیر را مطرح کردند که حالت کلی تری از یک حدس ناکایاما[۸] بود:

حدس ۲. ۲. ۹. *فرض کنید که Λ یک جبر آرتین (یک حلقه‌ی (نه لزوما جابجایی) آرتینی که به عنوان مدول روی مرکزش متناهی مولد است) باشد. آنگاه هر Λ ـ مدول انژکتیو تجزیه ناپذیر به عنوان یک جمعوند مستقیم در تحلیل انژکتیو مینیمال Λ ظاهر می‌شود.*

آنها نشان دادند که حدس بالا برای جبرهای آرتین برقرار است اگر و تنها اگر حدس زیر برای جبرهای

---

[۶] Auslander

[۷] Reiten

[۸] Nakayama

آرتین برقرار باشد:

حدس ۲. ۲. ۱۰. *فرض کنید Λ یک جبر آرتین و M یک Λ ــ مدول متناهی مولد باشد. اگر $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, M\oplus\Lambda)=0$ برای هر $i>0$، آنگاه M پروژکتیو است.*

به حدس ۲. ۲. ۱۰ حدس آسلندر ـ ریتن گفته می‌شود. لازم به ذکر است که آسلندر و ریتن این حدس را برای کلاس‌های متعددی از حلقه ها از جمله حلقه های دارای نمایش نوع متناهی[۹] و حلقه هایی که رادیکال جیکبسن آنها به توان ۲ برابر صفر است، ثابت کردند ([٦]). سپس آسلندر، دینگ[۱۰] و سلبرگ[۱۱] این موارد را برای حلقه‌های جابجایی بررسی کردند. در واقع آنها حدس ۲. ۲. ۱۰ را در حالت کلی (نه لزوما آرتینی) مطالعه کردند ([۵]). آنها ثابت کردند که برای هر حلقه‌ی ci موضعی شرط زیر برقرار است:

(ARC): فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی نوتری و M یک R ــ مدول متناهی مولد باشد. اگر $\operatorname{Ext}^i_R(M, M\oplus R)=0$ برای هر $i>0$، آنگاه M پروژکتیو است.

سپس آرایا[۱۲] و یوشینو[۱۳] نتیجه‌ی بهتری از این موضوع را ثابت کردند ([۳]). در واقع آنها نشان دادند که روی هر حلقه‌ی موضعی R، گزاره‌ی ARC برای R ـ مدولهای با ci-dim متناهی درست است.

اگر $(R, \mathfrak{m}, k)$ یک حلقه‌ی موضعی باشد، در اینجا ما به بررسی این حدس روی حلقه‌ی $R(k)$ می‌پردازیم. می‌دانیم طبق [۱۴، قضیه ۳.۲]، حلقه‌های دارای Ext-index متناهی شرط ARC را برآورده می‌کنند. در زیر نتیجه‌ی بسیار قوی تری از این گزاره را وقتی که $\dim(R)=0$ است ثابت می‌کنیم:

نتیجه ۲. ۲. ۱۱. *فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ یک حلقه‌ی موضعی آرتینی و M یک $R(k)$ ـ مدول متناهی مولد باشد. فرض کنید $\operatorname{Ext}^i_{R(k)}(M, M\oplus R(k))=0$ برای یک عدد طبیعی $i\geq 3$. آنگاه M یک $R(k)$ ـ مدول آزاد است.*

برهان. طبق نتیجه‌ی ۲. ۲. ٦، یا M یک $R(k)$ ـ مدول آزاد است و یا $M\oplus R(k)$ یک $R(k)$ ـ مدول انژکتیو است. در حالت دوم $R(k)$ بایستی حلقه‌ی گورنشتاین باشد. اما همچنان که در لم ۲. ۲. ۷ بیان شد، چنین چیزی فقط وقتی امکانپذیر است که $\mathfrak{m}=0$. اما در این حالت R یک میدان است و $R(k)$ حلقه‌ای ci است (در

---

[۹] Of finite representation type

[۱۰] Ding

[۱۱] Solberg

[۱۲] Araya

[۱۳] Yoshino

این حالت طبق آنچه در لم ۲. ۲. ۷ بیان شد، $(R(k) \cong k[x]/(x^{۲}))$. پس اگر فرض کنیم $\mathfrak{n}$ ایده‌آل ماکسیمال $R(k)$ است، داریم $\mathfrak{n}^{۲} = ۰$. حال اگر M یک $R(k)$ ـ مدول آزاد نباشد و فرض کنیم $\Omega(M)$ سیزیجی اول M در تحلیل آزاد مینیمال M به عنوان $R(k)$ ـ مدول باشد، آنگاه $\mathfrak{n}\Omega(M) = ۰$ و لذا $\Omega(M) \cong \bigoplus_{i=۱}^{s} k$. چون طبق ۱. ۱. ۶(۲) داریم $\operatorname{Ext}^i_{R(k)}(M, M) \cong \operatorname{Ext}^{i-۱}_{R(k)}(\Omega(M), M)$، پس داریم $\operatorname{Ext}^i_{R(k)}(k, M) = ۰$ برای یک $i \geq ۲$ و این نتیجه می‌دهد که $\operatorname{id}_{R(k)}(M) < \infty$. چون $R(k)$ گورنشتاین است پس $\operatorname{pd}_{R(k)}(M) < \infty$ و این نتیجه می‌دهد M یک $R(k)$ ـ مدول آزاد است که تناقض است. پس M یک $R(k)$ ـ مدول آزاد است. ■

۲. ۳ نتایج اولیه

در ابتدا به چند حقیقت در مورد Ext-index حلقه ها اشاره می‌کنیم:

لم ۲. ۳. ۱.

(۱) فرض کنید $R \longrightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ای یکدست باوفا باشد. در این صورت نامساوی $\text{Ext-index}(R) \leq \text{Ext-index}(S)$ را داریم. به عبارت دیگر اگر $\text{Ext-index}(S) < \infty$، آنگاه $\text{Ext-index}(R) < \infty$.

(۲) فرض کنید $R = R_۱ \times R_۲$ ضرب حلقه ها باشد. آنگاه تساوی زیر را داریم:

$$\text{Ext-index}(R) = \operatorname{Sup}\{\text{Ext-index}(R_۱), \text{Ext-index}(R_۲)\}.$$

به عبارت دیگر $\text{Ext-index}(R) < \infty$ اگر و تنها اگر $\text{Ext-index}(R_i) < \infty$ برای $i = ۱, ۲$.

(۳) فرض کنید x یک عنصر منظم روی R باشد. آنگاه نامساوی $\text{Ext-index}(R) - ۱ \leq \text{Ext-index}(R/xR)$ را داریم. به عبارت دیگر اگر $\text{Ext-index}(R) < \infty$، آنگاه $\text{Ext-index}(R/xR) < \infty$.

(۴) فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی کوهن ـ مکولی موضعی و $x \in \mathfrak{m}$ یک عنصر منظم روی R باشد. در این صورت اگر $\text{Ext-index}(R/xR) < \infty$، آنگاه $\text{Ext-index}(R) < \infty$.

(۵) فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی کوهن ـ مکولی موضعی باشد به طوری که $\text{Ext-index}(R) < \infty$. در این صورت $\text{Ext-index}(\widehat{R}) < \infty$.

برهان. (۱) فرض کنید M و N دو R ــ مدول متناهی مولد باشند. آنگاه برای هر $i \geq ۰$ می‌دانیم $\mathrm{Ext}^i_R(M,N) = ۰$ اگر و فقط اگر $\mathrm{Ext}^i_S(M \otimes_R S, N \otimes_R S) = ۰$. لذا حکم به وضوح از این مطلب نتیجه می‌شود.

(۲) همانطور که در [۱۴، گزاره‌ی ۳.۵] می‌توان دید، برای هر $i > ۰$ و هر R ـ مدول M و N یکریختی زیر را داریم

$$\mathrm{Ext}^i_R(M,N) \cong \mathrm{Ext}^i_{R_۱}((۱,۰)M,(۱,۰)N) \oplus \mathrm{Ext}^i_{R_۲}((۰,۱)M,(۰,۱)N).$$

پس به وضوح $\mathrm{Ext\text{-}index}(R) \leq \mathrm{Sup}\{\mathrm{Ext\text{-}index}(R_۱), \mathrm{Ext\text{-}index}(R_۲)\}$.

بر عکس، فرض کنید M و N دو $R_۱$ ـ مدول باشند به طوری که برای هر $i \gg ۰$ داریم $\mathrm{Ext}^i_{R_۱}(M,N) = ۰$. طبق یکریختی بالا داریم

$$\mathrm{Ext}^i_R(M \times R_۲, N \times R_۲) \cong \mathrm{Ext}^i_{R_۱}(M,N) \oplus ۰.$$

پس به وضوح $\mathrm{Ext\text{-}index}(R_۱) \leq \mathrm{Ext\text{-}index}(R)$. مشابها $\mathrm{Ext\text{-}index}(R_۲) \leq \mathrm{Ext\text{-}index}(R)$ و لذا حکم برقرار است.

(۳) کاملا مشابه با برهان ۱.۱.۷(۱) ثابت می‌شود.

برای (۴) و (۵) به [۲۱، گزاره‌ی ۳.۳(۱)] و [۱۴، یادداشت ۷.۵] مراجعه کنید. ■

در ادامه حالت خاصی از حدس (**L**) را بیان و اثبات می‌کنیم. توجه کنید که $\mathrm{Max}(R)$ (به ترتیب $\mathrm{Min}(R)$) مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آلهای ماکسیمال (به ترتیب ایده‌آلهای اول مینیمال) R است.

لم ۲.۳.۲. فرض کنید $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R) \cap \mathrm{Min}(R)$. آنگاه

$$\mathrm{Ext\text{-}index}(R_\mathfrak{m}) \leq \mathrm{Ext\text{-}index}(R).$$

در نتیجه اگر $\mathrm{Ext\text{-}index}(R) < \infty$، آنگاه $\mathrm{Ext\text{-}index}(R_\mathfrak{m}) < \infty$.

برهان. فرض کنید $Q_۱ \cap Q_۲ = (۰)$ یک تجزیه‌ی اولیه‌ی غیر تکراری باشد به طوری که $Q_۱$ قسمت $\mathfrak{m}$ ـ اولیه و $Q_۲$ اشتراک قسمتهای دیگر باشد که به ایده‌آلهای اول دیگر تعلق دارند. چون $\mathfrak{m}$ ایده‌آل ماکسیمال است، $Q_۱ + Q_۲ = R$ و در نتیجه $R \cong R/Q_۱ \times R/Q_۲$. چون $(Q_۱)_\mathfrak{m} = (۰)_\mathfrak{m}$، داریم $R_\mathfrak{m} \cong (R/Q_۱)_\mathfrak{m} \cong R/Q_۱$. لذا حکم از لم ۲.۳.۱(۲) نتیجه می‌شود. ■

نتیجه ۲.۳.۳. *اگر R یک حلقه‌ی آرتینی با $\text{Ext-index}(R) < \infty$ باشد، آنگاه $\text{Ext-index}(R_\mathfrak{p}) < \infty$ برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R.*

لم ۲.۳.۴. فرض کنید R یک حلقه‌ی کوهن ـ مکولی باشد به طوری که $\text{Ext-index}(R) < \infty$. در این صورت $\text{Ext-index}(R_\mathfrak{m}) < \infty$ برای هر ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از R.

برهان. فرض کنید $d = \text{ht}_R(\mathfrak{m}) \geq 0$. یک R ــ رشته‌ی منظم $x_1,...x_d \in \mathfrak{m}$ در نظر بگیرید. طبق ۲.۳.۱(۳)، $\text{Ext-index}(R/(x_1,\dots,x_d)R) < \infty$. لذا طبق لم ۲.۳.۲، $(R/(x_1,\dots,x_d))_\mathfrak{m}$ یک حلقه‌ی آرتینی با Ext-index متناهی است. با اعمال لم ۲.۳.۱(۴)، به دست می‌آوریم که $R_\mathfrak{m}$ دارای Ext-index متناهی است. ■

لم ۲.۳.۵. فرض کنید R یک حلقه‌ی گورنشتاین باشد به طوری که $\dim(R) < \infty$.

(۱) اگر $\text{Ext-index}(R) < \infty$، آنگاه $\text{Ext-index}(R) = \dim(R)$.

