چکیده

در[۸]، آوراموف و بوخوایتز ثابت کردند که برای هر R ـ مدول متناهی مولد M و N روی حلقه‌ی تقاطع کامل موضعی R، اگر $\mathrm{Ext}_R^i(M,N)=0$ برای $i\gg 0$ آنگاه $\mathrm{Ext}_R^i(N,M)=0$ برای $i\gg 0$. در فصل اول این رساله، تعمیم این قضیه را بیان و آنرا با برهان متفاوت اثبات می‌کنیم. به عبارت دیگر روی حلقه‌ی تقاطع کامل موضعی R، ثابت می‌کنیم که اگر $\mathrm{Ext}_R^i(M,N)=0$ برای $i\gg 0$، آنگاه $\mathrm{Ext}_R^i(N,M)=0$ برای $i\gg 0$، هرگاه یکی از شرایط زیر برقرار باشد: (۱) M متناهی مولد و N دلخواه باشد، (۲) M دلخواه و N دارای طول متناهی باشد و یا (۳) M کامل و N متناهی مولد باشد.

در فصل دوم، ما منحصرا با متناهی بودن Ext-index های توسیع های حلقه‌ها سروکار داریم که منشا آن سؤالی از هونیکه و یورگنسن راجع به موضعی سازی حلقه های AB است. در این فصل، طرز جدیدی از نگرش به این مسأله را مطرح کرده و به بررسی این موضوع در حالت کلی‌تر می‌پردازیم. در این راستا حدس‌هایی را مطرح کرده و در ادامه به ارتباط میان این حدسها و سؤال مطرح شده خواهیم پرداخت. همچنین جوابهای مثبتی را برای این حدسها در حالتهای خاص ارایه خواهیم کرد. به علاوه به عنوان یکی از مهمترین مطالب این رساله، در فصل ۲ مثال مهمی از حلقه‌های با Ext-index متناهی را معرفی می‌کنیم. در این راستا قضیه‌ی مهمی را ثابت کرده و به کمک آن شکل بسیار قوی تری از یک حدس معروف از آسلندر و ریتن که بیش از سی سال پیش مطرح شده بود را برای حلقه‌های موضعی آرتینی نتیجه می‌گیریم.

در فصل سوم، نتایج دیگری را راجع به صفر شدن فانکتور Ext ارایه می‌کنیم. در واقع کار ما در این فصل دسته بندی مدولهای با بعد پروژکتیو متناهی با توجه به فانکتورهای فروبنیوس است. در واقع اگر M مدولی متناهی مولد روی حلقه‌ی موضعی R باشد و اگر $\mathrm{depth}(R)=d$ و $\mathrm{char}(R)=p>0$ باشد، آنگاه $\mathrm{pd}_R(M)<\infty$ اگر برای $d+1$ مقدار متوالی از i و بی‌نهایت مقدار از n داشته باشیم $\mathrm{Ext}_R^i(M, {}^{f^n}R)=0$. به علاوه اگر R حلقه‌ی تقاطع کامل موضعی باشد و اگر برای یک $i\geq d$ و یک $n>0$ داشته باشیم $\mathrm{Ext}_R^i(M, {}^{f^n}R)=0$، آنگاه M دارای بعد پروژکتیو متناهی است.

کلمات کلیدی:

۱. حلقه‌ی منظم
۲. حلقه‌ی تقاطع کامل
۳. حلقه‌ی گورنشتاین
۴. حلقه‌ی کوهن ـ مکولی
۵. حلقه‌ی AB
۶. توسیع بدیهی
۷. حدس آسلندرـ ریتن
۸. فانکتور فروبنیوس
۹. بعد پروژکتیو
۱۰. بعد انژکتیو
۱۱. بعد یکدست

