چکیده

در راستای مطالعه مفهوم تقریبا کوهن ـ مکولی بودن روی حلقه‌های غیر نوتری تعمیم هایی از مفهوم کوهن ـ مکولی ارائه می گردد. در گام نخست مفهوم کوهن ـ مکولی بودن روی حلقه‌های غیر نوتری ارائه می گردد. پس از بد ست آوردن نتایجی و در راستای حل حدسی منسوب به گلز تعمیمی از نتیجه‌ای معروف از هاچستر و ایگون درباره کوهن ـ مکولی بودن حلقه‌های پایا ارائه می گردد. در دومین گام مفهوم کوهن ـ مکولی بودن نسبت به یک کلاس سر معرفی می شود و به برخی از خواص آن اشاره می گردد. در گام نهایی با تلفیق گامهای قبلی به مفهوم تقریبا کوهن ـ مکولی بودن روی حلقه‌های غیر نوتری می‌پردازیم.

کلمات کلیدی:

۱. تقریبا کوهن ـ مکولی
۲. کوهن ـ مکولی
۳. کوهن ـ مکولی نسبت به یک کلاس سر
۴. حلقه‌ی غیر نوتری
۵. حلقه‌ی پایا
٦. حلقه‌ی کوهن ـ مکولی غیر نوتری
۷. مدولهای تقریبا صفر

مقدمه

در راستای مطالعه مفهوم تقریبا کوهن ـ مکولی [1] بودن روی حلقه‌های غیر نوتری تعمیم هایی از مفهوم کوهن ـ مکولی [2] ارائه می گردد. در گام نخست مفهوم کوهن ـ مکولی بودن روی حلقه‌های غیر نوتری ارائه می گردد. پس از بد ست آوردن نتایجی و در راستای حل حدسی منسوب به گلز [3] تعمیمی از نتیجه‌ای معروف از هاچستر [4] و ایگون [5] درباره کوهن ـ مکولی بودن حلقه‌های پایا ارائه می گردد. در دومین گام مفهوم کوهن ـ مکولی بودن نسبت به یک کلاس سر معرفی می شود و به برخی از خواص آن اشاره می گردد. در گام نهایی با تلفیق گامهای قبلی به مفهوم تقریبا کوهن ـ مکولی بودن روی حلقه‌های غیر نوتری می‌پردازیم.

حلقه‌های کوهن ـ مکولی دارای اهمیت فراوانی در جبر جابجایی اند. این حلقه‌ها سنگ بنای جبر جابجایی می باشند. مقالات بسیار زیادی در این راستا نوشته شده است. ولی مطالعه این حلقه‌ها محدود به حلقه‌های نوتری است. قابل ذکر است در برخی مواقع بررسی حلقه‌های غیر نوتری به مطالعه حلقه‌های نوتری کمک شایانی می کند. برای مثال قضیه ای از هاچستر بیان می دارد صفر نشدن مدول کوهومولوژی موضعی [6] حلقه بستار صحیح مطلق [7] دامنه های صحیح موضعی نوتری نسبت به ایده ال ماکسیمال حدس تک جمله‌ای [8] را به

---

[1] Almost Cohen-Macaulayness

[2] Cohen-Macaulay

[3] Glaz

[4] Hochster

[5] Eagon

[6] Local cohomology modules

[7] Absolute integral closure

[8] Monomial conjecture

ارمغان می آورد. حال آنکه بستارمطلق دامنه های صحیح موضعی نوتری به ندرت نوتری هستند. جستجوی ساده ای در مقالات جبر جابجایی بیان می دارد قبل از سال ۱۹۹۲ میلادی هیچ ایده ای برای مفهوم کوهن ــ مکولی روی حلقه‌های غیر نوتری موجود نبوده است. در این سال گلز در مقاله ای بدون ارائه تعریفی برای این مفهوم حدس زد حلقه پایای حلقه‌ای کوهن ــ مکولی مجددا کوهن ــ مکولی است. در واقع او می خواست با فرض درستی این مطلب تعریفی برای حلقه‌های غیر نوتری کوهن ــ مکولی بیاورد. بعد از گذشت دو سال از این مطلب او تعریفی برای حلقه‌های غیر نوتری (کوهن ــ مکولی‌گلز) ارائه کرد. می گوییم $R-$مدول M کوهن$-$مکالی به معنای گلز است هر گاه برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R داشته باشیم:

$$K\,\mathrm{grad}_{R_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}}) = ht_M(\mathfrak{p})\ .$$

که در آن $K\,\mathrm{grad}_R(\mathfrak{a}, L)$ نمره کوزول $\mathfrak{a}$ روی L است. ما این مفهوم را با نماد $Glaz$ نشان می دهیم. در همان مقاله مثالی از یک حلقه منظم موروثی[۹] آورده شد که با تعریف گلز کوهن ــ مکولی نبود. لذا گلز این سوال را مطرح کرد که چگونه میتوان تعریفی برای مفهوم کوهن ــ مکولی روی حلقه‌های غیر نوتری ارائه کرد که با تعریف در حالت نوتری یکی شود و بعلاوه حلقه‌های منظم موروثی کوهن ــ مکولی بشوند. در ذیل آنچه مد نظر گلز بوده است گرداوری می شود.