(۲) اگر $\text{Ext-index}(R_\mathfrak{m}) < \infty$ برای هر $\mathfrak{m} \in \text{Max}(R)$، آنگاه $\text{Ext-index}(R) < \infty$.

قبل از اثبات این لم، توجه کنید که وقتی R یک حلقه‌ی AB است تساوی (۱) در [۲۱، گزاره‌ی ۲.۳] نشان داده شده است. همچنین این موضوع را موری[1] ([۲۹]) در حالتهای ناجابجایی نیز گفته است. در پایین ما برهان این قسمت را برای راحتی بیان می‌کنیم:

برهان. (۱) فرض کنید $\mathfrak{m} \in \text{Max}(R)$. طبق ۲.۳.۴ می‌دانیم که $R_\mathfrak{m}$ نیز یک حلقه‌ی AB است. در نتیجه طبق گزاره‌ی بیان شده در بالا از [۲۱]، داریم $\text{Ext-index}(R_\mathfrak{m}) = \text{ht}(\mathfrak{m}) \leq \dim(R)$.

حال فرض کنید M و N، R ـ مدولهای متناهی مولد باشند به طوری که $\text{Ext}^i_R(M,N) = 0$ برای $i \gg 0$. پس $\text{Ext}^i_{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m},N_\mathfrak{m}) = 0$ برای $i \gg 0$ و لذا $\text{Ext}^i_{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m},N_\mathfrak{m}) = 0$ برای $i > \dim(R) \geq \text{Ext-index}(R_\mathfrak{m})$. چون این برای هر ایده‌آل ماکسیمال از R برقرار است، پس $\text{Ext}^i_R(M,N) = 0$ برای هر $i > \dim(R)$. بنابراین $\text{Ext-index}(R) \leq \dim(R)$.

از طرف دیگر چون $\dim(R) = \text{id}(R)$، R ـ مدول متناهی مولد L موجود است به طوری که $\text{Ext}^d(L,R) \neq 0$ و $\text{Ext}^i(L,R) = 0$ برای هر $i > d = \dim(R)$. این نشان می‌دهد که $\dim(R) \leq \text{Ext-index}(R)$.

---

[1] Mori

(۲) با روشی کاملا مشابه (۱)، نامساوی های زیر را داریم:

$$\text{Ext-index}(R) \leq \text{Sup}\left\{\text{Ext-index}(R_{\mathfrak{m}}) \middle| \mathfrak{m} \in \text{Max}(R)\right\} \leq \dim(R) < \infty.$$

■

۴.۲ ارتباط میان حدس‌ها

در این بخش به بیان ارتباط میان حدسهای (**L**)، (**E**) و (**P**) که در بخش ۱.۲ مطرح شد می‌پردازیم.

تعریف ۲. ۴. ۱. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی باشد که شامل یک میدان است و فرض کنید k یک زیرمیدان R باشد. گوییم k میدان ضریب [۱] R است اگر $R = k + \mathfrak{m}$.

یادداشت ۲. ۴. ۲. با استفاده از [۲۸، قضیه‌ی ۳.۲۸ و صفحه‌ی ۲۱۵]، داریم هر حلقه‌ی کامل موضعی که شامل یک میدان است دارای میدان ضریب است.

قضیه ۲. ۴. ۳.

*(۱) فرض کنید حدس (**P**) برای همه‌ی حلقه‌های کوهن ـ مکولی موضعی R با $\dim(R) = 1$ درست باشد. آنگاه حدس (**L**) برای همه‌ی حلقه‌های کوهن ـ مکولی موضعی از هر بعد متناهی دلخواه درست است.*

*(۲) فرض کنید حدس (**P**) برای یک k ـ جبر (k یک میدان است) R درست باشد. آنگاه حدس (**E**) برای R و هر توسیع جبری ساده‌ی ℓ از k درست است.*

*(۳) فرض کنید حدس‌های (**L**) و (**E**) برای همه‌ی حلقه‌های گورنشتاین که شامل یک میدان هستند درست باشد. آنگاه حدس (**P**) برای همه‌ی حلقه‌های گورنشتاین با بعد متناهی که شامل یک میدان هستند درست است.*

برهان. (۱) فرض کنید حدس (**P**) برای همه‌ی حلقه‌های کوهن ــ مکولی موضعی با بعد ۱ درست باشد. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی کوهن ــ مکولی موضعی و $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$، و نیز فرض کنید که $\text{Ext-index}(R) < \infty$. برای اینکه ثابت کنیم $\text{Ext-index}(R_{\mathfrak{p}}) < \infty$، با استقرا روی $\text{ht}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p})$،

---
[۱] Coefficient field

می‌توان فرض کرد که $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) = ۱$، زیرا اگر فرض کنیم $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) = e + ۱$، با در نظر گرفتن رشته‌ی $\mathfrak{m} \supsetneq \mathfrak{p}_e \supsetneq \mathfrak{p}_{e-۱} \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_۱ \supsetneq \mathfrak{p}$ از ایده‌آلهای اول R داریم $\text{Ext-index}(R_{\mathfrak{p}_e}) < \infty$. حال با در نظر گرفتن حلقه‌ی موضعی $R_{\mathfrak{p}_e}$ و فرض و یکریختی $R_{\mathfrak{p}_{e-۱}} \cong (R_{\mathfrak{p}_e})_{\mathfrak{p}_{e-۱}R_{\mathfrak{p}_e}}$، داریم $\text{Ext-index}(R_{\mathfrak{p}_{e-۱}}) < \infty$ و با ادامه‌ی این روند خواهیم داشت $\text{Ext-index}(R_{\mathfrak{p}}) < \infty$.

فرض کنید $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = h$ و $x_۱, \ldots, x_h \in \mathfrak{p}$ یک R ـــ رشته‌ی ماکسیمال باشد. نیز فرض کنید $\overline{R} = R/(x_۱, \ldots, x_h)R$. با توجه به لم ۲. ۳. ۱ (۳) و (۴)، با تعویض جای R و $\overline{R}$، می‌توان فرض کرد که $\dim(R) = ۱$ و $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$. حال یک عنصر منظم روی R مثل $a \in \mathfrak{m}$ انتخاب کنید. R_a حلقه‌ی کسرهای R نسبت به مجموعه‌ی ضربی $\{a^i \mid i \geq ۰\}$ را در نظر بگیرید. به راحتی می‌توان دید که یکریختی حلقه‌ای $R_a \cong R[x]/(ax - ۱)$ را داریم. چون $\text{Ext-index}(R[x]) < \infty$، پس طبق لم ۲. ۳. ۱ (۳)، R_a نیز دارای Ext-index متناهی است. چون R_a یک حلقه‌ی آرتینی است و a به $\mathfrak{p}$ متعلق نیست، طبق نتیجه‌ی ۲. ۳. ۳ داریم $\text{Ext-index}((R_a)_{\mathfrak{p}R_a}) < \infty$. بنابراین $\text{Ext-index}(R_{\mathfrak{p}}) < \infty$.

(۲) فرض کنید R یک k ـ جبر (k یک میدان است) باشد به طوری که $\text{Ext-index}(R) < \infty$. فرض کنید $\ell = k(\alpha)$ یک توسیع جبری ساده از k باشد. فرض کنید $f(x)$ چند جمله‌ای مینیمال α روی k باشد. آنگاه $R \otimes_k \ell \cong R[x]/(f(x))$. چون طبق فرض $\text{Ext-index}(R[x]) < \infty$، طبق لم ۲. ۳. ۱ (۳)، $\text{Ext-index}(R[x]/(f(x)))$ نیز متناهی است.

(۳) فرض کنید R یک حلقه‌ی گورنشتاین با بعد متناهی باشد که شامل یک میدان است و $\text{Ext-index}(R) < \infty$. برای اینکه ثابت کنیم $\text{Ext-index}(R[x]) < \infty$، طبق لم ۲. ۳. ۵(۲)، کافی است برای هر ایده‌آل ماکسیمال دلخواه $\mathfrak{M}$ از $R[x]$ ثابت کنیم $\text{Ext-index}(R[x]_{\mathfrak{M}}) < \infty$.

فرض کنید $\mathfrak{p} = \mathfrak{M} \cap R$. طبق فرض می‌دانیم که $\text{Ext-index}(R_{\mathfrak{p}}) < \infty$. لذا با تعویض R با $R_{\mathfrak{p}}$ می‌توان فرض کرد که $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی گورنشتاین با Ext-index متناهی است و $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap R$. همچنین با توجه به لم ۲. ۳. ۱(۱) و (۵)، می‌توان فرض کرد که R حلقه‌ای کامل و موضعی است. چون R شامل یک میدان است، R دارای میدان ضریبی مثل k است. پس چند جمله‌ای تحویل ناپذیر و ناصفر $f \in k[x]$ موجود است به طوری که $\mathfrak{M} = (f, \mathfrak{m})R[x]$. حلقه‌ی $(R[x]/(f))_{\mathfrak{M}}$ را در نظر بگیرید. این حلقه موضعی سازی حلقه‌ی $R \otimes_k k[x]/(f)$ است. پس چون حدس‌های **(L)** و **(E)** برقرار هستند، حلقه‌ی $(R[x]/(f))_{\mathfrak{M}}$ دارای Ext-index متناهی است. حال طبق لم ۲. ۳. ۱ (۴)، متناهی بودن $\text{Ext-index}(R[x]_{\mathfrak{M}})$ از متناهی بودن

$\mathrm{Ext\text{-}index}((R[x]/(f))_{\mathfrak{M}})$ نتیجه می‌شود. ■

۲ . ۵ جواب‌های مثبت به حدس‌ها در بعضی حالات خاص

در ابتدا، به عنوان پاسخ مثبتی به حدس $(\mathbf{P})$ در حالت خاص، گزاره‌ی زیر را مطرح می‌کنیم:

گزاره ۲ . ۵ . ۱ . *فرض کنید R یک حلقه‌ی آرتینی گورنشتاین با Ext-index متناهی باشد و همه‌ی میدانهای خارج قسمتی R به طور جبری بسته باشند. آنگاه $\mathrm{Ext\text{-}index}(R[x_1,\cdots,x_n]) < \infty$.*

برهان. طبق لم ۲ . ۳ . ۵(۲)، کافی است ثابت کنیم $\mathrm{Ext\text{-}index}(R[x_1,\cdots,x_n]_{\mathfrak{M}}) < \infty$ برای هر ایده‌آل ماکسیمال دلخواه $\mathfrak{M}$ از $R[x_1,\cdots,x_n]$. چون R آرتینی است، $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap R$ یک ایده‌آل ماکسیمال از R است و $R/\mathfrak{m}$ به طور جبری بسته است. $\mathfrak{M}/\mathfrak{m}[x_1,\cdots,x_n]$ ایده‌آل ماکسیمالی از حلقه‌ی $R/\mathfrak{m}[x_1,\cdots,x_n] \cong R[x_1,\cdots,x_n]/\mathfrak{m}[x_1,\cdots,x_n]$ است. پس طبق قضیه‌ی صفرهای هیلبرت[۱]، $r_1,\cdots,r_n \in R$ موجودند به طوری که $\mathfrak{M} = (\mathfrak{m}, x_1 - r_1,\cdots,x_n - r_n)R[x_1,\cdots,x_n]$. نیز یکریختی $\phi : R \longrightarrow R[x_1,\cdots,x_n]/(x_1 - r_1,\cdots,x_n - r_n)$ به طوری موجود است که $\phi(\mathfrak{m}) = \mathfrak{M}/(x_1 - r_1,\cdots,x_n - r_n)$. چون $R_{\mathfrak{m}}$ طبق نتیجه‌ی ۲ . ۳ . ۳، دارای Ext-index متناهی است و

$$R_{\mathfrak{m}} \cong R[x_1,\cdots,x_n]_{\mathfrak{M}}/(x_1 - r_1,\cdots,x_n - r_n)R[x_1,\cdots,x_n]_{\mathfrak{M}}$$

و نیز چون $x_1 - r_1,\cdots,x_n - r_n \in \mathfrak{M}R[x_1,\cdots,x_n]_{\mathfrak{M}}$ یک $R[x_1,\cdots,x_n]_{\mathfrak{M}}$ ـ رشته‌ی منظم است، پس طبق ۲ . ۳ . ۱ (۴)، $R[x_1,\cdots,x_n]_{\mathfrak{M}}$ نیز دارای Ext-index متناهی است. ■

در ادامه‌ی این بخش، به بررسی برخی حالات خواهیم پرداخت که در آنها حدس $(\mathbf{E})$ درست است.