مقدمه

در سرتاسر این رساله، همه‌ی حلقه‌ها جابجایی، نوتری و یکدار هستند. در حالتی که $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ی موضعی است، برای هر R ـ مدول M، $\widehat{M}$ کاملسازی M نسبت به ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ است. همچنین در کل این رساله، برای R ـ مدول M، منظور از $\mathrm{pd}_R(M)$، $\mathrm{id}_R(M)$ و $\mathrm{fd}_R(M)$ به ترتیب بعدهای پروژکتیو، انژکتیو و یکدست R ـ مدول M است. در حالتی که $(R,\mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی است، $\mathrm{depth}_R(M)$ طول بزرگترین M ـ رشته‌ی منظم در $\mathfrak{m}$ است. ما همواره $\mathrm{depth}_R(R)$ را با $\mathrm{depth}(R)$ نمایش می‌دهیم. پیش از هر چیز ابتدا تعریف اساسی زیر را یادآوری می‌کنیم:

تعریف . ۰ . ۱. فرض کنید R یک حلقه باشد.

(۱) در حالتی که R موضعی باشد، R کوهن ـ مکولی است اگر $\dim(R) = \mathrm{depth}(R)$. در حالتی که R موضعی نیست، R کوهن ـ مکولی است اگر $\dim(R_\mathfrak{p}) = \mathrm{depth}(R_\mathfrak{p})$ برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R.

(۲) در حالتی که R موضعی باشد، R گورنشتاین است اگر $\mathrm{id}_R(R) < \infty$. در حالتی که R موضعی نیست، R گورنشتاین است اگر $\mathrm{id}_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}) < \infty$ برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R.

(۳) حلقه‌ی موضعی $(R,\mathfrak{m})$ را حلقه‌ی موضعی منظم نامیم هرگاه $\mathrm{pd}_R(R/\mathfrak{m}) < \infty$. در حالتی که R موضعی نیست، R را حلقه‌ی منظم نامیم هرگاه $R_\mathfrak{p}$ برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R یک حلقه‌ی موضعی منظم باشد.

(۴) حلقه‌ی موضعی $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ی تقاطع کامل است هرگاه کاملسازی R نسبت به ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$، $\widehat{R}$، به صورت خارج قسمت یک حلقه‌ی موضعی منظم به یک رشته‌ی منظم باشد.

در سالهای اخیر، توجه به صفرشدن فانکتورهای Ext و Tor روی حلقه‌های جابجایی نوتری به طور

چشمگیری افزایش یافته است. علاقه‌ی ما به این موضوع به قضیه‌ای از آوراموف [۱] و بوخوایتز [۲] برمی‌گردد. برای بیان این قضیه به نمادگذاری زیر نیاز داریم:
فرض کنید R یک حلقه باشد. می‌گوییم R دارای خاصیت (ee) (برای مدولهای متناهی مولد) است هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

اگر M و N دو R ــ مدول (متناهی مولد) باشند به طوری که $\operatorname{Ext}^i_R(M,N)=0$ برای $i\gg 0$ آنگاه $\operatorname{Ext}^i_R(N,M)=0$ برای $i\gg 0$.

آوراموف و بوخوایتز ثابت کردند که برای هر حلقه‌ی تقاطع کامل موضعی R، خاصیت (ee) برای مدولهای متناهی مولد برقرار است ([۸، قضیه‌ی III]). سپس آنها این سؤال را مطرح کردند که چه کلاسی از حلقه های موضعی دارای خاصیت گفته شده، یعنی تقارن در صفرشدن Ext برای مدولهای متناهی مولد، هستند. آنها به این موضوع اشاره کردند که کلاس مذکور جایی بین کلاس حلقه های تقاطع کامل موضعی و کلاس حلقه های گورنشتاین موضعی قرار می‌گیرد. اما آنها به درستی نمی‌دانستند که آیا این کلاس واقعا برابر با یکی از کلاس‌های تقاطع کامل موضعی و یا گورنشتاین موضعی است یا نه.