حدس. چگونه میتوان تعریفی برای مفهوم کوهن ــ مکولی روی حلقه‌های غیر نوتری ارائه کرد که گزاره های زیر برای آن درست باشد:

(۱) تعریف با تعریف در حالت نوتری یکی شود.

(۲) حلقه‌های منظم موروثی کوهن ــ مکولی بشوند.

(۳) فرض کنید R حلقه‌ای کوهن ــ مکولی و G گروهی متناهی از یکریختی های R چنان باشد که اپراتور رینولد[۱۰] برای آن موجود باشد و بعلاوه R روی حلقه پایای خود

$$R^G := \{x \in R : \sigma(x) = x \ \ for \ \ all \ \ \sigma \in G\}$$

با تولید متناهی باشد. در این صورت R^G کوهن ــ مکولی است.

[۹] Cohernt regular

[۱۰] Reynolds operator

یکی از موضوعات مهم بررسی خواصی از R است که تحت کنش G بر R پایا باقی می مانند. بوضوح R^G زیر حلقه ای از R است. لذا خاصیت حلقه بودن تحت کنش G بر R پایا باقی می ماند.

ماتسومورا [۱۱] در کتاب معروف خود تئوری حلقه‌های پایا را یکی از مواردی (انگشت شمار) می داند که باعث پیشرفت خیره کننده جبر جابجایی در قرن گذشته شده است. همچنین آیزنباد [۱۲] در مقدمه کتاب معروف دیگری تئوری حلقه‌های پایا را یکی از ریشه های جبر جابجایی می داند. بنابر آنچه که نویسنده این رساله می داند تئوری حلقه‌های پایا دارای کابردهای فراوان در شاخه های مختلف ریاضیات است. برای مثال در توپولوژی جبری — گروههای کوهمولوژی — ترکیبیات — پایه های گروبنر [۱۳]— نظریه نمایش جبرها— هندسه جبری و جبر جابجایی است.

در اینجا توجه ما به تقابلی میان تئوری حلقه‌های پایا و جبر جابجایی است. برای ارائه یکی از نتایج مهم این رساله ما نیازمند به مرور برخی از مفاهیم هستیم. فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و G گروهی از یکریختی های R باشد. یادآوری می کنیم که R^G خاصیت حلقه بودن را از R به ارث می برد. بویژه خواصی از حلقه ها که تحت زیر حلقه‌ها پایااست نیز تحت کنش G بر R پایا باقی می ماند. اولین مسئله کلاسیک در این زمینه معروف به مسئله ۱۴ هیلبرت[۱۴] می باشد. این مسئله در ارتباط موروثی بودن شرط نوتری و متنا هی بودن جبرهای روی یک میدان است. خالی از لطف نیست که اشاره کنیم این مسئله دارای مثال نقضی منسوب به ناگاتا است. برای دیدن مثال ساده ای از این دست فرض کنید F میدانی متناهی است و قرار دهید $G := (F, +)$. در اینصورت انتصاب $g(Y+(X^۲)) := X+Y+(X^۲)$ و $g(X+(X^۲)) := X+(X^۲)$ کنشی از G را روی حلقه نوتری $R := F[X, Y]/(X^۲)$ تعریف می کند. با اندکی محاسبه داریم $R^G := F[X, XY, XY^۲, \cdots]/(X^۲)$ که حلقه‌ای غیر نوتری است. لذا شرط نوتری بودن خاصیتی موروثی تحت کنش G نیست. حال فرض کنید که R روی حلقه پایای خود R^G صحیح باشد و R^G—همریختی $R \longrightarrow R^G$ دارای مقطعی باشد که شکافته شود (در این حالت می گوییم که اپراتور رینولد برای این کنش موجود می باشد). در اینصورت بنابه نتیجه ای از نوتر [۱۵] می توان دید که R^G حلقه‌ای نوتری است. در واقع گزاره ای از ایگون و هاچستر بیان می دارد که R^G حلقه ای نوتری و کوهن—مکالی است. یکی از مهمترین اهداف ما درفصل دوم ارائه نسخه غیر نوتری این نتیجه است.