تعریف ۲ . ۵ . ۲ . فرض کنید R یک جبر روی یک میدان k باشد. فرض کنید M یک $R[x]$ ـ مدول باشد. خصوصی سازی[۲] مدول M با عنصر $\alpha \in k$ را به صورت زیر تعریف کرده و آن را با M_α نشان می‌دهیم:

$$M_\alpha = M \otimes_{k[x]} (k[x]/(x-\alpha)k[x]).$$

---

[۱] Hilbert's Nullstellensatz

[۲] Specialization

توجه می‌کنیم که M_α همان خارج قسمت M روی زیرمدول $(x-\alpha)M$ است. اگر M یک $R[x]$ ـ مدول متناهی مولد باشد، آنگاه یک نمایش به فرم

$$R[x]^n \xrightarrow{\varphi(x)} R[x]^m \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

دارد به طوری که $n,m \in \mathbb{N}_0$ و $\varphi(x)$ یک ماتریس $n\times m$ است که درایه‌های آن چند جمله‌ایهای $\varphi_{ij}(x)$ از $R[x]$ هستند. در این حالت M_α نمایش زیر را دارد:

$$R^n \xrightarrow{\varphi(\alpha)} R^m \longrightarrow M_\alpha \longrightarrow 0$$

به طوری که $\varphi(\alpha)$ یک ماتریس $n\times m$ است که درایه‌های آن عناصر $\varphi_{ij}(\alpha)$ از R هستند. در واقع اگر M یک $R[x]$ ـ مدول متناهی مولد باشد، M_α یک R ـ مدول متناهی مولد است.

لم ۲.۵.۳. فرض کنید R یک k ـ جبر باشد و $\alpha \in k$. فرض کنید $x-\alpha$ روی $R[x]$ ـ مدولهای M و N منظم باشد. آنگاه رشته‌ی دقیق زیر را برای هر $i \geq 0$ داریم:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_{R[x]}(M,N)_\alpha \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_R(M_\alpha,N_\alpha) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{k[x]}(\mathrm{Ext}^{i+1}_{R[x]}(M,N),k[x]/(x-\alpha)) \longrightarrow 0.$$

برهان. چون $N_\alpha = N/(x-\alpha)N$، رشته‌ی دقیق زیر از $R[x]$ ـ مدولها را داریم:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{x-\alpha} N \longrightarrow N_\alpha \longrightarrow 0.$$

لذا رشته‌ی دقیق بلند زیر از $R[x]$ ـ مدولها را داریم:

$$\mathrm{Ext}^i_{R[x]}(M,N) \xrightarrow{f_i} \mathrm{Ext}^i_{R[x]}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_{R[x]}(M,N_\alpha) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_{R[x]}(M,N) \xrightarrow{f_{i+1}} \mathrm{Ext}^{i+1}_{R[x]}(M,N)$$

که f_i نگاشت ضرب در $x-\alpha$ است. چون $x-\alpha$ روی M منظم است، طبق ۱.۲.۸(۲) داریم $\mathrm{Ext}^i_{R[x]}(M,N_\alpha) \cong \mathrm{Ext}^i_R(M_\alpha,N_\alpha)$. لذا رشته‌ی دقیق زیر را داریم:

$$0 \longrightarrow \mathrm{coker}(f_i) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_R(M_\alpha,N_\alpha) \longrightarrow \ker(f_{i+1}) \longrightarrow 0.$$

طبق تعریف خصوصی سازی به راحتی دیده می‌شود که $\mathrm{coker}(f_i) = \mathrm{Ext}^i_{R[x]}(M,N)_\alpha$. همچنین با در نظر گرفتن رشته‌ی دقیق

$$0 \longrightarrow k[x] \xrightarrow{x-\alpha} k[x] \longrightarrow k[x]/(x-\alpha) \longrightarrow 0$$

و اعمال فانکتور $-\otimes_{k[x]} \operatorname{Ext}^{i+1}_{R[x]}(M,N)$، به راحتی دیده می‌شود

$$\ker(f_{i+1}) \cong \operatorname{Tor}_1^{k[x]}(\operatorname{Ext}^{i+1}_{R[x]}(M,N), k[x]/(x-\alpha)).$$

■

قضیه ۲. ۵. ۴. *فرض کنید که k یک میدان ناشمارا و R یک k ـ جبر از بعد متناهی باشد به طوری که* $\text{Ext-index}(R) < \infty$. *فرض کنید $k(x)$ یک توسیع متعالی از k باشد. آنگاه* $\text{Ext-index}(R \otimes_k k(x)) < \infty$. *به طور دقیقتر* $\text{Ext-index}(R \otimes_k k(x)) \leq \text{Ext-index}(R)$.

برهان. قرار دهید $S = k[x] - \{0\}$. در این صورت حلقه‌ی $R \otimes_k k(x)$ با حلقه‌ی $S^{-1}R[x]$ یکریخت است. لذا حکم را برای حلقه‌ی $S^{-1}R[x]$ ثابت می‌کنیم.

فرض کنید $b = \text{Ext-index}(R)$ و M' و N'، $S^{-1}R[x]$ ـ مدولهای متناهی مولد باشند به طوری که $\operatorname{Ext}^i_{S^{-1}R[x]}(M',N') = 0$ برای $i \gg 0$. کافی است نشان دهیم $\operatorname{Ext}^i_{S^{-1}R[x]}(M',N') = 0$ برای $i > b$.

حال به شکلی که در برهان گزاره‌ی ۱. ۱. ۷(۴) بیان شد، $R[x]$ ـ زیرمدول متناهی مولد M از M' (به ترتیب N از N') موجود است به طوری که $S^{-1}M \cong M'$ (به ترتیب $S^{-1}N \cong N'$). توجه کنید که برای هر $\alpha \in k$، $x - \alpha$ روی M و N منظم است.

چون برای هر $i \geq 0$ داریم $S^{-1}\operatorname{Ext}^i_{R[x]}(M,N) \cong \operatorname{Ext}^i_{S^{-1}R[x]}(M',N')$، لذا $S^{-1}\operatorname{Ext}^i_{R[x]}(M,N) = 0$ برای $i \gg 0$.

از طرف دیگر چون R یک k ـ مدول متناهی مولد است، هر مدول $\operatorname{Ext}^i_{R[x]}(M,N)$ ($i \geq 0$)، یک $k[x]$ ـ مدول متناهی مولد است. در نتیجه هر مدول $\operatorname{Ext}^i_{R[x]}(M,N)$ ($i \geq 0$)، دارای یک تجزیه به عنوان $k[x]$ ـ مدول به صورت زیر است:

$$\operatorname{Ext}^i_{R[x]}(M,N) \cong \bigoplus_{j=1}^{s_i} k[x]/(f_{ij}(x)) \oplus k[x]^{r_i}$$

که $0 \neq f_{ij}(x) \in k[x]$ و $r_i \in \mathbb{N}_0$.

چون $S^{-1}\operatorname{Ext}^i_{R[x]}(M,N) = 0$ برای $i \gg 0$، داریم $r_i = 0$ برای $i \gg 0$. چون تعداد $f_{ij}(x)$ ها شمارا است، طبق فرض می‌توان عنصر $\alpha \in k$ را طوری یافت که $f_{ij}(\alpha) \neq 0$ برای هر i, j. به راحتی و با عضو گیری می‌توان دید که نگاشت ضرب $x - \alpha$ روی $k[x]/(f_{ij}(x))$ یک به یک است. پس طبق [۴۰]، نگاشت ضرب $x - \alpha$ روی $k[x]/(f_{ij}(x))$ دوسویی است و لذا $\operatorname{Tor}_1^{k[x]}(\operatorname{Ext}^{i+1}_{R[x]}(M,N), k[x]/(x-\alpha)) = 0$ برای هر

i. همچنین به راحتی دیده می‌شود که $\operatorname{Ext}^i_{R[x]}(M,N)_\alpha = 0$ برای $i \gg 0$. بنابراین طبق لم ۲. ۵. ۳، $\operatorname{Ext}^i_R(M_\alpha,N_\alpha) = 0$ برای $i \gg 0$. در نتیجه طبق تعریف Ext-index، $\operatorname{Ext}^i_R(M_\alpha,N_\alpha) = 0$ برای $i > b$. چون طبق لم ۲. ۵. ۳، $\operatorname{Ext}^i_{R[x]}(M,N)_\alpha$ زیرمدول $\operatorname{Ext}^i_R(M_\alpha,N_\alpha)$ است، پس $\operatorname{Ext}^i_{R[x]}(M,N)_\alpha = 0$ برای $i > b$. در نتیجه $r_i = 0$ برای $i > b$، که معادل است با $S^{-1}\operatorname{Ext}^i_{R[x]}(M,N) = 0$ برای $i > b$. ■

یادداشت ۲. ۵. ۵. فرض کنید $t \in \mathbb{N}$. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $\operatorname{Ext}^i_R(M,N) = 0$ برای $n+1 \le i \le n+t$ و $\operatorname{Ext}^j_R(M,N) \neq 0$ برای $j = n, n+t+1$. در این صورت می‌گوییم $\operatorname{Ext}_R(M,N)$ دارای یک شکاف از طول t است. بگیرید

$\operatorname{Ext\text{-}gap}(R) = \operatorname{Sup}\{t \in \mathbb{N} |$ R ـ مدولهای متناهی مولد M و N موجودند به طوری که $\operatorname{Ext}_R(M,N)$ دارای یک شکاف از طول t است$\}$.

حلقه‌ی R را Ext ــ کراندار[۳] می‌نامیم هرگاه $\operatorname{Ext\text{-}gap}(R) < \infty$. توجه می‌کنیم که طبق [۲۱، قضیه‌ی ۴.۳(۳)]، اگر R حلقه‌ی گورنشتاین موضعی و Ext ـ کراندار باشد، آنگاه R حلقه‌ای AB است.

حال با برهانی مشابه با برهان قضیه‌ی ۲. ۵. ۴، قضیه‌ی زیر را ثابت می‌کنیم:

قضیه ۲. ۵. ٦. *فرض کنید که k یک میدان نامتناهی و R یک k ـ جبر از بعد متناهی باشد. فرض کنید $k(x)$ یک توسیع متعالی از k باشد. اگر R حلقه ای Ext ـ کراندار باشد، آنگاه $R \otimes_k k(x)$ نیز Ext ـ کراندار است. به طور دقیقتر* $\operatorname{Ext\text{-}gap}(R \otimes_k k(x)) \le \operatorname{Ext\text{-}gap}(R)$.

برهان. قرار دهید $S = k[x] - \{0\}$. در این صورت حلقه‌ی $R \otimes_k k(x)$ با حلقه‌ی $S^{-1}R[x]$ یکریخت است. لذا حکم را برای حلقه‌ی $S^{-1}R[x]$ ثابت می‌کنیم.