سپس هونیکه [۳] و یورگنسن [۴] [۲۱]، خاصیت بالا را برای مدولهای متناهی مولد روی حلقه های گورنشتاین موضعی بررسی کردند. در واقع آنها کلاسی از حلقه های گورنشتاین موضعی را تعریف کردند (که آنها را حلقه های AB نامیدند) و نشان دادند که این نوع از حلقه ها دارای این خاصیت برای مدولهای متناهی مولد هستند [۲۱، قضیه‌ی ۱.۴]. همچنین آنها ثابت کردند که کلاس معرفی شده، یعنی کلاس حلقه های AB اکیدا بزرگتر از کلاس حلقه های تقاطع کامل موضعی است [۲۱، قضیه‌ی ۶.۳]. هر چند تعریف حلقه‌های AB را در فصل سوم بیان می‌کنیم، اما برای دادن توضیحات جامع تر در اینجا به بیان آن می‌پردازیم: فرض کنید R یک حلقه‌ی دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم

$$\text{Ext-index}(R)=\operatorname{Sup}\{n \mid \operatorname{Ext}^n_R(M,N)\neq 0 \text{ و } i>n \text{ برای } \operatorname{Ext}^i_R(M,N)=0\},$$

جایی که این سوپریمم روی همه‌ی جفت R ــ مدولهای متناهی مولد (M,N) گرفته می‌شود به طوری که $\operatorname{Ext}^i_R(M,N)=0$ برای $i\gg 0$. حلقه‌ی گورنشتاین موضعی R را AB می‌نامیم هرگاه $\text{Ext-index}(R)<\infty$.

[۱] Avramov
[۲] Buchweitz
[۳] Huneke
[۴] D. Jorgensen

در ادامه‌ی توضیحات بالا، لازم به ذکر است که یورگنسن و شوگا[5]، مثالی از حلقه های آرتینی گورنشتاین موضعی $(R, \mathfrak{m})$ با $\mathfrak{m}^4 = 0$ و $\operatorname{codim}(R) = 6$ را معرفی کردند که دارای خاصیت (e e) برای مدولهای متناهی مولد نبود[۲۳]. به عبارت دیگر آنها نشان دادند که کلاس حلقه های AB اکیدا کوچکتر از کلاس حلقه های گورنشتاین موضعی است و به این ترتیب سؤال آوراموف و بوخوایتز به طور کامل پاسخ داده شد. در واقع دیاگرام زیر بین کلاسهای حلقه‌های موضعی به دست آمد:

کوهن ـ مکولی $\longleftarrow$ گورنشتاین $\longleftarrow$ AB $\longleftarrow$ تقاطع کامل $\longleftarrow$ منظم.

هونیکه و یورگنسن در پایان مقاله‌ی [۲۱] سؤالی را راجع به موضعی سازی حلقه های AB مطرح کردند. این سؤال این بود که آیا موضعی سازی یک حلقه‌ی AB روی هر ایده‌آل اول AB است یا نه. این نقطه‌ی شروع تحقیق ما در این رساله بود که هر چند به طور کامل حل نشد، اما خودبخود به نتایج مهم دیگری در مورد صفرشدن فانکتورهای Ext و Tor انجامید.

ساختار این رساله به صورت زیر است:

در فصل اول تعمیم قضیه‌ی گفته شده از آوراموف و بوخوایتز ([۸، قضیه‌ی III]) را بیان و آنرا با برهان متفاوت اثبات می‌کنیم. به عبارت دیگر روی حلقه‌ی تقاطع کامل موضعی R، ثابت می‌کنیم که اگر $\operatorname{Ext}_R^i(M, N) = 0$ برای $i \gg 0$، آنگاه $\operatorname{Ext}_R^i(N, M) = 0$ برای $i \gg 0$، هرگاه یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) M متناهی مولد و N دلخواه است،

(۲) M دلخواه و N دارای طول متناهی است،

(۳) M کامل و N متناهی مولد است. (قضایای ۱.۱.۹، ۱.۲.۳ و گزاره‌ی ۱.۲.۱)

در فصل دوم، ما منحصرا با متناهی بودن Ext-index های توسیع های حلقه‌ها سروکار داریم. همانطور که قبلا گفته شد، هونیکه و یورگنسن در پایان مقاله‌ی [۲۱] سؤالی را راجع به موضعی سازی حلقه های AB مطرح کردند که آیا موضعی سازی یک حلقه‌ی AB روی هر ایده‌آل اول AB است یا نه. در فصل ۲، طرز جدیدی از نگرش به این مسأله را مطرح کرده و به بررسی این موضوع در حالت کلی‌تر می‌پردازیم. در این راستا حدس‌های زیر را مطرح کرده و در ادامه به ارتباط میان این حدسها و سؤال مطرح شده خواهیم پرداخت ([۳۲]):

حدس (L). فرض کنید R یک حلقه باشد و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. اگر $\operatorname{Ext-index}(R) < \infty$ آنگاه $\operatorname{Ext-index}(R_{\mathfrak{p}}) < \infty$.