---

[۱۱] Matsumura

[۱۲] Eisenbud

[۱۳] Grobner Bases

[۱۴] Hilbert

[۱۵] Noether

در راستای اولین گام برای حل حدس گلز، همیلتون [۱۶] در رساله دکتری خود به مفهوم حلقه بورباکی خالص [۱۷] پرداخت. می گوییم R بورباکی خالص است هر گاه برای هر ایده ال $\mathfrak{a}$ با خاصیت $ht(a) \geq \mu(\mathfrak{a})$ داشته باشیم: $\mathrm{wAss}_R(R/\mathfrak{a}) = min(\mathfrak{a})$ که در آن $\mathrm{wAss}_R(M)$ مجموعه ایده الهای اول بطور ضعیف وابسته[۱۸] به M هستند و $\mu(\mathfrak{a})$ کمترین تعداد از عناصر حلقه است که برای تولید $\mathfrak{a}$ مورد نیاز است. ما این مفهوم را با نماد WB به کار می بریم. از جمله خواصی که همیلتون برای مفهوم کوهن ـ مکولی مد نظر داشت عبارتند از:

$(H1)$: فرض کنید R کوهن ـ مکولی است. در اینصورت $R[X_1, X_2, \cdots]$ حلقه ای کوهن ـ مکولی است.

$(H2)$: اگر به ازای هرایده ال اول p حلقه R_p کوهن ـ مکولی باشد، آنگاه R کوهن ـ مکولی می باشد و بر عکس.

مهمترین گام در راستای حدس گلز متعلق به همیلتون و مارلی [۱۹] می باشد. آنها تعریفی جدید از کوهن ـ مکولی بودن ارائه کردند که ما آنرا کوهن ـ مکولی بودن به معنای همیلتون و مارلی می نامیم. این مفهوم با نماد HM بکار برده می شود. آنها شرایط (۱) و (۲) را برآورده ساختند. همچنین در حالتی که R از بعد دو و مرتبه G دارای وارونی در R باشد (۳) ثابت کرده اند. همچنین یک طرف از $(H1)$ و $(H2)$ بررسی کردند.

خاطر نشان می کنیم که در حلقه‌های نوتری کوهن ـ مکولی بودن می تواند به گونه های متعددی بیان شود. برای مثال فرض کنید که Σ گردایه ای ناتهی از ایده الهای حلقه R باشد. می گوییم R کوهن—مکالی به معنای Σ است هر گاه برای هر ایده ال $\mathfrak{a} \in \Sigma$ داشته باشیم:

$$K\,\mathrm{grad}(\mathfrak{a}, R) = ht_R(\mathfrak{a}).$$

این مفهوم را با نماد Σ نشان می دهیم. ما به گردایه ایده آلهای با تولید متناهی $f.g.ideals$، اول $Spec$، ماکسیمال Max و گردایه تمامی ایده آلها $ideals$ توجهی خاص می کنیم.

میتوان هر یک از تعاریف اشاره شده در بالا را به عنوان یک کاندیدا برای تعریف کوهن ـ مکولی در حالت غیر نوتری در نظر گرفت. تعریف های مذکور در حالت غیر نوتری لزوما هم ارز نیستند. برخی از روابط میان

---

[۱۶] Hamilton

[۱۷] Bourbaki unmixed

[۱۸] Weakly associated prime

[۱۹] Marley

تعریف های مذکور عبارتند از:

$$Max \Leftarrow Spec \Leftrightarrow ideals \Rightarrow Glaz \Rightarrow f.g.ideals \Rightarrow HM \Leftarrow WB.$$

همچنین در حالتی که حلقه موروثی است نشان می دهیم که $Spec \Rightarrow WB$.

یکی از لم های کلیدی ما برای اثبات ادعاها و تعاریف بالا عبارتست از:

لم ۱.۰.۰. فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده الی از حلقه R و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. در اینصورت $K\,\mathrm{grad}_R(\mathfrak{a}, M) \leq \mathrm{ht}_M(\mathfrak{a})$.

ذکر این مطلب ضروری به نظر می رسد که نامساوی ارائه شده در لم فوق برای نمره توسیع

$$E.\,\mathrm{grad}_R(\mathfrak{a}, M) := \inf\{i : \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}, M) \neq 0\}$$

درست نمی باشد. یعنی می توان حلقه‌ای مثل R با ایده الی مثل $\mathfrak{a}$ و R-مدولی با تولید متناهی چون M را چنان آورد که:

$$E\,\mathrm{grad}_R(\mathfrak{a}, M) > \mathrm{ht}_M(\mathfrak{a}).$$

به مثال ۴.۴.۱ مراجعه کنید.