فرض کنید M' و N'، $S^{-1}R[x]$ ــ مدولهای متناهی مولد باشند به طوری که $\operatorname{Ext}_{S^{-1}R[x]}(M',N')$ دارای یک شکاف از طول t است. برای اینکه ثابت کنیم $t \le \operatorname{Ext\text{-}gap}(R)$، از نمادگذاری مشابه قضیه‌ی ۲. ۵. ۴ استفاده می‌کنیم. در ابتدا توجه می‌کنیم که $R[x]$ ــ زیرمدول متناهی مولد M از M' (به ترتیب N از N') موجود است به طوری که $S^{-1}M \cong M'$ (به ترتیب $S^{-1}N \cong N'$). لذا $n \in \mathbb{N}_0$ وجود دارد به طوری که $S^{-1}\operatorname{Ext}^i_{R[x]}(M,N) = 0$ برای $n+1 \le i \le n+t$ و $S^{-1}\operatorname{Ext}^j_{R[x]}(M,N) \neq 0$ برای $j = n, n+t+1$. همانطور که در اثبات قضیه‌ی ۲. ۵. ۴ بیان شد، با تجزیه‌ی $\operatorname{Ext}^i_{R[x]}(M,N)$ به عنوان $k[x]$ ــ مدول به جمع مستقیم مدولهای تجزیه ناپذیر، تعداد متناهی چند جمله‌ای $f_{ij}(x)$ ($1 \le j \le s_i$، $n+1 \le i \le n+t+1$) به دست می‌آید. پس می‌توان $\alpha \in k$ را طوری انتخاب کرد که

---

[۳] Ext-bounded

$f_{ij}(\alpha) \neq 0$ ($1 \leq j \leq s_i$ ،۱، $n+1 \leq i \leq n+t+1$). لذا با برهانی مشابه ۲. ۵. ۴ می‌توان به راحتی دید که $\text{Ext}^i_R(M_\alpha, N_\alpha) = 0$ برای $n+1 \leq i \leq n+t$. پس طبق تعریف Ext-gap، داریم $t \leq \text{Ext-gap}(R)$. ■

یادداشت ۲. ۵. ۷. فرض کنید R یک حلقه‌ی کوهن ـ مکولی موضعی باشد که دارای مدول دوگانی [۴] است. طبق [۴]، هر مدول متناهی مولد M دارای یک تقریب ماکسیمال کوهن ـ مکولی [۵] است، به عبارت دیگر رشته‌ی دقیق کوتاه از R ـ مدولهای متناهی مولد

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow Y \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

موجود است به طوری که Y ماکسیمال کوهن ـ مکولی و $\text{id}_R(I) < \infty$. اگر X یک R ـ مدول ماکسیمال کوهن ـ مکولی باشد، طبق [۴۳، نتیجه‌ی ۱۳.۱] و [۴، نتیجه‌ی ۴.۶]، $\text{Ext}^i_R(X, I) = 0$ برای هر $i > 0$ و لذا

$$\text{Ext}^i_R(X, Y) \cong \text{Ext}^i_R(X, M)$$

برای هر $i > 0$.

بگیرید

$$\zeta(R) = \text{Sup}\,\{p^R(M,N) \,|\, p^R(M,N) < \infty \text{ و } M \text{ و } N\text{، } R \text{ ـ مدولهای ماکسیمال کوهن ـ مکولی اند}\}.$$

لذا با استفاده از چنین تقریبی و نیز استفاده از این حقیقت که سیزیجی $\dim(R)$ ام هر R ـ مدول متناهی مولد، ماکسیمال کوهن ـ مکولی است (یادداشت ۱. ۱. ۸(۱))، به راحتی دیده می‌شود که

$$\zeta(R) \leq \text{Ext-index}(R) \leq \zeta(R) + \dim(R).$$

لذا $\text{Ext-index}(R) < \infty$ اگر و تنها اگر $\zeta(R) < \infty$.

قضیه ۲. ۵. ۸. *فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ یک حلقه‌ی کوهن ـ مکولی موضعی با Ext-index متناهی باشد. فرض کنید R مدول دوگانی داشته باشد و نیز R دارای یک میدان ضریب ناشمارای k باشد. آنگاه $R[x]_{\mathfrak{m}R[x]}$ دارای Ext-index متناهی است. به طور دقیقتر $\zeta(R[x]_{\mathfrak{m}R[x]}) \leq \text{Ext-index}(R)$.*

برهان. می‌دانیم $R[x]_{\mathfrak{m}R[x]}$ یک حلقه‌ی کوهن ـ مکولی موضعی با مدول دوگانی است. حال نشان می‌دهیم

---

[۴] Dualizing module

[۵] Maximal Cohen-Macaulay approximation

$\zeta(R[x]_{\mathfrak{m}R[x]}) \leq \text{Ext-index}(R)$.

فرض کنید $\text{Ext-index}(R) = t$. نیز فرض کنید $R[x]_{\mathfrak{m}R[x]}$ ـــ مدولهای ماکسیمال کوهن ـــ مکولی M' و N' موجود باشند به طوری که $\text{Ext}^i_{R[x]_{\mathfrak{m}R[x]}}(M', N') = ۰$ برای $i \gg ۰$. ما باید نشان دهیم که $\text{Ext}^i_{R[x]_{\mathfrak{m}R[x]}}(M', N') = ۰$ برای $i > t$.

همانطور که در قضیه‌ی ۲. ۵. ۴ بیان شد، $R[x]$ ـــ مدول های متناهی مولد M و N موجودند به طوری که $\text{Ext}^i_{R[x]_{\mathfrak{m}R[x]}}(M', N') \cong \text{Ext}^i_{R[x]}(M, N)_{\mathfrak{m}R[x]}$. برای راحتی برای هر $i \geq ۰$ فرض کنید $E^i = \text{Ext}^i_{R[x]}(M, N)$. طبق لم ناکایاما، برای هر $i \geq ۰$ داریم $E^i_{\mathfrak{m}R[x]} = ۰$ اگر و تنها اگر $(E^i/\mathfrak{m}E^i)_{\mathfrak{m}R[x]} = ۰$. اما $(E^i/\mathfrak{m}E^i) \otimes_{k[x]} k(x) \cong (E^i/\mathfrak{m}E^i)_{\mathfrak{m}R[x]}$ و لذا برای هر $i \geq ۰$ داریم $E^i_{\mathfrak{m}R[x]} = ۰$ اگر و تنها اگر $(E^i/\mathfrak{m}E^i) \otimes_{k[x]} k(x) = ۰$.

توجه کنید که چون $R[x]$ یک $k[x]$ ـ مدول متناهی مولد است، پس هر $E^i/\mathfrak{m}E^i$ یک $k[x]$ ـ مدول متناهی مولد است. طبق فرض برای $i \gg ۰$ داریم $r_i = ۰$. بنابراین همانطور که در قضیه‌ی ۲. ۵. ۴ بیان شد، تجزیه‌ی زیر را برای $E^i/\mathfrak{m}E^i$ به عنوان $k[x]$ ـ مدول داریم:

$$E^i/\mathfrak{m}E^i \cong \bigoplus_{j=۱}^{s_i} k[x]/(f_{ij}(x)) \oplus k[x]^{r_i}$$

به طوری که $f_{ij} \neq ۰$ چند جمله‌ایهای تحویلناپذیر در $k[x]$ هستند. همانطور که قبلا دیده شد، می‌توان $\alpha \in k$ را طوری انتخاب کرد که $f_{ij}(\alpha) \neq ۰$ برای هر i, j. حال نگاشت ضرب $x - \alpha$ روی $k[x]/(f_{ij}(x))$ به طور دوسویی عمل می‌کند، زیرا پوشاست و لذا طبق [۲۸، قضیه‌ی ۴.۲]، یکریختی است. پس $r_i = ۰$ برای $i \gg ۰$ و بنابراین داریم $(E^i/\mathfrak{m}E^i)_\alpha = ۰$ برای $i \gg ۰$.

توجه کنید که برای هر $i \geq ۰$ داریم $(E^i/\mathfrak{m}E^i)_\alpha \cong E^i_\alpha/\mathfrak{m}E^i_\alpha$. بنابراین طبق لم ناکایاما، $E^i_\alpha = ۰$ برای $i \gg ۰$. در نتیجه $E^i \xrightarrow{x-\alpha} E^i$ برای $i \gg ۰$ دوسویی است. پس $\text{Tor}_۱^{k[x]}(E^{i+۱}, k[x]/(x-\alpha)) = ۰$ برای $i \gg ۰$. حال طبق لم ۲. ۵. ۳، $\text{Ext}^i_R(M_\alpha, N_\alpha) = ۰$ برای $i \gg ۰$ و لذا طبق فرض $\text{Ext}^i_R(M_\alpha, N_\alpha) = ۰$ برای $i > t$. پس با استفاده‌ی مجدد از لم ۲. ۵. ۳، داریم $E^i_\alpha = ۰$ برای $i > t$. در واقع $(E^i/\mathfrak{m}E^i)_\alpha = ۰$ برای $i > t$ و این به این معنی است که $r_i = ۰$ برای $i > t$. لذا $E^i/\mathfrak{m}E^i \otimes_{k[x]} k(x) = ۰$ برای $i > t$. معادلا $E^i_{\mathfrak{m}R[x]} = ۰$ برای $i > t$ و این نشان می‌دهد که $\zeta(R[x]_{\mathfrak{m}R[x]}) \leq t$. ■

یادداشت ۲. ۵. ۹. با توجه به یادداشت ۲. ۵. ۷، قضیه‌ی زیر را نیز دقیقا مانند برهان قضیه‌ی ۲. ۵. ۸ می‌توان ثابت کرد:

اگر $(R, \mathfrak{m}, k)$ یک حلقه‌ی کوهن ــ مکولی موضعی با Ext-gap متناهی باشد که دارای یک مدول دوگانی است و نیز R دارای یک میدان ضریب نامتناهی k باشد، آنگاه $R[x]_{\mathfrak{m}R[x]}$ دارای Ext-gap متناهی است.

فصل ۳

دسته بندی مدولهای با بعد پروژکتیو متناهی با توجه به فانکتورهای فروبنیوس

۱.۳ تاریخچه و نتایج قبلی، قضایای الف و ب

فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ یک حلقه با مشخصه‌ی $p > 0$ باشد. فرض کنید $f : R \longrightarrow R$ با $f(r) = r^p$، نگاشت فروبنیوس باشد. نیز برای هر $n \in \mathbb{N}$ فرض کنید $f_R^n : R \longrightarrow R$ به صورت $f_R^n(r) = r^{p^n}$ تعریف شود. هر f_R^n یک ساختار R ـ مدولی جدید برای R تعریف می‌کند که آن را با ${}^{f^n}R$ نمایش می‌دهیم؛ در واقع برای هر $r, s \in R$، $r.s = r^{p^n}s$. حلقه‌ی R را F ـ متناهی می‌نامیم هرگاه ${}^{f^n}R$ به ازای هر n، یک R ـ مدول متناهی مولد باشد. برای هر R ـ مدول M، منظور از ${}^{f^n}M$ همان مدول M با ساختاری است که تحت f_R^n می‌گیرد.

پسکین[1] و اسپیرو[2] [۳۳] نشان دادند که هرگاه R یک حلقه‌ی نوتری و M یک R ـ مدول متناهی مولد باشد، آنگاه $\mathrm{Tor}_i^R(M, {}^{f^n}R) = 0$ برای هر $i, n > 0$ به شرطی که $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$. سپس هرزوگ[3] [۲۰]،

[1] Peskine
[2] Szpiro
[3] Herzog

عکس این قضیه را نشان داد و به علاوه یک نسخه‌ی دیگر از این قضیه را برای بعد انژکتیو بیان کرد:

قضیه ۳. ۱. ۱. *فرض کنید R یک حلقه‌ی موضعی با مشخصه‌ی $p > 0$ باشد و فرض کنید M یک R ـ مدول متناهی مولد باشد.*

(۱) [۲۰، قضیه‌ی ۱.۳] *اگر $\mathrm{Tor}_i^R(M, {}^{f^n}R) = 0$ برای هر $i > 0$ و تعداد نامتناهی n، آنگاه $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$.*

(۲) [۲۰، قضیه‌ی ۲.۵] *فرض کنید R، F ـ متناهی باشد. اگر $\mathrm{Ext}_R^i({}^{f^n}R, M) = 0$ برای هر $i > 0$ و تعداد نامتناهی n، آنگاه $\mathrm{id}_R(M) < \infty$.*

سپس که[۴] و لی[۵] [۲۵] این قضیه را به نحوی تعمیم دادند و پس از آن تاکاهاشی[۶] و یوشینو[۷] قضیه‌ی زیر را ثابت کردند:

قضیه ۳. ۱. ۲. [۳۹، قضیه‌ی ۵.۴] *فرض کنید $\varphi : (R, \mathfrak{m}, k) \longrightarrow (S, \mathfrak{n}, l)$ یک همریختی موضعی بین حلقه‌های موضعی و M یک S ـ مدول متناهی مولد باشد. فرض کنید $\mathrm{char}(R) = p > 0$ باشد و n یک عدد طبیعی به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد.*

(۱) اگر برای هر i به اندازه‌ی کافی بزرگ $\mathrm{Tor}_i^R({}^{f^n}R, M) = 0$، آنگاه $\mathrm{fd}_R(M) < \infty$.