---

[5] Sega

حدس $(\mathbf{E})$. فرض کنید R یک جبر روی یک میدان k باشد و ℓ یک توسیع میدانی متناهی از k باشد. اگر $\text{Ext-index}(R) < \infty$ آنگاه $\text{Ext-index}(R \otimes_k \ell) < \infty$.

حدس $(\mathbf{P})$. فرض کنید R یک حلقه باشد. اگر $\text{Ext-index}(R) < \infty$ آنگاه $\text{Ext-index}(R[x]) < \infty$.

سپس ارتباط میان این حدسها را در قضیه‌ی ۲. ۴. ۳ به صورت زیر بیان می‌کنیم:

قضیه.

(۱) فرض کنید حدس $(\mathbf{P})$ برای همه‌ی حلقه‌های کوهن ـ مکولی موضعی R با $\dim(R) = ۱$ درست باشد. آنگاه حدس $(\mathbf{L})$ برای همه‌ی حلقه‌های کوهن ـ مکولی موضعی از هر بعد متناهی دلخواه درست است.

(۲) فرض کنید حدس $(\mathbf{P})$ برای یک k ـ جبر (k یک میدان است) R درست باشد. آنگاه حدس $(\mathbf{E})$ برای R و هر توسیع جبری ساده‌ی ℓ از k درست است.

(۳) فرض کنید حدس‌های $(\mathbf{L})$ و $(\mathbf{E})$ برای همه‌ی حلقه‌های گورنشتاین که شامل یک میدان هستند درست باشد. آنگاه حدس $(\mathbf{P})$ برای همه‌ی حلقه‌های گورنشتاین با بعد متناهی که شامل یک میدان هستند درست است.

همچنین جوابهای مثبتی را برای این حدسها در حالتهای خاص ارایه خواهیم کرد. لذا در بخش‌های ۳.۲ و ۵.۲، قضایای زیر را ثابت می‌کنیم که اولین قضیه حدس $(\mathbf{L})$، قضیه‌ی دوم حدس $(\mathbf{P})$ و قضیه‌ی سوم حدس $(\mathbf{E})$ را در حالت های خاص ثابت می‌کنند (لم ۲. ۳. ۲، گزاره‌ی ۲. ۵. ۱ و قضیه‌ی ۲. ۵. ۴):

قضیه. فرض کنید $\text{Max}(R)$ (به ترتیب $\text{Min}(R)$) مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آلهای ماکسیمال (به ترتیب ایده‌آلهای اول مینیمال) R است. فرض کنید $\mathfrak{m} \in \text{Max}(R) \cap \text{Min}(R)$. آنگاه

$$\text{Ext-index}(R_{\mathfrak{m}}) \leq \text{Ext-index}(R).$$

به عبارت دیگر اگر $\text{Ext-index}(R) < \infty$، آنگاه $\text{Ext-index}(R_{\mathfrak{m}}) < \infty$.

قضیه. فرض کنید R یک حلقه‌ی آرتینی گورنشتاین با Ext-index متناهی باشد و هر میدان خارج قسمتی R به طور جبری بسته باشند. آنگاه $\text{Ext-index}(R[x_۱, ..., x_n]) < \infty$.

قضیه. فرض کنید که k یک میدان ناشمارا و R یک k ـ جبر از بعد متناهی باشد به طوری که $\text{Ext-index}(R) < \infty$. فرض کنید $k(x)$ یک توسیع متعالی از k باشد. آنگاه $\text{Ext-index}(R \otimes_k k(x)) < \infty$. به طور دقیقتر $\text{Ext-index}(R \otimes_k k(x)) \leq \text{Ext-index}(R)$.