مثالهای ارائه شده در بخش سوم از فصل دوم روابط ادعا شده در دیاگرام زیر را نقض می کند:

$$f.g.ideals \Leftarrow Max \Leftrightarrow HM \Rightarrow f.g.ideals, \quad HM \Rightarrow WB.$$

در بخش چهارم از فصل دوم مثالها یی از حلقه های غیر نوتری می آوریم که با تمامی تعاریف آمده در بالا کوهن ـ مکولی هستند. فرض کنید R کوهن—مکالی و نوتری است. در اولین مثال ارائه شده نشان خواهیم داد که حلقه چند جمله ایهای بی نهایت متغیر

$$R[X_1, X_2, \cdots] := \bigcup_{i=1}^{\infty} R[X_1, \cdots, X_i]$$

حلقه ای کوهن—مکالی (با تمامی تعاریفی که در بالا آمده) است. سپس به کوهن ـ مکولی بودن بستار صحیح مطلق و بستار کامل [٢٠] حلقه های کامل در مشخصه p (با تمامی تعاریفی که در بالا آمده) خواهیم پرداخت.

در آخرین بخش از فصل دوم برای حل حدس گلز تعریف دیگری از حلقه‌های کوهن ـ مکولی غیر نوتری ارائه می دهیم. مهمترین نتیجه ما در فصل دوم قضیه زیر است.

قضیه. می توان تعریفی برای مفهوم کوهن ـ مکولی روی حلقه‌های غیر نوتری چنان ارائه کرد که گزاره های پنج گانه زیر برای آن درست باشد:

(١) تعریف با تعریف در حالت نوتری یکی شود.

(٢) حلقه‌های منظم موروثی کوهن ـ مکولی بشوند.

(٣) فرض کنید R حلقه‌ای کوهن ـ مکولی و G گروهی متناهی با مرتبه‌ای وارون پذیر در R از یکریختی های R چنان باشد که اپراتور رینولد [٢١] برای آن موجود باشد و بعلاوه R روی حلقه پایای خود R^G با تولید متناهی باشد.در این صورت R^G کوهن ـ مکولی است.

(٤) فرض کنید R کوهن ـ مکولی و نوتری است. در اینصورت $R[X_١, X_٢, \cdots]$ حلقه ای کوهن ـ مکولی است.

(۵) اگر به ازای هرایده ال اول p حلقه R_p کوهن ـ مکولی باشد، آنگاه R کوهن ـ مکولی می باشد.

ما کار خود را در فصل دوم با مطالعه کوهن ـ مکولی بودن حلقه های پایا (با تعاریف مختلف) به پایان می بریم.

اخیرا مفهوم تقریبا صفر شدن [٢٢] در متون جبر جابجایی مورد توجه قرار گرفته است. از یک سو هیتمن [٢٣] با نشان دادن تقریبا صفر شدن دومین مدول کوهومولوژی موضعی دامنه های صحیح موضعی از بعد سه با مشخصه مخلوط نسبت به ایده ال ماکسیمال حدس تک جمله‌ای را اثبات نموده است ([٣٠] را ببینید) . از سوی

[٢٠] perfect closure

[٢١] Reynolds operator

[٢٢] Almost vanishing

[٢٣] Heitmann

دیگر گبر [۲۴] و رومرو [۲۵] با نگاهی رسته ای به مقاله ای عمیق از فالتینگس [۲۶] [۱۶] نظریه تقریبا حلقه[۲۷] را بنا نهاده اند ([۲۴] را ببینید) . این کار های عمیق روبرتس [۲۸] را بر آن داشت تا مفهوم تقریبا کوهن ـ مکولی بودن را مورد توجهی خاص قرار دهد. برای دیدن اهمیت تقریبا کوهن ـ مکولی بودن در حدس تک جمله ای قضیه ۳.۰ (که در زیر آمده) را ببینید. با اندکی ساده انگاری مدولهای تقریبا صفر در رسته مدولها و همریختی مدولها نقشی مشابه عنصر آغازین[۲۹] را در رسته جدید دیگری دارند. رسته جدید از موضعی سازی رسته مدولها و همریختی مدولها نسبت به کلاس مدولهای تقریبا صفر حاصل شده است. با پذیرش این نکته مفهوم تقریبا کوهن ـ مکولی بودن حلقه A نقشی مشابه با مفهوم کوهن ـ مکولی بودن تصویر طبیعی A در رسته موضعی شده نسبت به کلاسی ویژه از مدولها می باشد.

فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و یک دار باشد. آنچه پیش روی شما ست گردایه ای از مدولهای تقریبا صفراست.

(۱) فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده الی از حلقه R با خاصیت $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$ باشد. $R-$مدول M را تقریبا صفر گوییم هر گاه $\mathfrak{a}M = 0$. این تعریف متعلق به گبر و رومرو است. برای جزئیات بیشتر [۲۴] را ببینید.

(۲) فرض کنید c عنصری نا صفر از حلقه R باشد که تمام ریشه های صحیح و نامنفی c، که با $c^{1/n}$ نمایش داده می شوند در R یافت شوند. $R-$مدول M را تقریبا صفر گوییم هر گاه $c^{1/n}M = 0$ برای n های به اندازه کافی بزرگ. این تعریف متعلق به فالتینگس است. برای جزئیات بیشتر [۱۶] را ببینید.