(۲) اگر برای هر i به اندازه‌ی کافی بزرگ $\mathrm{Ext}_R^i({}^{f^n}R, M) = 0$، آنگاه $\mathrm{id}_R(M) < \infty$.

پس از آن، قسمت (۱) از قضیه‌ی ۳. ۱. ۱ در حالتی که R، ci است توسط آوراموف و میلر [۱۱]، تعمیم داده شد. آنها قضیه‌ی زیر را ثابت کردند:

قضیه ۳. ۱. ۳. [۱۱، قضیه‌ی اصلی] *فرض کنید R یک حلقه‌ی ci موضعی از مشخصه‌ی $p > 0$ و M یک R ـ مدول متناهی مولد باشد به طوری که $\mathrm{Tor}_i^R(M, {}^{f^n}R) = 0$ برای یک $i, n > 0$. آنگاه $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$.*

آنها برای اثبات این قضیه از ابزاری به نام کمپلکسیتی استفاده کردند. اما بعد از آن دوتا[۸] [۱۶]، همین قضیه را با تکنیک معمول تری اثبات کرد. پس از آن در ادامه‌ی قضایای قبل، لی[۹] قضیه‌ی زیر را ثابت کرد:

---

۴ Koh

۵ Lee

۶ Takahashi

۷ Yoshino

۸ Dutta

۹ Li

قضیه ۳. ۱. ۴. [۲۷] *فرض کنید R یک حلقه‌ی* ci *موضعی از مشخصه‌ی $p > 0$ و M یک R ــ مدول متناهی مولد باشد به طوری که $\mathrm{Ext}^i_R({}^{f^n}R, M) = 0$ برای یک $i, n > 0$. آنگاه* $\mathrm{id}_R(M) < \infty$.

توجه کنید که فانکتور فروبنیوس سه فانکتور متفاوت تولید می‌کند که عبارت اند از $\mathrm{Tor}^R_i(-,{}^{f^n}R)$، $\mathrm{Ext}^i_R({}^{f^n}R, -)$ و $\mathrm{Ext}^i_R(-,{}^{f^n}R)$. همانطور که ذکر شد، نتایجی درباره‌ی دسته بندی مدولهای با بعد پروژکتیو (به ترتیب انژکتیو) متناهی با توجه به فانکتور $\mathrm{Tor}^R_i(-,{}^{f^n}R)$ (به ترتیب $\mathrm{Ext}^i_R({}^{f^n}R, -)$) داده شده است. بنابراین طبیعی است درباره‌ی دسته بندی مدولهای با بعد پروژکتیو یا انژکتیو متناهی در مورد سومین فانکتور یعنی $\mathrm{Ext}^i_R(-,{}^{f^n}R)$ فکر کنیم. هدف اصلی این فصل مطالعه‌ی این فانکتور است که چگونه مدولهای با بعد پروژکتیو متناهی را دسته بندی می‌کند. در واقع در بخشهای بعد قضیه‌های زیر را ثابت خواهیم کرد:

قضیه الف. فرض کنید $\varphi : (R, \mathfrak{m}, k) \longrightarrow (S, \mathfrak{n}, l)$ یک همریختی موضعی بین حلقه‌های موضعی و M یک S ــ مدول متناهی مولد باشد. فرض کنید $\mathrm{depth}(R) = d$، $\mathrm{char}(R) = p > 0$ و n عدد صحیحی باشد به طوری که $p^n \geq \mu(R)$ (برای تعریف $\mu(R)$ به ۳. ۲. ۳ مراجعه کنید). اگر $t \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که $\mathrm{Ext}^i_R(M,{}^{f^n}R) = 0$ برای هر $t \leq i \leq t + d$، آنگاه $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$.

همچنین تعمیمی از قضیه‌ی الف را در حالتی که $R = S$، حلقه‌ای ci و موضعی است به صورت زیر بیان می‌کنیم:

قضیه ب. فرض کنید M یک R ــ مدول متناهی مولد روی حلقه‌ی ci موضعی $(R, \mathfrak{m}, k)$ با مشخصه‌ی $p > 0$ باشد و $\dim(R) = d$. اگر برای یک $i \geq d$ و یک $n > 0$ داشته باشیم $\mathrm{Ext}^i_R(M,{}^{f^n}R) = 0$، آنگاه M دارای بعد پروژکتیو متناهی است.

همانطور که در بالا گفته شد، پسکین و اسپیرو [۳۳] نشان دادند که هرگاه R یک حلقه‌ی نوتری و M یک R ــ مدول متناهی مولد باشد، آنگاه $\mathrm{Tor}^R_i(M,{}^{f^n}R) = 0$ برای هر $i, n > 0$ به شرطی که $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$. به علاوه وقتی R حلقه‌ای F ــ متناهی باشد، هرزوگ [۲۰] نشان داد اگر $\mathrm{id}_R(M) < \infty$، آنگاه $\mathrm{Ext}^i_R({}^{f^n}R, M) = 0$ برای هر $i, n > 0$. از طرفی قضیه‌ی الف نشان می‌دهد که اگر $(R, \mathfrak{m}, k)$ یک حلقه‌ی موضعی از مشخصه‌ی $p > 0$ و M یک R ــ مدول متناهی مولد باشد به طوری که $\mathrm{Ext}^i_R(M,{}^{f^n}R) = 0$ برای هر $i > 0$ و تعداد نامتناهی n، آنگاه M دارای بعد پروژکتیو متناهی است.

در اینجا ما با مثالی (مثال ۳. ۲. ۱۱) نشان می‌دهیم که گزاره‌ی عکس در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. یعنی حلقه‌ی R با مشخصه‌ی $p > 0$ و بعد d و R ــ مدول متناهی مولد M موجودند به طوری که $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$ و

$\operatorname{Ext}_R^d(M,{}^{f^n}R) \neq 0$ برای هر n.

همچنین در مورد قضیه‌ی ب با مثالی نشان می‌دهیم که حلقه‌ی ci موضعی R با بعد ۲ $\leq d$ و مشخصه‌ی $p > 0$ و R ـ مدول متناهی مولد M موجودند به طوری که $\operatorname{Ext}_R^i(M,{}^{f^n}R) = 0$ برای هر $1 \leq i < d$ و هر $n > 0$، اما M دارای بعد پروژکتیو متناهی نیست (مثال ۳. ۳. ۵).

۲.۳ برهان قضیه‌ی الف

تعریف ۳. ۲. ۱. R ـ مدول M را متناهی روی همریختی موضعی [۱] می‌نامیم هرگاه همریختی موضعی $R \longrightarrow S$ بین حلقه های نوتری موضعی موجود باشد به طوری که M یک S ـ مدول متناهی مولد باشد و ساختار R ـ مدولی M با ساختار R ـ مدولی که M تحت این همریختی می‌گیرد یکسان باشد.

آپازوف [۲]، آوراموف [۳]، فاکسبی [۴]، آینگار [۵]، میلر [۶] و دیگران؛ [۱۰، ۹، ۲]، خواص همولوژیک مدولهای متناهی روی همریختی‌های موضعی را بررسی کردند و نشان دادند که بسیاری از این خواص با خواص مدولهای متناهی مولد یکسان است.

آندره [۷] [۱، لم ۲.۵۷] نشان داد که اگر $(R,\mathfrak{m},k)$ یک حلقه‌ی موضعی و R ـ مدول N متناهی روی همریختی موضعی باشد، آنگاه $\operatorname{fd}_R(N) < i$ برای یک i به شرطی که $\operatorname{Tor}_i^R(k,N) = 0$. در گزاره‌ی بعد نسخه‌ی دیگری از این لم را برای Ext نشان می‌دهیم:

گزاره ۳. ۲. ۲. *فرض کنید* $\varphi : (R,\mathfrak{m},k) \longrightarrow (S,\mathfrak{n},l)$ *یک همریختی موضعی بین حلقه‌های موضعی و* N *یک* S *ـ مدول متناهی مولد باشد. اگر* $\operatorname{Ext}_R^i(N,k) = 0$ *برای یک* i*، آنگاه* $\operatorname{fd}_R(N) < i$.

برهان. چون $k^\vee \cong k$، یکریختی زیر را برای هر j داریم:

---

[۱] Finite over local homomorphism

[۲] Apassov

[۳] Avramov

[۴] Foxby

[۵] Iyengar

[۶] Miller

[۷] André

$$\mathrm{Ext}^j_R(N,k)\cong \mathrm{Ext}^j_R(N,k^\vee)\cong \mathrm{Tor}^R_j(N,k)^\vee.$$

پس برای هر j داریم $\mathrm{Ext}^j_R(N,k)=0$ اگر و فقط اگر $\mathrm{Tor}^R_j(N,k)=0$. لذا حکم از لم گفته شده‌ی آندره به دست می‌آید. ■

تعریف ۳. ۲. ۳. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی با $\mathrm{depth}(R)=d$ باشد. ثابت $\mu(R)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu(R)=\inf\{t\in\mathbb{Z}\mid \quad (0:_{R/\mathbf{x}R}\mathfrak{m})\cap\mathfrak{m}^t(R/\mathbf{x}R)=0$$
برای یک R ـ رشته‌ی ماکسیمال $\mathbf{x}=x_1,\cdots,x_d$ در $\mathfrak{m}$ $\}$.

یادداشت ۳. ۲. ۴.

(۱) در [۳۹]، ثابت دیگری مشابه $\mu(R)$ تعریف شد. در واقع تاکاهاشی و یوشینو کوچکترین عدد صحیح n را به طوری که $\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(R/(x_1,\ldots,x_d)R)\cap\mathfrak{m}^n(R/(x_1,\ldots,x_d)R)=0$ برای یک R ـ رشته‌ی ماکسیمال $x_1,\ldots,x_d$ از R، با $\nu(R)$ نشان دادند و ثابت کردند که $\nu(R)$ همواره موجود است. با توجه به تعریف $\mu(R)$ به وضوح دیده می‌شود $\mu(R)\le\nu(R)$ و این مطلب وجود $\mu(R)$ را تضمین می‌کند.

(۲) فرض کنید $(R,\mathfrak{m},k)$ یک حلقه‌ی موضعی از مشخصه‌ی $p>0$ باشد. یک رشته‌ی $x_1,\ldots,x_d$ از عناصر R، R ـ رشته‌ی منظم است اگر و فقط اگر $x_1^{p^n},\ldots,x_d^{p^n}$ یک ${}^{f^n}R$ ـ رشته‌ی منظم باشد. پس اگر $\mathrm{depth}(R)=d$، آنگاه هر ${}^{f^n}R$ ـ رشته‌ی منظم ماکسیمال در $\mathfrak{m}$ دارای طول d است.

در زیر به یک لم و یک نتیجه اشاره می‌کنیم که در [۳۹] تحت عنوان لم ۲.۳ و نتیجه‌ی ۳.۳ برای ثابت $\nu(R)$ مطرح شده‌اند. در اینجا ما این لم و نتیجه را با برهانی مشابه برای $\mu(R)$ بیان می‌کنیم:

لم ۳. ۲. ۵. فرض کنید $\varphi:(R,\mathfrak{m},k)\longrightarrow(S,\mathfrak{n},l)$ یک همریختی موضعی بین حلقه‌های موضعی باشد. فرض کنید n عدد صحیحی باشد به طوری که $\mathfrak{m}S\subseteq\mathfrak{n}^{\mu(S)}$. آنگاه یک S ـ رشته‌ی منظم ماکسیمال $\underline{\mathbf{y}}$ موجود است به طوری که k یکریخت با یک جمعوند مستقیم از $S/(\underline{\mathbf{y}})S$ به عنوان R ـ مدول است.