به علاوه به عنوان یکی از مهمترین مطالب این رساله، در فصل ۲ مثال مهمی از حلقه‌های با Ext-index متناهی را معرفی می‌کنیم. در واقع با استفاده از قضیه‌ی زیر که مهمترین قضیه‌ی بخش ۲.۲ است ثابت می‌کنیم که توسیع بدیهی هر حلقه‌ی موضعی آرتینی به وسیله‌ی میدان خارج قسمتی آن دارای Ext-index متناهی است:

قضیه. (قضیه‌ی ۲. ۲. ۲) فرض کنید $(R,\mathfrak{m},k)$ یک حلقه‌ی موضعی و M و N دو $R(k)$ ـ مدول متناهی مولد ناصفر و غیر آزاد باشند، جایی که $R(k)$ توسیع بدیهی R به وسیله‌ی k است. آنگاه $\mathrm{Tor}_n^{R(k)}(M,N) \neq 0$ برای هر $n \geq 3$.

به علاوه، صورت بسیار قوی تری از یک حدس معروف از آسلندر[۶] و ریتن[۷] که بیش از سی سال پیش مطرح شده بود را برای حلقه‌های موضعی آرتینی با استفاده از این قضیه می‌توان نتیجه گرفت (نتیجه‌ی ۲. ۲. ۱۱).

در فصل ۳، نتایج دیگری را راجع به صفر شدن فانکتور Ext ارایه می‌کنیم. در واقع کار ما در این فصل دسته بندی مدولهای با بعد پروژکتیو متناهی با توجه به فانکتور فروبنیوس است. فرض کنید $(R,\mathfrak{m},k)$ یک حلقه با مشخصه‌ی $p > 0$ باشد. فرض کنید $f : R \longrightarrow R$ با $f(r) = r^p$، نگاشت فروبنیوس باشد. نیز برای هر $n \in \mathbb{N}$ فرض کنید $f_R^n : R \longrightarrow R$ به صورت $f_R^n(r) = r^{p^n}$ تعریف شود. هر f_R^n یک ساختار R ـ مدولی جدید برای R تعریف می‌کند که آن را با ${}^{f^n}R$ نمایش می‌دهیم؛ در واقع برای هر $r, s \in R$، $r.s = r^{p^n}s$.

پسکین[۸] و اسپیرو[۹] [۳۳] نشان دادند که هرگاه R یک حلقه‌ی نوتری از مشخصه‌ی $p > 0$ و M یک R ـ مدول متناهی مولد باشد، آنگاه $\mathrm{Tor}_i^R(M, {}^{f^n}R) = 0$ برای هر $i, n > 0$ به شرطی که $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$. سپس هرزوگ[۱۰]، عکس این قضیه را نشان داد و به علاوه یک نسخه‌ی دیگر از این قضیه را برای بعد انژکتیو بیان کرد(قضیه‌ی ۳. ۱. ۱). سپس که[۱۱] و لی[۱۲] [۲۵] این قضیه را به نحوی تعمیم دادند و پس از آن تاکاهاشی[۱۳] و یوشینو[۱۴] قضیه‌ی زیر را ثابت کردند:

قضیه . ۰ . ۲. [۳۹، قضیه‌ی ۵.۴] *فرض کنید $\varphi : (R,\mathfrak{m},k) \longrightarrow (S,\mathfrak{n},l)$ یک همریختی موضعی بین*

---

[۶] Auslander

[۷] Reiten

[۸] Peskin

[۹] Szpiro

[۱۰] Herzog

[۱۱] Koh

[۱۲] Lee

[۱۳] Takahashi

[۱۴] Yoshino

حلقه‌های موضعی و M یک S ـ مدول متناهی مولد باشد. فرض کنید $\operatorname{char}(R) = p > 0$ باشد و n یک عدد طبیعی به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد.

(۱) اگر برای هر i به اندازه‌ی کافی بزرگ $\operatorname{Tor}_i^R({}^{f^n}R, M) = 0$، آنگاه $\operatorname{fd}_R(M) < \infty$.

(۲) اگر برای هر i به اندازه‌ی کافی بزرگ $\operatorname{Ext}_R^i({}^{f^n}R, M) = 0$، آنگاه $\operatorname{id}_R(M) < \infty$.