(۳) فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ دامنه‌ای موضعی و نوتری است. در این صورت حلقه ارزه گسسته ای چون V در میدان کسرهای R چنان یافت می شود که ایده ال ماکسیمال آن روی $\mathfrak{m}$ قرار دارد. چون V حلقه ارزه گسسته است نگاشت ارزه ای چون $v : R \longrightarrow Z \cup \{\infty\}$ یافت می شود. می توان این نگاشت ارزه را به بستار صحیح مطلق R که با R^+ نمایش داده می شود توسیع داد و به نگاشت ارزه ای چون $v : R^+ \longrightarrow Q \cup \{\infty\}$ رسید. حال یادآوری می کنیم که R^+-مدول M تقریبا صفر(نسبت به ارزه v)

---

[۲۴] Gabber

[۲۵] Ramero

[۲۶] Faltings

[۲۷] Almost ring theory

[۲۸] Roberts

[۲۹] initial object

است هر گاه برای هر $m \in M$ و برای هر $\epsilon > 0$ عنصری مثل $a \in R^+$ با خاصیت $v(a) < \epsilon$ چنان یافت شود که $am = 0$. این تعریف متعلق به روبرتس است. (می توان این تعریف را روی تمام حلقه هایی که دارای عناصری با ارزه های به قدر کافی کوچک نسبت به ارزه‌ای گسترش داد).

یادداشت ساده زیر ما را بر آن داشت تا به مطالعه حلقه های غیر نوتری بپردازیم:

یادداشت . ۰ . ۲. صرفنظر از حالات بدیهی در هر یک از حالات سه گانه با لا وجود مدول تقریبا صفر نتیجه خواهد داد که حلقه پایه حلقه ای غیر نوتری است.

حال فرض کنید که (R,m) حلقه ای موضعی و نوتری و از بعد d باشد. $x_1, \cdots, x_d$ را دستگاهی از پارامترها برای R بگیرید. در اینصورت حدس تک جمله ای هاچستر بیان می دارد که

$$x_1^t \cdots x_d^t \notin (x_1^{t+1}, \cdots, x_d^{t+1})R.$$

که در آن $t \geq 0$. متذکر می شویم که اگر حدس تک جمله ای برای دامنه های صحیح برقرار باشد آنگاه حدس تک جمله ای برای همه حلقه ای موضعی و نوتری برقرار است. کوهن ـ مکولی بودن R^+ نسبت به نظریه تابی ساخته شده توسط ارزه v، حدس تک جمله ای را به ارمغان می آورد.

نتیجه زیر منسوب به روبرتس سینگ [۳۰] و سیرنیواس [۳۱] است:

قضیه . ۰ . ۳. *فرض کنید (R,m) دامنه های صحیح موضعی و نوتری باشد. اگر R دارای توسیع صحیحی چون A باشد که تقریبا کوهن ـ مکولی نسبت به ارزه ای باشد، آنگاه حدس تک جمله ای برای (R,m) برقرار است.*

ما برای سادگی در رفاه حال خواننده و همچنین برای کامل شدن مطالب استدلالی از آنرا در بخش ۳.۴ می آوریم.

برای مجهز شدن به مفهوم تقریبا کوهن ـ مکولی بودن خاطر نشان می شویم که مدولهای تقریبا صفر در خواص زیر مشترک هستند :

(۱) در رشته دقیق و کوتاه زیر از R—مدولها و R—همریختیها

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

---

[۳۰] Singh

[۳۱] Srinivas

M تقریبا صفر است اگر و تنها اگر N و L تقریبا صفر باشند.

(۲) حد مستقیم هر دستگاه جهتدار مستقیم از مدولهای تقریبا صفر مجددا تقریبا صفر می باشد.

به گردایه هایی که در شرط (۱) صادق اند کلاس سر [۳۲] و به گردایه هایی که در هر دو شرط صادق اند نظریه تابی [۳۳] گویند.

