چکیده

در فصل اول، رساله را با نگاهی اجمالی به ساختار و مفاهیم مقدماتی نظریه کوهمولوژی موضعی و همچنین مسایل باز در این زمینه آغاز میکنیم.

در فصل دوم، وضعیت مدولهای کوهمولوژی موضعی مدرج $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ را، وقتی M مدولی مدرج و متناهی مولد روی حلقه مدرج استاندارد $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} R_n$ و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی همگن از R و شامل ایده‌آل $R_+ = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n$ است، مورد مطالعه قرار میدهیم و قضایای اساسی ثابت شده برای مدولهای مدرج $H_{R_+}^i(M)$ را با جایگزینی ایده‌آل همگن $\mathfrak{a} \supseteq R_+$ با ایده‌آل R_+ بررسی میکنیم. از لحاظ ساختاری ثابت خواهیم کرد که ممکن است مولفه های $H_{\mathfrak{a}}^i(M)_n$ متناهی مولد نباشند ولی، همانند مدولهای $H_{R_+}^i(M)$، این مولفه ها برای n های بقدر کافی بزرگ صفرند و حتی در این زمینه رابطه نزدیکتری با مدولهای $H_{R_+}^i(M)$ دارند. همچنین رفتار مجانبی دنباله $(\mathrm{Ass}_{R_0}(H_{\mathfrak{a}}^i(M)_n))_{n\in\mathbb{Z}}$ را وقتی $n \to -\infty$ بررسی خواهیم کرد. بویژه، پس از اثبات چند لم و قضیه مورد نیاز، ثابت میکنیم که برای هر $i \leq f_{\mathfrak{a}}^{R_+}(M)$ زیر مجموعه متناهی X از $\mathrm{Spec}(R_0)$ موجود است بطوریکه $\mathrm{Ass}_{R_0}(H_{\mathfrak{a}}^i(M)_n) = X$ برای هر $n \ll 0$.

در فصل سوم رفتار مجانبی عمق مولفه های همگن $H_{R_+}^i(M)_n$ را وقتی $n \to -\infty$ مورد مطالعه قرار میدهیم. بعبارتی وقتی $\mathfrak{a}_0$ ایده‌آلی از حلقه پایه R_0 است کران پایینی برای اعضای دنباله $(\mathrm{grade}(\mathfrak{a}_0, H_{R_+}^{f_{R_+}(M)}(M)_n))_{n\in\mathbb{Z}}$ وقتی $n \to -\infty$، مستقل از n، ارائه میدهیم و در حالت خاص $f_{R_+}(M) = \mathrm{cd}_{R_+}(M)$، ثابت خواهیم کرد $\mathrm{grade}(\mathfrak{a}_0, H_{R_+}^{f_{R_+}(M)}(M)_n) = f_{\mathfrak{a}_0+R_+}^{R_+}(M) - f_{R_+}(M)$ برای هر $n \ll 0$. سپس رفتار مجانبی دنباله $(\mathrm{grade}(\mathfrak{a}_0, H_{R_+}^i(M)_n))_{n\in\mathbb{Z}}$ را تحت شرایطی روی حلقه پایه R_0 بررسی خواهیم کرد.

فرض کنید حلقه R و $R-$مدول M در شرایط قبل صدق کنند، بعلاوه فرض کنید حلقه پایه R_0 موضعی و آرتینی باشد و برای هر $i \in \mathbb{N}_0$ و هر $n \in \mathbb{Z}$ قرار دهید $d_M^i(n) := \mathrm{length}_{R_0}(D_{R_+}^i(M)_n)$، که در آن $D_{R_+}^i(\bullet)$ بیانگر $i-$امین فانکتور مشتق شده راست فانکتور $D_{R_+}(\bullet) = \varinjlim_{n\to\infty} \mathrm{Hom}_R(R_+^n, \bullet)$ است. همچنین فرض کنید $K^i(M)$ نشان‌دهنده $i-$امین مدول ناقص M باشد. در فصل چهارم، برای هر $i \in \mathbb{N}_0$، کران بالایی برای ناوردای نظم مدولهای ناقص $\mathrm{reg}(K^i(M))$ بر حسب قطر کوهمولوژیکی $d_M^0(0)$، $d_M^1(-1)$، $\cdots$، $d_M^{\dim(M)-1}(1-\dim(M))$ و $\mathrm{beg}(M)$ ارائه میدهیم. این مطلب نقشی اساسی در اثبات قضیه اصلی فصل پنجم ایفا میکند. همچنین در این فصل کاربردهایی از این قضیه را در یافتن کران بالایی برای ناوردای نظم مدولهایی خاص بیان میکنیم.