برهان. فرض کنید $\underline{\mathbf{y}}$ یک S ـ رشته‌ی منظم ماکسیمال باشد به طوری که

$$(0:_{S/\underline{\mathbf{y}}S}\mathfrak{n})\cap\mathfrak{n}^{\mu(S)}(S/\underline{\mathbf{y}}S)=0.$$

بگیرید $T=S/(\underline{\mathbf{y}})S$ و فرض کنید $\theta:(0:_T\mathfrak{n})\longrightarrow T$ و $\pi:T\longrightarrow T/\mathfrak{m}T$ همریختی‌های طبیعی باشند. چون $\mathfrak{m}S\subseteq\mathfrak{n}^{\mu(S)}$، پس $(0:_T\mathfrak{n})\cap\mathfrak{m}T=0$. در نتیجه ترکیب نگاشتهای $\pi\theta$ یک به یک است. توجه می‌کنیم که

$T/\mathfrak{m}T$ یک فضای برداری روی k است. لذا $(\mathfrak{n} :_T \circ)$ یک فضای برداری روی k است و در نتیجه $\pi\theta$ یک تکریختی شکافته شده از R ــ مدولها است. پس θ خود یک تکریختی شکافته شده از R ــ مدولها است و چون $(\mathfrak{n} :_T \circ)$ یک فضای برداری روی k است، حکم را داریم. ■

نتیجه ۳. ۲. ۶. *فرض کنید $(R,\mathfrak{m},k)$ یک حلقه‌ی موضعی با $\operatorname{char}(R) = p > \circ$ باشد و n عدد صحیحی باشد به طوری که $p^n \geq \mu(R)$. آنگاه یک $^{f^n}R$ ــ رشته‌ی منظم ماکسیمال $\underline{y}$ در $^{f^n}\mathfrak{m}$ موجود است به طوری که k یکریخت با یک جمعوند مستقیم از $^{f^n}R/(\underline{y})^{f^n}R$ به عنوان R ــ مدول است.*

برهان. فرض کنید $a_۱, a_۲, \ldots, a_r$ یک مجموعه از مولدهای $\mathfrak{m}$ باشد. آنگاه ایده‌آل $\mathfrak{m}^{f^n}R$ از $^{f^n}R$ توسط $a_۱^{p^n}, a_۲^{p^n}, \ldots, a_r^{p^n}$ تولید می‌شود. از طرف دیگر $a_۱, a_۲, \ldots, a_r$ یک مجموعه از مولدهای ایده‌آل $^{f^n}\mathfrak{m}$ از $^{f^n}R$ است. چون $p^n \geq \mu(R) = \mu(^{f^n}R)$، پس $\mathfrak{m}^{f^n}R \subseteq (^{f^n}\mathfrak{m})^{\mu(^{f^n}R)}$. بنابراین حکم از لم قبل نتیجه می‌شود. ■

لم ۳. ۲. ۷. [۴۲، قضیه‌ی ۸.۲.۴] فرض کنید R یک حلقه با بعد متناهی باشد. آنگاه هر R ــ مدول یکدست دارای بعد پروژکتیو متناهی است.

قضیه ۳. ۲. ۸. *فرض کنید $\varphi : (R,\mathfrak{m},k) \longrightarrow (S,\mathfrak{n},l)$ یک همریختی موضعی بین حلقه‌های موضعی و M یک S ــ مدول متناهی مولد باشد. فرض کنید $\operatorname{depth}(R) = d$، $\operatorname{char}(R) = p > \circ$ و n عدد صحیحی باشد به طوری که $p^n \geq \mu(R)$. اگر $t \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که $\operatorname{Ext}^i_R(M, {}^{f^n}R) = \circ$ برای هر $t \leq i \leq t+d$، آنگاه $\operatorname{pd}_R(M) < \infty$.*

برهان. طبق نتیجه‌ی قبل، یک $^{f^n}R$ ــ رشته‌ی منظم ماکسیمال $\underline{y} = y_۱, \ldots, y_d$ در $^{f^n}\mathfrak{m}$ موجود است به طوری که k یکریخت با یک جمعوند مستقیم از $^{f^n}R/(\underline{y})^{f^n}R$ به عنوان R ــ مدول است. بنابراین با استقرا روی طول $\underline{y}$، با استفاده از رشته های دقیق $\circ \longrightarrow {}^{f^n}R \xrightarrow{y_۱} {}^{f^n}R \longrightarrow {}^{f^n}R/(y_۱)^{f^n}R \longrightarrow \circ$ و $\circ \longrightarrow {}^{f^n}R/(y_۱,\ldots,y_{j-۱}) \xrightarrow{y_j} {}^{f^n}R/(y_۱,\ldots,y_{j-۱}) \longrightarrow {}^{f^n}R/(y_۱,\ldots,y_j)^{f^n}R \longrightarrow \circ$ $(۲ \leq j \leq d)$ به راحتی دیده می‌شود که $\operatorname{Ext}^t_R(M, {}^{f^n}R/(\underline{y})^{f^n}R) = \circ$ و لذا $\operatorname{Ext}^t_R(M,k) = \circ$. پس طبق گزاره‌ی ۳. ۲. ۲، $\operatorname{fd}_R(M) < \infty$. در نتیجه طبق لم ۳. ۲. ۷ داریم $\operatorname{pd}_R(M) < \infty$. ■

نتیجه ۳. ۲. ۹. *فرض کنید $(R,\mathfrak{m},k)$ یک حلقه‌ی موضعی از مشخصه‌ی $p > \circ$ باشد و $\operatorname{depth}(R) = d$. فرض کنید M یک R ــ مدول متناهی مولد باشد. اگر یک $t \in \mathbb{N}_\circ$ موجود باشد به طوری که $\operatorname{Ext}^i_R(M, {}^{f^n}R) = \circ$ برای $t \leq i \leq t+d$ و تعداد نامتناهی n، آنگاه M دارای بعد پروژکتیو متناهی است.*

یادداشت ۳. ۲. ۱۰.

(۱) فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی و M یک R ـ مدول متناهی مولد باشد. فرض کنید

$$\cdots \longrightarrow R^{n_{j+1}} \xrightarrow{\varphi_{j+1}} R^{n_j} \xrightarrow{\varphi_{n_j}} R^{n_{j-1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R^{n_0} \longrightarrow 0$$

تحلیل آزاد مینیمال M باشد. با توجه به [۲۵]، در حالتی که $\mathrm{pd}_R(M)=\infty$، فرض می‌کنیم $\mathrm{Col}(M)$ کوچکترین عدد صحیح c باشد به طوری که برای هر $i>\mathrm{depth}(R)+1$، هر ستون φ_i دارای یک عنصر خارج $\mathfrak{m}^c$ باشد و در حالتی که $\mathrm{pd}_R(M)<\infty$، فرض می‌کنیم $\mathrm{Col}(M)=1$. همچنین بگیرید

$$\mathrm{Col}(R)=\sup\{\,\mathrm{Col}(M)\mid \text{است مولد متناهی مدول ـ } R \text{ یک } M\,\}.$$

به علاوه [۲۵، قضیه‌ی ۷.۱] بیان می‌کند که اگر $\mathrm{pd}_R(M)=\infty$، آنگاه برای هر $i>\mathrm{depth}(R)+1$، هر ستون φ_i دارای عنصری خارج از $\mathfrak{m}^{Col(R)}$ است.

حال شکل دیگری از نتیجه‌ی قبل را با استفاده از این موضوع به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

قضیه. فرض کنید M یک R ــ مدول متناهی مولد روی حلقه‌ی موضعی $(R,\mathfrak{m},k)$ با مشخصه‌ی $p>0$ باشد و نیز فرض کنید $\mathrm{depth}(R)=d$. اگر $t,n\in\mathbb{N}$ موجود باشند به طوری که $p^n\geq \mathrm{Col}(R)$ و $\mathrm{Ext}^i_R(M,{}^{f^n}R)=0$ برای هر $t\leq i\leq t+d$، آنگاه M دارای بعد پروژکتیو متناهی است.

برای اثبات این مطلب، فرض کنید $\mathrm{pd}_R(M)=\infty$ و

$$\cdots \longrightarrow R^{n_{j+1}} \xrightarrow{\varphi_{j+1}} R^{n_j} \xrightarrow{\varphi_{n_j}} R^{n_{j-1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R^{n_0} \longrightarrow 0$$

تحلیل آزاد مینیمال M باشد. با اثر دادن فانکتور $\mathrm{Hom}_R(-,{}^{f^n}R)$، رشته‌ی دقیق زیر را به دست می آوریم:

$$\mathrm{Hom}_R(R^{n_{t-1}},{}^{f^n}R) \xrightarrow{\alpha_{t-1}} \mathrm{Hom}_R(R^{n_t},{}^{f^n}R) \xrightarrow{\alpha_t} \cdots \xrightarrow{\alpha_{t+d}} \mathrm{Hom}_R(R^{n_{t+d+1}},{}^{f^n}R)$$

که $\alpha_i=\mathrm{Hom}_R(\varphi_{i+1},{}^{f^n}R)$. فرض کنید $L=\mathrm{coker}(\alpha_{t+d})$. به راحتی دیده می‌شود که رشته‌ی بالا قسمتی از یک تحلیل آزاد مینیمال برای L است و چون درایه‌های φ_i ها متعلق به $\mathfrak{m}$ هستند پس همه‌ی درایه‌های α_i برای $t-1\leq i\leq t+d$ به $\mathfrak{m}^{p^n}\subseteq\mathfrak{m}^{Col(R)}$ تعلق دارند. نیز اگر $\mathrm{pd}_R(L)<\infty$، آنگاه طبق فرمول آسلندر ــ بوکسبام، $\mathrm{pd}_R(L)\leq d$ و لذا $\mathrm{Hom}_R(R^{n_t},{}^{f^n}R)=0$، که تناقض است. پس $\mathrm{pd}_R(L)=\infty$. از طرف دیگر طبق [۲۵، قضیه‌ی ۷.۱(۱)] ، هر ستون از α_{t-1} دارای یک عنصر خارج $\mathfrak{m}^{Col(R)}$ است. این تناقض نشان می‌دهد که $\mathrm{pd}_R(M)<\infty$.

(۲) همانطور که در بالا گفته شد، پسکین و اسپیرو [۳۳] نشان دادند که هرگاه R یک حلقه‌ی نوتری و M یک R ــ مدول متناهی مولد باشد، آنگاه $\mathrm{Tor}_i^R(M, {}^{f^n}R) = 0$ برای هر $i, n > 0$ به شرطی که $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$. به علاوه وقتی R حلقه‌ای F ــ متناهی باشد، هرزوگ [۲۰] نشان داد اگر $\mathrm{id}_R(M) < \infty$، آنگاه $\mathrm{Ext}_R^i({}^{f^n}R, M) = 0$ برای هر $i, n > 0$.

قضیه‌ی ۳. ۲. ۸ نشان می‌دهد که اگر $(R, \mathfrak{m}, k)$ یک حلقه‌ی موضعی از مشخصه‌ی $p > 0$ و M یک R ــ مدول متناهی مولد باشد به طوری که $\mathrm{Ext}_R^i(M, {}^{f^n}R) = 0$ برای هر $i > 0$ و تعداد نامتناهی n، آنگاه M دارای بعد پروژکتیو متناهی است.

حال سؤالی که به نظر می‌رسد در مورد عکس این موضوع است. مثال زیر نشان می‌دهد که گزاره‌ی عکس در حالت کلی برقرار نمی‌باشد:

مثال ۳. ۲. ۱۱. فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ یک حلقه‌ی کوهن ــمکولی موضعی از بعد d و مشخصه‌ی $p > 0$ باشد. نیز فرض کنید که R حلقه‌ای F ــ متناهی باشد و $\underline{\mathbf{x}} = \{x_1, \ldots, x_d\} \subseteq \mathfrak{m}$ یک R ــ رشته‌ی ماکسیمال باشد. می‌دانیم که $\mathrm{pd}_R(R/\underline{\mathbf{x}}R) = d$. از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_R^d(R/\underline{\mathbf{x}}R, {}^{f^n}R) &\cong \mathrm{Hom}_R(R/\underline{\mathbf{x}}R, {}^{f^n}R/\underline{\mathbf{x}}^{f^n}R)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{R/\underline{\mathbf{x}}R}(R/\underline{\mathbf{x}}R, {}^{f^n}R/\underline{\mathbf{x}}^{f^n}R)\\ &\cong {}^{f^n}R/\underline{\mathbf{x}}^{f^n}R.\end{aligned}$$

طبق لم ناکایاما $0 \neq {}^{f^n}R/\underline{\mathbf{x}}^{f^n}R$ و لذا $\mathrm{Ext}_R^d(R/\underline{\mathbf{x}}R, {}^{f^n}R) \neq 0$.

۳.۳ برهان قضیه‌ی ب

لم ۳. ۳. ۱. فرض کنید M یک مدول متناهی مولد روی حلقه‌ی ci موضعی R بامشخصه‌ی $p > 0$ و بعد d باشد. اگر برای یک $i \geq d$ و یک $n > 0$، $\mathrm{Ext}_R^i(M, {}^{f^n}R) = 0$، آنگاه $\mathrm{Ext}_R^j(M, {}^{f^n}R) = 0$ برای هر $j \geq i$.