پس از آن، قسمتی از قضیه‌ی هرزوگ در حالتی که R، حلقه‌ی تقاطع کامل است توسط آوراموف و میلر[15] [۱۱]، تعمیم داده شد. آنها قضیه‌ی زیر را ثابت کردند:

قضیه . ۰ . ۳. [۱۱، قضیه‌ی اصلی] *فرض کنید R یک حلقه‌ی حلقه‌ی تقاطع کامل موضعی از مشخصه‌ی $p > 0$ و M یک R ـ مدول متناهی مولد باشد به طوری که $\operatorname{Tor}_i^R(M, {}^{f^n}R) = 0$ برای یک $i, n > 0$. آنگاه* $\operatorname{pd}_R(M) < \infty$.

آنها برای اثبات این قضیه از ابزاری به نام کمپلکسیتی استفاده کردند. اما بعد از آن دوتا[16] [۱٦]، همین قضیه را با تکنیک معمول تری اثبات کرد. پس از آن در ادامه‌ی قضایای قبل، لی[17] [۲۷] ثابت کرد که اگر R یک حلقه‌ی تقاطع کامل موضعی از مشخصه‌ی $p > 0$ و M یک R ـ مدول متناهی مولد باشد به طوری که $\operatorname{Ext}_R^i({}^{f^n}R, M) = 0$ برای یک $i, n > 0$، آنگاه $\operatorname{id}_R(M) < \infty$.

از آنجا که فانکتور فروبنیوس سه فانکتور متفاوت تولید می‌کند که عبارت اند از $\operatorname{Tor}_i^R(-, {}^{f^n}R)$، $\operatorname{Ext}_R^i({}^{f^n}R, -)$ و $\operatorname{Ext}_R^i(-, {}^{f^n}R)$ و همانطور که ذکر شد، نتایجی درباره‌ی دسته بندی مدولهای با بعد پروژکتیو (به ترتیب انژکتیو) متناهی با توجه به فانکتور $\operatorname{Tor}_i^R(-, {}^{f^n}R)$ (به ترتیب $\operatorname{Ext}_R^i({}^{f^n}R, -)$) داده شده است، طبیعی است درباره‌ی دسته بندی مدولهای با بعد پروژکتیو یا انژکتیو متناهی در مورد سومین فانکتور یعنی $\operatorname{Ext}_R^i(-, {}^{f^n}R)$ فکر کنیم. هدف اصلی فصل ۳ مطالعه‌ی این فانکتور است که چگونه مدولهای با بعد پروژکتیو متناهی را دسته بندی می‌کند. در واقع در این فصل قضیه‌های زیر را ثابت خواهیم کرد:

قضیه. فرض کنید $\varphi : (R, \mathfrak{m}, k) \longrightarrow (S, \mathfrak{n}, l)$ یک همریختی موضعی بین حلقه‌های موضعی و M یک S ـ مدول متناهی مولد باشد. فرض کنید $\operatorname{depth}(R) = d$، $\operatorname{char}(R) = p > 0$ و n عدد صحیحی باشد به طوری که $p^n \geq \mu(R)$ (برای تعریف $\mu(R)$ به ۳. ۲. ۳ مراجعه کنید). اگر $t \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که

---

[15] Miller

[16] Dutta

[17] Li

$\operatorname{Ext}^i_R(M, {}^{f^n}R) = 0$ برای هر $t \leq i \leq t + d$، آنگاه $\operatorname{pd}_R(M) < \infty$.

همچنین تعمیمی از قضیه‌ی الف را برای حلقه‌های تقاطع کامل موضعی به صورت زیر بیان می‌کنیم:

قضیه. فرض کنید M یک R ـ مدول متناهی مولد روی حلقه‌ی تقاطع کامل موضعی $(R, \mathfrak{m}, k)$ با مشخصه‌ی $p > 0$ باشد و $\dim(R) = d$. اگر برای یک $i \geq d$ و یک $n > 0$ داشته باشیم $\operatorname{Ext}^i_R(M, {}^{f^n}R) = 0$، آنگاه M دارای بعد پروژکتیو متناهی است.