مشاهدات فوق ما را بر آن داشت که تعریفی جدید از مفهوم کوهن ـ مکولی بودن نسبت به کلاس های سر ارائه دهیم:

فرض کنید R حلقه‌ای نوتری است و T یک کلاس سر از R—مدولها باشد. M را R—مدولی با تولید متناهی و $\underline{x} := x_۱, \cdots, x_n$ را مجموعه مولدی برای ایده ال $\mathfrak{a}$ اختیار می کنیم. مفاهیم نمره کوهومولوژی موضعی [۳۴]، کوزول [۳۵] و توسیع [۳۶] M روی $\mathfrak{a}$ نسبت به کلاس سر S که به ترتیب به طریقه زیر تعریف می شوند:

(۱) $S - H.\operatorname{grad}_R(\mathfrak{a}, M) := \inf\{i : H^i_{\mathfrak{a}}(M) \notin S\}$

(۲) $S - K.\operatorname{grad}_R(\mathfrak{a}, M) := \inf\{i : H^i(K(\underline{x}; M) \notin S\}$

(۳) $S - E.\operatorname{grad}_R(\mathfrak{a}, M) := \inf\{i : \operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}, M) \notin S\}$

(۴) به بیشترین طول M—رشته‌های ضعیف ماکسیمال نسبت به کلاس سر S در $\mathfrak{a}$ نمره کلاسیک [۳۷] $\mathfrak{a}$ روی M نسبت به کلاس سر S می‌گوییم و آن را با نماد $S - c\operatorname{grad}(\mathfrak{a}, M)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی و نوتری باشد. به R—مدول با تولید متناهی M کوهن ـ مکولی نسبت به کلاس سر S گوییم هر گاه برای هر دستگاه از پارامترها مثل $x_۱, \cdots, x_\ell$ و هر $i = ۱, \cdots, \ell$ داشته باشیم:

$$((x_۱, \cdots, x_{i-۱})M :_M x_i)/(x_۱, \cdots, x_{i-۱})M \in S.$$

---

[۳۲] Serre class

[۳۳] Torsion theory

[۳۴] Local cohomology grade

[۳۵] Koszul grade

[۳۶] Ext grade

[۳۷] classical grade

همان طور که متوجه شد هاید با انتخابهایی مناسب از کلاسهای سر می توان جنبه هایی از مفا هیمی مثل کوهن ـ مکولی , فیلتر مدول[۳۸] و فیلتر مدول تعمیم یافته [۳۹] را در زیر سایه تئوری کوهن ـ مکولی نسبت به کلاس های سر مطالعه کرد. خواص کوهن ـ مکولی نسبت به این کلاس سر در فصل سوم آورده شده است.

در بخش اول از فصل سوم مفهوم نمره ایده آلها روی مدول های با تولید متناهی نسبت به کلاس سر S مورد بررسی قرار می گیرد. مهمترین نتیجه بخش اول از فصل سوم بیان می دارد که تعاریف (۴)، (۳) و (۲) یکسان هستند و اگر S نظریه تابی باشد (۱) نیز با (۴)، (۳) و (۲) برابر است.

در ابتدای بخش دوم از فصل سوم مفهوم ارتفاع ایده آل a روی مدول M نسبت به کلاس سر S تعریف می گردد. ما آنرا با نماد $S-\mathrm{ht}_M(\mathrm{a})$ نشان خواهیم داد. ممکن است خواننده حدس بزند که کوهن ـ مکولی نسبت به این کلاس سر معادل با تساوی $S-\mathrm{ht}_M(\mathrm{a})=S-c\,\mathrm{grad}(\mathfrak{a},M)$ باشد. همانطوری که گزاره زیر نشان می دهد این حدس درست نیست! تعریف می کنیم :

$$S-Supp_R(M):=\{\mathrm{p}\in Supp_R(M): R/\,\mathrm{p}\notin S\}.$$

$S-Ass_R(M)$ به روش مشابه با $S-Supp_R(M)$ تعریف می شود.

گزاره . ۰ . ۴. *$(R,\mathfrak{m})$ را حلقه ای موضعی و S را یک کلاس سر از $R-$مدولها بگیرید. فرض کنید M یک $R-$مدول با تولید متناهی باشد. در اینصورت گزاره‌های شش گانه زیر معادلند.*

(۱) *M کوهن ـ مکولی نسبت به کلاس سر S است .*

(۲) *به ازای هر $\mathrm{p}\in S-\mathrm{Supp}_R(M)$ داریم M_{p} کوهن ـ مکولی است و*

$$\mathrm{ht}_M(\mathrm{p})+\dim(R/\,\mathrm{p})=\dim M.$$

(۳) *به ازای هر $\mathrm{p}\in S-\mathrm{Supp}_R(M)$ داریم*

$$S-E.\,\mathrm{grad}_R(\mathrm{p},M)=S-\mathrm{ht}_M(\mathrm{p})=\mathrm{ht}_M(\mathrm{p})$$

و

---

[۳۸] filter module

[۳۹] Generalized filter module

$$\mathrm{ht}_M(\mathrm{p}) + \dim(R/\mathrm{p}) = \dim M.$$

(۴) *به ازای هر* $\mathrm{p} \in S - \mathrm{Supp}_R(M)$ *داریم* $\mathrm{depth}_{R_\mathrm{p}}(M_\mathrm{p}) = \dim M - \dim(R/\mathrm{p})$.