برهان. چون برای هر $i \geq 0$ داریم $\mathrm{Ext}_R^i(M, {}^{f^n}R) = 0$ اگر و فقط اگر $\mathrm{Ext}_R^i(\widehat{M}, {}^{f^n}R \otimes_R \widehat{R}) = 0$، نیز ${}^{f^n}R \otimes_R R \cong {}^{f^n}\widehat{R}$ و همچنین $\widehat{R}$ حلقه‌ای از مشخصه‌ی p است، بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که $R = S/(\underline{\mathbf{x}})$، جایی که S یک حلقه‌ی منظم موضعی کامل از مشخصه‌ی $p > 0$ و $\underline{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_t)$

یک ایده‌آل تولید شده توسط یک S ـ رشته‌ی منظم $x_1,\dots,x_t$ است (توجه کنید طبق قضیه‌ی کوهن[1] [۱۵، قضیه‌ی ۱۲]، S به صورت $R_0[[y_1,\dots,y_m]]$ است به طوری که $R_0 = R/\mathfrak{m}$ و در نتیجه R_0 و S هر دو دارای مشخصه‌ی p هستند). طبق قضیه‌ی کونز[2] [۲۶، قضیه‌ی ۳.۳]، f_S^n یک نگاشت یکدست است. پس $\widetilde{f^n} = R\otimes_S f_S^n : S/\underline{\mathbf{x}} \longrightarrow S/\underline{\mathbf{x}}^{p^n}$ یکدست است. همچنین $f_R^n : R \longrightarrow R$ به صورت زیر مجزا می‌شود:

$$R \xrightarrow{\widetilde{f^n}} R_n \xrightarrow{\pi_n} R$$

جایی که $R_n = S/\underline{\mathbf{x}}^{p^n}$ و π_n نگاشت پوشای طبیعی است. حال داریم:

$$M\otimes_S {}^{f^n}S \cong M\otimes_R (R\otimes_S {}^{f^n}S) \cong M\otimes_R {}^{\widetilde{f^n}}R_n$$

به عنوان R_n ـ مدول (و نیز به عنوان R ـ مدول).

حال تحلیل آزاد مینیمال $\mathbf{F}_\bullet \longrightarrow M \longrightarrow 0$ از M را به عنوان R ـ مدول در نظر بگیرید. پس $\mathbf{F}_\bullet \otimes_R {}^{\widetilde{f^n}}R_n$ یک R_n ـ تحلیل آزاد برای $M\otimes_R {}^{\widetilde{f^n}}R_n$ است. به علاوه دقت کنید که $M\otimes_R {}^{\widetilde{f^n}}R_n$ دارای دو ساختار R_n ـ مدولی است که یکی از آنها از M و دیگری از ${}^{\widetilde{f^n}}R_n$ به دست می‌آید. اما به راحتی دیده می‌شود که این دو ساختار یکسانند. لذا برای هر $j \geq 0$ داریم

$$\operatorname{Ext}^j_{R_n}(M\otimes_S {}^{f^n}S, R) \cong \operatorname{Ext}^j_{R_n}(M\otimes_R {}^{\widetilde{f^n}}R_n, R) \cong \operatorname{Ext}^j_R(M, \operatorname{Hom}_{R_n}({}^{\widetilde{f^n}}R_n, R)).$$

اما به راحتی می‌توان دید که نگاشت $\phi : \operatorname{Hom}_{R_n}({}^{\widetilde{f^n}}R_n, R) \longrightarrow {}^{f^n}R$ با ضابطه‌ی $\phi(g) = g(1+\underline{\mathbf{x}}^{p^n})$ یکریختی است. پس برای هر $j \geq 0$ داریم:

$$\operatorname{Ext}^j_{R_n}(M\otimes_S {}^{f^n}S, R) \cong \operatorname{Ext}^j_R(M, {}^{f^n}R)$$

برای هر $j \geq 0$ و خصوصا $\operatorname{Ext}^i_{R_n}(M\otimes_S {}^{f^n}S, R) = 0$. حال همانطور که در [۱۶، برهان قضیه‌ی اصلی] بیان شده است، رشته‌های دقیق زیر را داریم:

$$\begin{array}{l}
0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow S/\underline{\mathbf{x}}^{p^n} \longrightarrow S/\underline{\mathbf{x}} \longrightarrow 0 \quad ,\\
0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow K_1 \longrightarrow S/\underline{\mathbf{x}} \longrightarrow 0 \quad ,\\
\qquad \vdots \\
0 \longrightarrow K_{t_n} \longrightarrow K_{t_{n-1}} \longrightarrow S/\underline{\mathbf{x}} \longrightarrow 0 \quad ,
\end{array}$$

---

[1] Cohen

[2] Kunz

به طوری که $K_{t_n} \cong S/\underline{\mathbf{x}}$. در نتیجه با اثر دادن فانکتور $\mathrm{Hom}_{R_n}(M \otimes_S {}^{f^n}S, -)$ روی رشته‌های دقیق بالا، رشته‌های دقیق زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{array}{lcl} \circ \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_{R_n}(M \otimes_S {}^{f^n}S, K_1) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{i+1}_{R_n}(M \otimes_S {}^{f^n}S, S/\underline{\mathbf{x}}^{p^n}), \\ \circ \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_{R_n}(M \otimes_S {}^{f^n}S, K_2) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{i+1}_{R_n}(M \otimes_S {}^{f^n}S, K_1), \\ & \vdots & \\ \circ \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_{R_n}(M \otimes_S {}^{f^n}S, K_{t_n}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{i+1}_{R_n}(M \otimes_S {}^{f^n}S, K_{t_{n-1}}). \end{array}$$

می‌دانیم $d = \dim(S) - t = \mathrm{id}_{R_n}(S/\underline{\mathbf{x}}^{p^n})$. لذا $\mathrm{Ext}^j_{R_n}(M \otimes_S {}^{f^n}S, S/\underline{\mathbf{x}}^{p^n}) = \circ$ برای $j > i$. پس با استفاده از رشته‌های دقیق بالا داریم $\mathrm{Ext}^{i+1}_{R_n}(M \otimes_S {}^{f^n}S, S/\underline{\mathbf{x}}) = \circ$. با تکرار روند اخیر به دست می‌آوریم که $\mathrm{Ext}^j_{R_n}(M \otimes_S {}^{f^n}S, S/\underline{\mathbf{x}}) = \circ$ برای $j \geq i$ و این معادل است با صفر شدن $\mathrm{Ext}^j_R(M, {}^{f^n}R)$ برای هر $j \geq i$. ■

تعریف ۳. ۳. ۲. فرض کنید که $(T, \mathfrak{l}) \longrightarrow (S, \mathfrak{n})$ یک همریختی موضعی بین حلقه‌های موضعی نوتری باشد. گوییم S یک T ـ جبر کوهن [۳] است اگر شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) S کامل باشد،

(۲) S یک T ـ مدول یکدست باشد و

(۳) $\mathfrak{l}S = \mathfrak{n}$ و $S/\mathfrak{n}$ روی $T/\mathfrak{l}$ توسیع جدایی پذیر [۴] باشد.

قضیه ۳. ۳. ۳. [۳۷، قضیه‌ی ۶.۹] *فرض کنید $(T, \mathfrak{l})$ یک حلقه‌ی نوتری موضعی و K یک توسیع میدانی جدایی پذیر از $T/\mathfrak{l}$ باشد. آنگاه یک T ـ جبر کوهن $(S, \mathfrak{n})$ موجود است به طوری که $K \cong S/\mathfrak{n}$ روی $T/\mathfrak{l}$.*

حال صورت کامل تری از قضیه‌ی ۱. ۰. ۴ را بیان می‌کنیم که در اثبات قضیه‌ی ب نقش اساسی دارد:

قضیه ۳. ۳. ۴. [۸، قضیه‌ی III] *فرض کنید R یک حلقه‌ی ci موضعی باشد و M و N دو R ــ مدول متناهی مولد باشند. در این صورت شرایط زیر معادل اند:*

(۱) $\mathrm{Ext}^i_R(M, N) = \circ$ برای $i \gg \circ$،

(۲) $\mathrm{Ext}^i_R(N, M) = \circ$ برای $i \gg \circ$،

(۳) $\mathrm{Tor}^R_i(M, N) = \circ$ برای $i \gg \circ$.

---

[۳] Cohen T-algebra

[۴] Separable extension

اکنون به برهان قضیه‌ی ب می‌پردازیم:

برهان. فرض کنید $\overline{k}$ بستار جبری k باشد. می‌دانیم $\overline{k}$ میدان عالی[۵] است و لذا یک توسیع جدایی پذیر از k است. بنابراین طبق قضیه‌ی ۳. ۳. ۳ یک R ـ جبر کوهن $(S, \mathfrak{n})$ موجود است به طوری که $S/\mathfrak{n} \cong \overline{k}$ روی $R/\mathfrak{m}$. چون $S/\mathfrak{m}S$ یک میدان و R یک حلقه‌ی ci است، طبق [۷، قضیه‌ی ۳.۴.۷]، S حلقه ای ci است. حال با استفاده از این مطلب که ${}^{f_R^n}R \otimes_R S \cong {}^{f_S^n}S$، می‌توان جای R و S را عوض کرد و فرض کرد R یک حلقه‌ی کامل و میدان خارج قسمتی k نیز عالی است. لذا می‌توان فرض کرد که R حلقه‌ای F ـ متناهی است (به عنوان مثال [۱۲، صفحه‌ی ۳۹۸] را ببینید)(برای تعریف F ـ متناهی به بخش ۱.۳ مراجعه کنید). همچنین طبق لم ۳. ۳. ۱، $\mathrm{Ext}_R^i(M, {}^{f^n}R) = \circ$ برای $i \gg \circ$. پس طبق قضیه‌ی ۳. ۳. ۴، $\mathrm{Tor}_i^R(M, {}^{f^n}R) = \circ$ برای $i \gg \circ$. حال با توجه به قضیه‌ی ۳. ۱. ۳، M دارای بعد پروژکتیو متناهی است. ■

توجه کنید که حلقه‌ی ci موضعی R با بعد $d \geq ۲$ و مشخصه‌ی $p > \circ$ و R ـ مدول متناهی مولد M موجودند به طوری که $\mathrm{Ext}_R^i(M, {}^{f^n}R) = \circ$ برای هر $۱ \leq i < d$ و هر $n > \circ$، اما M دارای بعد پروژکتیو متناهی نیست:

مثال ۳. ۳. ۵. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی ci موضعی F ـ متناهی با بعد $d \geq ۲$ و مشخصه‌ی $p > \circ$ باشد که منظم نیست. به عنوان مثال فرض کنید $R = k[[X_۱, \ldots, X_{d+۱}]]/(t)$ به طوری که k یک میدان عالی با مشخصه‌ی $p > \circ$، $d \geq ۲$ عددی صحیح و عنصر $t \in k[[X_۱, \ldots, X_{d+۱}]]$ طوری باشد که $t \in (X_۱, \ldots, X_{d+۱})^۲$ (توجه کنید طبق [۱۲، صفحه‌ی ۳۹۸]، R حلقه‌ای F ـ متناهی است).

حال چون طبق یادداشت ۳. ۲. ۴(۲) داریم $\mathrm{depth}_R({}^{f^n}R) = \mathrm{depth}(R)$، پس $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, {}^{f^n}R) = \circ$ برای $\circ \leq i \leq d - ۱$ و $\mathrm{Ext}_R^d(R/\mathfrak{m}, {}^{f^n}R) \neq \circ$. از طرف دیگر چون R منظم نیست پس $\mathrm{pd}_R(R/\mathfrak{m}) = \infty$.

---

[۵] Perfect field

مراجع

[1] M. André, *Homologie des algébres commutatives.* (French) Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 206. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

[2] D. Apassov, *Almost finite modules*, Comm. Algebra **27** (1999), 919–931.

[3] T. Araya and Y. Yoshino, *Remarks on a depth formula, a grade inequality and a conjecture of Auslander*, Comm. Algebra **26** (1998), no. 11, 3793–3806.

