چکیده

فرض کنید $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} R_i$ یک حلقه‌ی مدرج نوتری استاندارد و M یک Rـمدول مدرج باشد. در این رساله مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آلهای اول چسبیده $\mathrm{H^c_{R_+}(M)}$ ، $c := \mathrm{cd(M) = sup\{i \in \mathbb{Z} \mid H^i_{R_+}(M) \neq 0\}}$، و مجموعه‌ی ایده‌آلهای اول وابسته $\mathrm{H^i_{R_+}(M)}$ بررسی می‌شوند. همچنین در مورد رفتار مجانبی $\mathrm{Hom_R(R/R_+, H^s_{R_+}(M))}$ به ازای مقادیر $s \leq f(M)$، $f(M) = \sup\{i \in \mathbb{Z} \mid$ متناهی مولد نیست $\mathrm{H^i_{R_+}(M)}\}$، بحث می‌شود و نشان می‌دهیم که اگر به ازای هر $i < h$، $\mathrm{H^i_{R_+}(M)}$ آرتینی باشد آنگاه $\mathrm{H^h_{R_+}(M)}$ رام[1] است. در ادامه شرط موضعی بودن حلقه‌ی R_0 را به مفروضات فوق اضافه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که برای هر Rـمدول متناهی مولد M، عدد نظم Tor $\mathrm{reg^T_R(M)}$ کوچکتر یا مساوی مجموع عدد نظم کاستلنوـمامفورد $\mathrm{reg_R(M)}$ و عدد نظم Tor $\mathrm{reg^T_R(K)}$ می‌باشد که در آن K میدان خارج قسمتی حلقه‌ی R_0 است. در نهایت نشان می‌دهیم که‌برای هر Rـمدول مدرج متناهی مولد M، عدد نظم Ext $\mathrm{reg^E_R(M)}$ کوچکتر یا مساوی مجموع عدد نظم کاستلنوـمامفورد $\mathrm{reg_R(M)}$ ، عدد نظم Ext $\mathrm{reg^E_R(K)}$ و بعد کرول $\mathrm{dim(\frac{M}{R_+M})}$ می‌باشد. این نامساویها نشان می‌دهد که اگر عدد نظم Ext (Tor) میدان خارج قسمتی K متناهی باشد آنگاه عدد نظم Ext (Tor) همه‌ی مدولهای متناهی مولد نیز متناهی خواهد بود.

کلمات کلیدی: کوهمولوژی موضعی مدرج، ایده‌آلهای اول چسبیده، ایده‌آلهای اول وابسته، رفتار مجانبی، رام بودن، عدد نظم کاستلنوـمامفورد، عدد نظم Tor، عدد نظم Ext.

---

[1] tame

مقدمه

در سراسر این رساله $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} R_i$ یک حلقه‌ی نوتری استاندارد مدرج است، که درآن R_0 یک حلقه‌ی نوتری است و عناصر $x_1, \ldots, x_t \in R_1$ موجودند به طوریکه $R = R_0[x_1, \ldots, x_t]$. ایده‌آل $\bigoplus_{i\geq 1} R_i$ از حلقه‌ی R را با R_+ نشان می‌دهیم. همچنین $M := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ به عنوان یک Rـمدول مدرج در نظر گرفته می‌شود. iـامین کوهمولوژی موضعی M نسبت به ایده‌آل R_+ را با $\mathrm{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M})$ نمایش می‌دهیم. با توجه به مطالب بیان شده در **[11, Chapter 12]**، Rـمدولهای $\mathrm{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M})$ ساختاری مدرج دارند. nـامین مؤلفه‌ی همگن از Rـمدول مدرج $\mathrm{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M})$ را با $\mathrm{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M})_{\mathrm{n}}$ نشان می‌دهیم. برای هر Rـمدول مدرج M و هر عدد صحیح a، انتقال یافته‌ی M به مقدار a را با $M[a]$ نشان می‌دهیم، که در آن مؤلفه‌ها به صورت $M[a]_i = M_{a+i}$ می‌باشد. با توجه به **[11,Proposition 15.1.5]**، به ازای هر Rـمدول مدرج M داریم:

الف) به ازای هر $i \in \mathbb{N}_0$ و هر $n \in \mathbb{Z}$، R_0ـمدول $\mathrm{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M})_{\mathrm{n}}$ متناهی مولد است.

ب) به ازای هر $i \in \mathbb{N}_0$ و هر $n \gg 0$، $\mathrm{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M})_{\mathrm{n}} = 0$.