(۵) *برای هر دستگاه از پارامترهابرای* M *مثل* $x_1, \cdots, x_\ell$ *داریم* $\dim(R/\mathrm{p}) = \dim M - i$ *که در آن* $0 \leq i \leq d := \dim M$ و $\mathrm{p} \in S - \mathrm{Ass}_R(M/(x_1, \cdots, x_i)M)$.

(٦) *برای هر* $\mathrm{q} \subseteq \mathrm{p}$ *از* $S - \mathrm{Supp}_R(M) \cup \{\mathfrak{m}\}$ *داشته باشیم:*

الف) $\mathrm{ht}(\mathrm{p}/\mathrm{q}) + \mathrm{ht}_M(\mathrm{q}) = \mathrm{ht}_M(\mathrm{p})$

ب) M_p *کوهن ـ مکولی است*

ج) اگر بعلاوه $\mathrm{p} \in \mathrm{Min}(S - \mathrm{Supp}_R(M))$ *آنگاه* $\dim M = \dim(R/\mathrm{p})$.

در زیر ارتباط کوهن ـ مکولی بودن نسبت به یک کلاس سر و همریختی یکدست حلقه ها مورد بررسی قرار می گیرد. برای این منظور $f : R \longrightarrow A$ را همریختی یکدست موضعی، M را یک Rـمدول با تولید متناهی و S را یک کلاس سر از Aـمدولها اختیار می کنیم. به کلاس

$$S^c = \{M \in R\text{–}Mod | M \otimes_R A \in S\}$$

از Rـمدولها توجه می کنیم. به راحتی می توان دید که S^c یک کلاس سر از Rـمدولها است.

قضیه . ۰ . ۵. *فرض کنید* $f : (R, \mathfrak{m}) \longrightarrow (A, \mathfrak{n})$ *یک همریختی یکدست موضعی باشد.* M *یک* R*ـمدول با تولید متناهی و* S *را یک کلاس سر از* A*ـمدولها باشد. در اینصورت* $M \otimes_R A$ *کوهن ـ مکولی نسبت به کلاس سر* S *است اگروتنها اگر گزاره های زیر بر قرار باشند:*

(۱) M *کوهن ـ مکولی نسبت به کلاس سر* S^c *است.*

(۲) *به ازای هر* $\mathfrak{q} \in S - \mathrm{Supp}(M \otimes_R A)$ *حلقه* $\frac{A_\mathfrak{q}}{f^{-1}(\mathfrak{q})A_\mathfrak{q}}$ *کوهن ـ مکولی باشد.*

(۳) *به ازای هر* $\mathfrak{q} \in S - \mathrm{Supp}(M \otimes_R A)$ *داشته باشیم*

$$ht(\mathfrak{q}/f^{-1}(\mathfrak{q})) + \dim(A/\mathfrak{q}) = \dim(A/f^{-1}(\mathfrak{q})A).$$

در راستای ارائه نتیجه بعدی $(R,\mathfrak{m})$ را حلقه ای موضعی و M را یک R—مدول با تولید متناهی از بعد d اختیار کنید. برای هر $i = 0,\cdots,d-1$ قرار دهید $\mathrm{a}(M) := \mathrm{a}_0(M).\cdots.\mathrm{a}_{d-1}(M)$ که در آن $\mathrm{a}_i(M) = \mathrm{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$. در قضیه زیر ارتباط میان کوهن ـ مکولی نسبت به یک کلاس سر و اینکه $R/\mathfrak{a}(M) \in S$ آورده می شود:

قضیه . ۰ . ۶. *$(R,\mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی و S را یک کلاس سر از R ـ مدولها بگیرید. فرض کنید M یک R—مدول با تولید متناهی باشد. به گزاره‌های زیرتوجه کنید.*

(۱) $R/\mathfrak{a}(M) \in S$

(۲) *M کوهن ـ مکولی نسبت به کلاس سر S است.*

دراینصورت (۱) همواره (۲) را نتیجه می دهد. اگر R تصویر پوشایی از یک حلقه گورنشتاین[۴۰] باشد آنگاه عکس این موضوع نیز صادق می باشد.

برای ارائه آخرین نتیجه اصلی از فصل سوم $(R,\mathfrak{m})$ را حلقه ای موضعی که تصویر پوشایی از یک حلقه کوهن ـ مکولی است اختیار می کنیم. در اینصورت

$$NCM(M) = \{\mathrm{p} \in \mathrm{Spec}\, R | M_{\mathrm{p}} \ \ is \ \ not \ \ Cohen - Macaulay\}$$

نسبت به توپولوژی زاریسکی[۴۱] $\mathrm{Spec}(R)$ مجموعه ای بسته است. لذا به ازای ایده آلی چون a_M داریم $NCM(M) = V(\mathrm{a}_M)$. این ایده آل تا حد رادیکال یکتا است.

