

چکیده

فرض کنید (R, m) حلقه‌ای جابجایی، نوتری و موضعی باشد که دارای همبافت دوگان ساز نرمال شده D است. فانکتور دوگانی ماتلیس را با نماد $(-)^{\vee}$ نمایش می‌دهیم. با استفاده از مدولهای کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته، ارتباط بین هم ارزی فاکسبی ودوگانی موضعی را بررسی می‌کنیم. بدین منظور فرض کنید X و Y دو همبافت با همولوژی مدولهای متناهی مولد باشند که همبافت همولوژی‌شان کراندار است. نشان می‌دهیم که اگر بعد پروژکتیو گرنشتاین X و بعد انژکتیو Y متناهی باشند، آنگاه $\mathbf{R}\Gamma_m(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X, Y)) \simeq (\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(Y, D \otimes_R^L X))^{\vee}$. همچنین ثابت می‌کنیم که اگر بعد انژکتیو گرنشتاین Y و بعد پروژکتیو X متناهی باشند، آنگاه $\mathbf{R}\Gamma_m(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X, Y)) \simeq (\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(D, Y), X))^{\vee}$. به عنوان کاربردهایی از این نتایج دوگانی، روشی برای تشخیص مدولهای کوهن-مکالی و گرنشتاین ارائه می‌دهیم و همچنین قضیه صفرنشونده گروتندیک را برای مدولهای کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته، بیان می‌کنیم. این مطلب ثابت شده است که اگر R -مدول کوهن-مکالی ناصفری بابعد پروژکتیو گرنشتاین متناهی موجود باشد، آنگاه R -مدول متناهی مولد ناصفری بابعد انژکتیو گرنشتاین متناهی موجود است. ماثبات می‌کنیم که اگر R -مدول متناهی مولد ناصفری بابعد انژکتیو گرنشتاین متناهی موجود باشد، آنگاه همبافت کوهن-مکالی بابعد پروژکتیو گرنشتاین متناهی موجود است. همچنین نشان می‌دهیم که اگر R -مدول کوهن-مکالی ناصفری بابعد انژکتیو گرنشتاین متناهی موجود باشد، آنگاه R -مدول کوهن-مکالی ناصفری بابعد پروژکتیو گرنشتاین متناهی موجود است.

فرض کنید α ایدالی از حلقه جابجایی و نوتری S باشد. در ادامه، فانکتورهای حفظ کننده هم ارزی ضعیف شده را تعریف می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که فانکتور α -تابدار (به ترتیب α -ادیک کامپلیشن) حفظ کننده هم ارزی ضعیف شده روی کاتگوری همبافتهای از چپ (به ترتیب راست) از مدولهای گرنشتاین انژکتیو (به ترتیب یکدست) است. با استفاده از این مطلب، ثابت می‌کنیم که برای محاسبه مدولهای (کو) همولوژی موضعی همبافتهای می‌توانیم از رزولوشنهای (انژکتیو) یکدست گرنشتاین استفاده کنیم. به عنوان کاربردهایی از این نتایج، ثابت می‌کنیم که برای هر همبافت $(\mathbf{R}\Gamma_{\alpha}(X) \leq \mathrm{Gid}_S X$ و $\sup \mathbf{L}\alpha^{\vee}(X) \leq \mathrm{Gfd}_S X, X \in D_{\square}(S)$ - همچنین اگر S همبافت دوگان ساز داشته باشد، نشان می‌دهیم که $\mathrm{Gid}_S \mathbf{R}\Gamma_{\alpha}(X) \leq \mathrm{Gid}_S X$ و $\mathrm{Gfd}_S \mathbf{L}\alpha^{\vee}(X) \leq \mathrm{Gfd}_S X$. در پایان، محکی را برای تشخیص منظم بودن حلقه‌های موضعی گرنشتاین ارائه داده و چندین روش برای محاسبه فانکتورهای $\mathbf{R}\Gamma_{\alpha}(-, \sim)$ و $\mathbf{L}\alpha^{\vee}(-, \sim)$ و همولوژی مدولهایشان ارائه می‌دهیم.