مدولهای کوهمولوژی موضعی و اعداد نظم[1] روی حلقه های استاندارد، مطالب اصلی هستند که در این رساله مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در فصل اول مطالب مقدماتی که در فصلهای بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند بیان می‌شود. در فصل دوم مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آلهای اول چسبیده به $\mathrm{H}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M})$، که در آن $c := \mathrm{cd}(\mathrm{M}) = \sup\{\mathrm{i} \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M}) \neq 0\}$

[1] regularity

و مجموعه‌ی ایده‌آلهای اول وابسته $\mathrm{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M})$ بررسی می‌شوند. همچنین به ازای مقادیر $s \leq f(M)$، در مورد رفتار مجانبی $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(\mathrm{R}/\mathrm{R}_+, \mathrm{H}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M}))$ بحث می‌شود که در آن $f(M) = \sup\{i \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M})\}$ متناهی مولد نیست. این فصل شامل سه بخش است. در بخش اول مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آلهای اول چسبیده به $\mathrm{H}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M})$ بررسی می شود و در حالتیکه R_0 یک حلقه‌ی موضعی است، نشان می‌دهیم که تعداد عناصر ماکزیمال این مجموعه متناهی است و همان مجموعه‌ی ایده‌آلهای اول چسبیده به $\mathrm{H}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M}/\mathfrak{m}_0\mathrm{M})$ است.

یکی از مهمترین مسائلی که در جبر جابجایی مطرح می شود بررسی متناهی بودن مجموعه‌ی ایده‌آلهای اول وابسته $\mathrm{H}^{\mathrm{i}}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{M})$ می‌باشد. این سؤال که به وسیله‌ی هونیکه[1] **[23]** مطرح شده است، توسط محققین زیادی مورد بررسی قرار گرفته است. در این قسمت به مرور این مطالب می‌پردازیم. در حالتیکه M متناهی مولد است، واضح است که $\mathrm{Ass}_{\mathrm{R}}\mathrm{H}^{0}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{M})$ یک مجموعه‌ی متناهی است. همچنین وقتی که M یک Rـمدول متناهی مولد با بعد n است، $\mathrm{H}^{\mathrm{n}}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{M})$ یک Rـمدول آرتینی است و لذا $|\mathrm{Ass}_{\mathrm{R}}\mathrm{H}^{\mathrm{n}}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{M})| < \infty$.

[10, Remark 3.11] نشان می دهد در حالتیکه R موضعی است تعداد ایده‌آلهای اول وابسته $\mathrm{H}^{\mathrm{dimR}}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{M})$ متناهی است. مارلی[2] **[27]** نشان داد که روی حلقه‌ی موضعی R، تعداد ایده‌آلهای اول وابسته $\mathrm{H}^{\mathrm{dimR}-1}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{M})$ متناهی است. برای حل این مسأله تلاشهای زیادی صورت گرفته است. خشایارمنش و سالاریان [25] با استفاده از مفهوم $\mathfrak{a}$ـفیلتر رشته منظم[3] و dـرشته قوی غیرشرطی[4] مطلب زیر را بدست آورده‌اند:

قضیه ۱.۰.۰ فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری، M یک Rـمدول متناهی مولد و t یک عدد صحیح نامنفی باشد. در اینصورت اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد آنگاه

[1] Huneke
[2] Marley
[3] filter regular sequence
[4] unconditioned strong sequence

$\mathrm{Ass_R H^t_{\mathfrak{a}}(M)}$ متناهی است.

الف) به ازای هر $i < t$، $\mathrm{SuppH^i_{\mathfrak{a}}(M)}$ متناهی است.

ب) به ازای هر $i < t$، $\mathrm{H^i_{\mathfrak{a}}(M)}$ متناهی مولد است.

فرض کنید t یک عدد صحیح نامنفی باشد بطوریکه به ازای هر $i < t$، $\mathrm{H^i_{\mathfrak{a}}(M)}$ متناهی مولد باشد. تجرد و ذاکری [35] با استفاده از $\mathfrak{a}$ـفیلتر رشته روی مدولها نشان داده‌اند که $\mathrm{Ass_R H^t_{\mathfrak{a}}(M)}$ دارای نمایش صریحی می باشد. برادمن[۱]، راتهاوس[۲] و شارپ[۳] [9] بدون استفاده از مفهوم $\mathfrak{a}$ـفیلتر رشته منظم و dـرشته قوی، اثبات ساده‌ای برای مطلب زیر که نتیجه‌ای از قضیه ۱.۰.۰ (ب) می باشد ارائه نموده‌اند.

قضیه ۲.۰.۰ فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری و M یک Rـمدول متناهی مولد باشد. در اینصورت مطالب زیر برقرارند:

الف) اگر $M \neq \mathfrak{a}M$ آنگاه $\mathrm{Ass_R H^{grade(\mathfrak{a},M)}_{\mathfrak{a}}(M)}$ متناهی است.

ب) $\mathrm{Ass_R H^1_{\mathfrak{a}}(M)}$ متناهی است.

ج) اگر $\mathrm{H^1_{\mathfrak{a}}(M)}$ متناهی مولد باشد آنگاه $\mathrm{Ass_R H^2_{\mathfrak{a}}(M)}$ متناهی است.