فرض کنید $d \in \mathbb{N}$ و $\mathfrak{D}^d$ بیانگر مجموعه همه زوجهای (R, M) باشد که در آن R حلقه‌ای مدرج و استاندارد با حلقه پایه‌ای آرتینی و M یک $R-$مدول مدرج و متناهی مولد است که $\dim(M) \leq d$. در فصل پنجم سعی میکنیم زیر مجموعه‌هایی از $\mathfrak{D}^d$، مانند $\mathcal{C}$، را پیدا کنیم بطوریکه مجموعه دنباله‌های $(d_M^i(n))_{(i,n)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{Z}}$ از اعداد صحیح، وقتی (R, M) در $\mathcal{C}$

تغییر میکند، متناهی باشد. بویژه، پس از اثبات چندین لم و قضیه مورد نیاز، ثابت میکنیم که اگر $x_0,\cdots,x_{d-1}\in\mathbb{N}_0$ و $n_0,\cdots,n_{d-1}\in\mathbb{Z}$ بطوریکه $n_0>n_1>\cdots>n_{d-1}$ و $\mathcal{C}=\{(R,M)\in\mathfrak{D}^d \mid d_M^0(n_0)\le x_0, d_M^1(n_1)\le x_1,\cdots,d_M^{d-1}(n_{d-1})\le x_{d-1}\}$ آنگاه مجموعه $\{(d_M^i(n))_{(i,n)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{Z}} \mid (R,M)\in\mathcal{C}\}$ متناهی است. همچنین عکس این مطلب را نیز ثابت میکنیم. بعبارتی نشان میدهیم اگر زیر مجموعه $\mathbb{S}$ از $\{0,\cdots,d-1\}\times\mathbb{Z}$ بگونه‌ای باشد که برای هر خانواده $(h^{(i,n)})_{(i,n)\in\mathbb{S}}$ از اعداد صحیح مجموعه

$$\{(d_M^i(n))_{(i,n)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{Z}} \mid (R,M)\in\mathfrak{D}^d \text{ و برای هر } (i,n)\in\mathbb{S}\text{، } d_M^i(n)\le h^{(i,n)}\}$$

متناهی باشد آنگاه $\mathbb{S}$ شامل مجموعه‌ای بفرم $\{(i,n_i) \mid i\in\{0,\cdots,d-1\}\}$ است، که در آن $n_0,\cdots,n_{d-1}\in\mathbb{Z}$ و $n_0>n_1>\cdots>n_{d-1}$.

در فصل ششم، ابتدا ناوردای بعد کوهمولوژیکی یک مدول را بررسی میکنیم و در حالت کلی کران پایینی برای آن معرفی میکنیم و در حالتی خاص نیز مقدار آن را دقیقاً معلوم میکنیم. سپس تعمیمی از مدولهای کوهمولوژی موضعی را مورد مطالعه قرار میدهیم و خاصیت صفر شدن و متناهی مولد بودن این مدولها را بررسی میکنیم.

واژه های کلیدی: مدولهای کوهمولوژی موضعی، مدولهای مدرج، مدولهای آرتینی، مجموعه ایده‌آلهای اول وابسته، ناوردای نظم، توابع هیلبرت.

از این رساله مقالات زیر استخراج شده است. لازم به ذکر است که فصلهای دوم و سوم رساله به ترتیب مبتنی بر مقالات اول و دوم و فصلهای چهارم و پنجم بر اساس مقاله سوم و فصل ششم نیز عمدتاً بر اساس مقاله چهارم نگاشته شده است.

1. M. Jahangiri and H. Zakeri, *Local cohomology modules with respect to an ideal containing the irrelevent ideal*, J. Pure and Applied Algebra, **213** (2009) 573-581.

2. H. Hasanzadeh, M. Jahangiri and H. Zakeri, *Asymptotic behaviour and Artinian property of graded local cohomology modules*, accepted for publication in Communication in Algebra.

3. M. P. Brodmann, M. Jahangiri and C. H. Linh, *Castelnouvo-Mumford regularity of deficiency modules and boundedness of cohomology*, preprint.

4. M. Jahangiri, Sh. Tahamtan and H. Zakeri, *Cohomological and finiteness dimension of generalized local cohomology modules*, preprint.