قضیه . ۰ . ۷. *$(R,\mathfrak{m})$ را حلقه ای موضعی که تصویر پوشایی ازیک حلقه کوهن ـ مکولی است اختیار کنید و*

---

[۴۰] Gorenstein

[۴۱] Zariski topology

S را یک کلاس سر از R–مدولهابگیرید. فرض کنید M یک R–مدول با تولید متناهی باشد. گزاره‌های زیرمعادلند.

(۱) $R/\mathfrak{a}_M \in S$ و همچنین $\dim M = \dim R/\mathfrak{p}$ به ازای هر $\mathfrak{p} \in min(S - \operatorname{Supp} M)$.

(۲) M کوهن ـ مکولی نسبت به کلاس سر S است.

بر اساس همان انگیزه هایی که برای فصل سوم آمده است فصل چهارم رساله تلاشی برای توسیع مطا لب موجود در فصل سوم به حلقه‌های غیر نوتری و نظریه تابی می باشد. یکی از ابزارهای مهم همولوژیک در جبر جابجایی لمی معروف [۴۲] از پسکین [۴۳] و اسپیخو [۴۴] است. کلید کار ما در فصل چهارم تعمیمی از لم پسکین و اسپیخو است. لم ۱۲.۱.۴ را ببینید.

برای هر R–مدول چون L قرار می دهیم $T(L) := \{N \in R\text{–}Mod | \operatorname{Supp}_R N \subseteq \operatorname{Supp}_R L\}$. آن یک کلاس سر است که تحت جمع مستقیم بسته است. در فصل سوم خواهیم دید که روی حلقه های نوتری هر نظریه تابی به این گونه است. متاسفانه همانطور که خواهیم دید روی حلقه های غیر نوتری هر نظریه تابی لزوما به این گونه نیست. به نظریه تابی که به ازای R–مدولی چون L به فرم

$$T(L) := \{N \in R\text{–}Mod | \operatorname{Supp}_R N \subseteq \operatorname{Supp}_R L\}.$$

باشد نظریه تابی نمایش پذیر می گوییم. با استفاده از تعمیم لم پسکین و اسپیخو مقایسه ای میان انواع تعاریف مختلف از مفهوم نمره ایده آلها روی مدولها نسبت به نظریه های تابی ارائه خواهیم کرد. بطور صریحتر قضیه زیر را اثبات خواهیم کرد.

قضیه . ۰ . ۸. *T را نظریه تابی و M را یک R–مدول بگیرید. فرض کنید که $\mathfrak{a}$ با تولید متناهی است در اینصورت گزاره های زیر برقرار هستند:*

(۱) $T - \check{C}.\operatorname{grad}_R(\mathrm{a}, M) = T - K.\operatorname{grad}_R(\mathrm{a}, M)$.

(۲) $T - E.\operatorname{grad}_R(\mathrm{a}, M) = T - K.\operatorname{grad}_R(\mathrm{a}, M) = T - H.\operatorname{grad}_R(\mathrm{a}, M)$ *به شرط آنکه R موروثی و یا T نمایش پذیر باشد.*

---

[۴۲] Lemma Acyclicites

[۴۳] Peskine

[۴۴] Szpiro

نتیجه دیگر از فصل چهارم به قرار زیر است.

قضیه ۰ . ۹ . *M را یک R—مدول، $\mathfrak{a}$ را ایده آلی با تولید متناهی از R و $x \in \mathfrak{a}$ راعنصری M—منظم ضعیف نسبت به T و T را نظریه تابی بگیرید. در اینصورت گزاره های زیر برقرار هستند.*

(۱) $T - K.\operatorname{grad}_R(\mathfrak{a}, M) = T - K.\operatorname{grad}_R(\mathfrak{a}, M/xM) + ۱$.

(۲) $T - \check{C}.\operatorname{grad}_R(\mathfrak{a}, M) = T - \check{C}.\operatorname{grad}_R(\mathfrak{a}, M/xM) + ۱$.

(۳) $T - E.\operatorname{grad}_R(\mathfrak{a}, M) \leq T - E.\operatorname{grad}_R(\mathfrak{a}, M/xM) + ۱$.

(۴) $T - H.\operatorname{grad}_R(\mathfrak{a}, M) \leq T - H.\operatorname{grad}_R(\mathfrak{a}, M/xM) + ۱$

(۵) *در (۳) و (۴) تساوی برقرار است به شرط آنکه R موروثی و یا T نمایش پذیر باشد.*

مقا له های زیر از مطالب موجود در این رساله حا صل شده اند:

(۱) *Cohen-Macaulayness with respect to Serre classes*, Illinois J. Math. 2009, 67–85.

(۲) *On the notion of Cohen-Macaulayness for non Noetherian rings*, J. Algebr 2009, 2297-2320.