[4] M. Auslander, R. O. Buchweitz, *The homological theory of maximal Cohen- Macaulay approximations*, Me'm. Soc. Math. France (N.S.), Colloque en l'honneur de Pierre Samuel (Orsay, 1987), **38** (1989), 5–37. MR 1044344.

[5] M. Auslander, S. Ding and Ø. Solberg, *Liftings and Weak Liftings of Modules*, J. Alg. **156** (1993), 273–317.

[6] M. Auslander and I. Reiten, *On a generalized version of the Nakayama conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), 69–74.

[7] L. L. Avramov, *Infinite free resolutions*, in Six Lectures on Commutative Algebra (Bellaterra, 1996), Progr. Math. **166** Birkhäuser, Basel (1998), 1–118.

[8] L. L. Avramov and R. -O. Buchweitz, *Support varieties and cohomology over complete intersections*, Invent. Math. **142** (2000), 285–318.

[9] L. L. Avramov and H. B. Foxby, *Homological dimensions of unbounded complexes*, J. Pure Appl. Algebra **71** (1991), 129–155.

[10] L. L. Avramov, S. Iyengar, and C. Miller, *Homology over local homomorphisms*, Amer. J. Math. **128** (2006), 23–90.

[11] L. L. Avramov and C. Miller, *Frobenius powers of complete intersections*, Math. Research Letters. **8** (2001), 225–232.

[12] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **39**. Cambridge University Press, Cambridge, 1993. xii+403 pp.

[13] L. W. Christensen, *Gorenstein dimensions*, Lecture Notes in Mathematics, **1747**. Springer-Verlag, Berlin, 2000. viii+204 pp.

[14] L. W. Christensen and H. Holm, *Algebras that satisfy Auslander's condition on vanishing of cohomology*, preprint (2007).

[15] I. S. Cohen, *On the structure and ideal theory of complete local rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **59** (1946), 54–106.

[16] S. P. Dutta, *On modules of finite projective dimension over complete intersections*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 113–116.

[17] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, **150**. Springer-Verlag, New York, 1995. xvi+785 pp.

[18] L. Gruson and M. Raynaud, *Critères de platitude et de projectivité. Techniques de "platification" d'un module*, Invent. Math. **13** (1971), 1–89.

[19] T. H. Gulliksen, *Massey operations and the Poincaré series of certain local rings*, J. Alg. **22** (1972), 223–232.

[20] J. Herzog, *Ringe der charakteristik p und Frobeniusfunktoren*, Math. Z. **140** (1974), 67–78.

[21] C. Huneke and D. A. Jorgensen, *Symmetry in the vanishing of Ext over Gorenstein Rings*, Math. Scand. **93** (2003), 161–184.

[22] C. Huneke, L. M. Sega and A. N. Vraciu, *Vanishing of Ext and Tor over some Cohen-Macaulay local rings*, Illinois J. Math. **48** (2004), 295–317.

[23] D. A. Jorgensen and L. M. Sega, *Asymmetric complete resolutions and vanishing of Ext over Gorenstein rings*, Int. Math. Res. Not. **56** (2005), 34593477.

[24] D. A. Jorgensen and L. M. Sega, *Nonvanishing cohomology and classes of Gorenstein rings*, Adv. Math. **188** (2004), 470–490.

[25] J. Koh and K. Lee, *Some restrictions on the maps in minimal resolutions*, J. Algebra **202** (1998), 671–689.

[26] E. Kunz, *Characterization of regular local rings for characteristic p*, Amer. J. Math. **91** (1969), 772–784.

[27] J. Li, *Characterization of modules of finite projective dimension over complete intersections*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2005), 1271–1275.

[28] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **8**. Cambridge University Press, Cambridge, 1989. xiv+320 pp.

[29] I. Mori, *Symmetry in the vanishing of Ext over stably symmetric algebras*, J. Algebra **310** (2007), 708–729.

[30] S. Nasseh and M. Tousi, *A note on symmetry in the vanishing of Ext*, preprint (2008), Submitted.

[31] S. Nasseh and M. Tousi and S. Yassemi, *Characterization of modules of finite projective dimension via Frobenius functors*, preprint (2008), Submitted.

[32] S. Nasseh and Y. Yoshino, *On Ext-indices of ring extensions*, J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), 1216–1223.

[33] C. Peskine and L. Szpiro, *Dimension projective finie et cohomologie locale. Applications 'a la d'emonstration de conjectures de M. Auslander, H. Bass et A. Grothendieck*, Inst. Hautes 'Etudes Sci. Publ. Math. No. **42** (1973), 47–119.

[34] J. Rotman, *An introduction to homological algebra*, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1979. xi+376 pp.

[35] L. M. Sega, *Vanishing of cohomology over Gorenstein rings of small codimension*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 8, 2313–2323 .

[36] A. M. Simon, *Some homological properties of complete modules*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **108** (1990), 231–246.

[37] B. Singh, *Completion, formal smoothness and Cohen structure theorems*, Unpublished note.

[38] J. R. Strooker, *Homological questions in local algebra*, London Math. Soc. Lecture note series, **145**. Camberidge University Press, Cambridge, 1990. xiv+308 pp.

[39] R. Takahashi and Y. Yoshino, *Characterizing Cohen-Macaulay local rings by Frobenius maps*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 3177–3187.

[40] W. V. Vasconcelos, *Injective endomorphisms of finitely generated modules*, Proc. Amer. Math. Soc. **25** (1970), 900–901.

[41] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **38**. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. xiv+450 pp.

[42] J. Xu, *Flat Covers of Modules*, Lecture Notes in Math., vol. 1634, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[43] Y. Yoshino, *Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, Cambridge, **146** (1990), MR 1079937.

[44] Y. Yoshino, *On degenerations of modules*, J. Algebra **278** (2004), no. 1, 217–226.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آرتینی	(۳)	Artinian
ادیک	(۱۷)	Adic
اساسی	(۱۷)	Essential
اندیس	(۱۷)	Index
انژکتیو	(۱)	Injective
انعکاسی	(۱۰)	Reflexive
ایده‌آل	(۱)	Ideal
ایده‌آل اول	(۱)	Prime ideal
بالابر	(۲۷)	Augmentation
بعد	(۱)	Dimension
به طور جبری بسته	(۴)	Algebraically closed
پادورد	(۱۴)	Contravariant
پایه	(۳۰)	Basis
پروژکتیو	(۱)	Projective
پوشش انژکتیو	(۱۶)	Injective envelope
پیوسته	(۱۹)	Continuous
T ـ جبر کوهن	(۵۳)	Cohen T-algebra
تجزیه‌ی اولیه	(۳۳)	Primary decomposition
تحلیل آزاد	(۱۰)	Free resolution
تحلیل انژکتیو	(۳۰)	Injective resolution
تحلیل یکدست	(۲۰)	Flat resolution
تقارن	(۲)	Symmetry
تقریب ماکسیمال کوهن ـ مکولی	(۴۱)	Maximal Cohen-Macaulay approximation

تکریختی (۴۹) .... Monomorphism
توپولوژی (۱۷) .... Topology
توسیع (۳) .... Extension
توسیع بدیهی (۵) .... Trivial extension
توسیع جبری (۳۶) .... Algebraic extension
توسیع جبری ساده (۴) .... Simple algebraic extension
توسیع جدایی پذیر (۵۳) .... Separable extension
توسیع متعالی (۴) .... Transcendental extension
توسیع میدانی (۴) .... Field extension
جابجایی (۱) .... Commutative
جبر (۴) .... Algebra
جبر آرتین (۳۰) .... Artin algebra
جمعوند مستقیم (۳۰) .... Direct summand
چگال (۱۷) .... Dense
چند جمله‌ای (۲۴) .... Polynomial
چند جمله‌ای تحویل ناپذیر (۳۶) .... Irreducible polynomial
حدس (۳) .... Conjecture
حلقه‌ی تقاطع کامل (۱) .... Complete intersection ring
حلقه های گلد (۲۳) .... Golod rings
خارج قسمت (۱) .... Quotient
خالص (۱۷) .... Pure
خصوصی سازی (۳۷) .... Specialization
دارای نمایش نوع متناهی (۳۱) .... Of finite representation type
دقیق چپ (۱۴) .... Left exact
دوسویی (۳۹) .... Bijective
دوگان ماتلیس (۱۶) .... Matlis dual
رادیکال جیکبسن (۳۱) .... Jacobson radical
رشته‌ی دقیق (۱۰) .... Exact sequence
رشته‌ی منظم (۱) .... Regular sequence
زیر کاتگوری پر (۲۵) .... Full subcategory
زیرمدول (۱۷) .... Submodule

زیرمدول بسته (۱۷)	Closed submodule
سری پوانکاره (۲۸)	Poincare series
سوپریمم (۲)	Supremum
سیزیجی (۱۰)	Syzygy
شکاف (۴۰)	Gap
شکافته شده (۲۷)	Split
صفرشدن (۲)	Vanishing
طول (۱٦)	Length
عنصر منظم (۱۲)	Nonzero divisor
فانکتور (۱)	Functor
فانکتور جمعی (۱۴)	Additive functor
فانکتور فروبنیوس (۵)	Frobenius functor
فانکتور مشتق شده (۱۴)	Derived functor
فرمول آسلندر ـ بوکسبام (۲۹)	Auslander-Buchsbaum formula
فضای برداری (۳۰)	Vector space
قضیه‌ی صفرهای هیلبرت (۳۷)	Hilbert's Nullstellensatz
کاتگوری (۱۴)	Category
کاتگوری مشتق شده (۲۷)	Derived category
کاملسازی (۱)	Completion
کراندار از راست (۲۵)	Right bounded
کلاس (۲)	Class
کمپلکسیتی (٦)	Complexity
کوازی ـ یکریختی (۲۵)	Quasi-isomorphism
کوهن ـ مکولی (۱)	Cohen-Macaulay
گورنشتاین (۱)	Gorenstein
لم ناکایاما (۴۲)	Nakayama's lemma
ماتلیس ـ انعکاسی (۱٦)	Matlis reflexive
ماکسیمال (۱)	Maximal
ماکسیمال کوهن ـ مکولی (۹)	Maximal Cohen-Macaulay
مالتیپلیسیتی (۲۳)	Multiplicity
متناهی مولد (۳)	Finitely generated

Abstract

In [8], Avramov and Buchweitz proved that for finitely generated modules M and N over a complete intersection local ring R, $\mathrm{Ext}_R^i(M,N)=0$ for all $i \gg 0$ implies $\mathrm{Ext}_R^i(N,M)=0$ for all $i \gg 0$. In the first chapter, we give some generalizations of this result. Indeed we prove the above mentioned result when (1) M is finitely generated and N is arbitrary, (2) M is arbitrary and N has finite length and (3) M is complete and N is finitely generated.

In the second chapter, we investigate the finiteness of Ext-indices for certain ring extensions. In this direction, we introduce some conjectures and discuss the relationships among them. We also prove these conjectures in some special cases. Furthermore, we prove that the trivial extension of an Artinian local ring by its residue class field is always of finite Ext-index, and prove a generalization of the Auslander-Reiten conjecture for this type of ring.

In the third chapter, we prove some other results about vanishing of Ext. Let M be a finitely generated module over a local ring R of characteristic $p>0$. If $\mathrm{depth}(R)=s$, then the property that M has finite projective dimension can be characterized by the vanishing of the functor $\mathrm{Ext}_R^i(M, {}^{f^n}R)$ for $s+1$ consecutive values $i>0$ and for infinitely many n. In addition, if R is a d-dimensional complete intersection ring, then M has finite projective dimension can be characterized by the vanishing of the functor $\mathrm{Ext}_R^i(M, {}^{f^n}R)$ for some $i \geq d$ and some $n>0$.

Keywords

1. Regular ring
2. Complete intersection ring
3. Gorenstein ring
4. Cohen-Macaulay ring
5. AB ring
6. Trivial extension
7. Auslander-Reiten conjecture
8. Frobenius functor
9. Projective dimension
10. Injective dimension
11. Flat dimension

Shahid Beheshti University

Department of Mathematics

Ph. D. Thesis in

Pure Mathematics

Title:

Vanishing and symmetry in the vanishing of Ext over some classes of commutative rings

Author:

Saeed Nasseh

Supervisor:

Prof. M. Tousi

June 2009