در نهایت، برادمن و لشگری [8] اثبات زیبا و آسانی برای مطلب زیر که تعمیمی از قضیه‌های ۱.۰.۰ (ب) و ۲.۰.۰ می باشد ارائه نمودند.

قضیه ۳.۰.۰ فرض کنید M یک Rـمدول متناهی مولد و t یک عدد صحیح نامنفی باشد بطوریکه به ازای هر $i < t$، $\mathrm{H^i_{\mathfrak{a}}(M)}$ متناهی مولد باشد. در اینصورت به ازای هر زیر مدول متناهی مولد N از $\mathrm{H^t_{\mathfrak{a}}(M)}$، $\mathrm{Ass_R(H^t_{\mathfrak{a}}(M)/N)}$ متناهی است.

Brodmann[۱]
Rotthaus[۲]
Sharp[۳]

با توجه به تساوی $\mathrm{Ass_R(Hom_R(R/\mathfrak{a}, H^t_\mathfrak{a}(M))) = Ass_R H^t_\mathfrak{a}(M)}$، اگر $\mathrm{Hom_R(R/\mathfrak{a}, H^t_\mathfrak{a}(M))}$ متناهی مولد باشد آنگاه $\mathrm{Ass_R H^t_\mathfrak{a}(M)}$ یک مجموعه‌ی متناهی است. بنابراین برای پاسخ دادن به این سؤال ما می توانیم حدس زیر را که توسط گروتندیک[۱] **[21]** مطرح شده است بررسی کنیم.

فرض کنید M یک Rـمدول متناهی مولد و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از حلقه R باشد. در اینصورت برای هر $j \geq ۰$، $\mathrm{Hom_R(R/\mathfrak{a}, H^j_\mathfrak{a}(M))}$ متناهی مولد است.

این حدس در حالت کلی درست نیست، به **[22, Example 1]** مراجعه شود. در ادامه مطلب زیر که تعمیمی از قضیه ۱.۰.۰(ب) است بیان می شود (به **[2]** مراجعه شود).

قضیه ۴.۰.۰ فرض کنید M یک Rـمدول متناهی مولد و t یک عدد صحیح نامنفی باشد بطوریکه به ازای هر $i < t$، $\mathrm{H^i_\mathfrak{a}(M)}$ متناهی مولد باشد. در اینصورت $\mathrm{Hom_R(R/\mathfrak{a}, H^t_\mathfrak{a}(M))}$ متناهی مولد است.

هارتشورن[۲] **[22]** مفهوم مدولهای هم متناهی[۳] نسبت به یک ایده‌آل را مطرح کرد. این مفهوم بصورف زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۵.۰.۰ فرض کنید M یک Rـمدول باشد. اگر $\mathrm{Supp(M) \subseteq V(\mathfrak{a})}$ و به ازای هر i، $\mathrm{Ext^i_R(R/\mathfrak{a}, M)}$ متناهی مولد باشد آنگاه گوئیم M یک Rـمدول $\mathfrak{a}$ـهم متناهی است.

با توجه به تعریف فوق مشاهده می شود که هر مدول متناهی مولد، به ازای هرایده‌آل دلخواه $\mathfrak{a}$، $\mathfrak{a}$ـهم متناهی است. همچنین اگر R یک حلقه‌ی موضعی باشد آنگاه Rـمدول M $\mathfrak{m}$ـهم متناهی است اگر و فقط اگر آرتینی باشد. اخیراً دیوانی آذر و مافی مدولهای لسکرین

[۱] Grothendieck
[۲] Hartshorne
[۳] cofinite

ضعیف[۱] را معرفی کردند. Rـمدول M، لسکرین ضعیف نامیده می‌شود هر گاه به ازای هر زیر مدول N از M، $\mathrm{Ass_R(M/N)}$ متناهی باشد. به عنوان مثال Rـمدولهای متناهی مولد، Rـمدولهای آرتینی و Rـمدولهایی که دارای محمل[۲] متناهی هستند لسکرین ضعیف می‌باشند. دیوانی آذر و مافی [14] با استفاده از رشته‌های طیفی[۳] نتیجه‌ی زیر را بدست آورده‌اند که این نتیجه تعمیمی برای ۱.۰.۰ و ۴.۰.۰ می‌باشد.

قضیه ۰.۰.۶ فرض کنید M یک Rـمدول لسکرین ضعیف و t یک عدد صحیح نامنفی باشد بطوریکه به ازای هر $i < t$، $\mathrm{H^i_\mathfrak{a}(M)}$ $\mathfrak{a}$ـهم متناهی باشد. در اینصورت مجموعه‌ی ایده آلهای اول وابسته $\mathrm{Hom_R(R/\mathfrak{a}, H^t_\mathfrak{a}(M))}$ و $\mathrm{Ext^1_R(R/\mathfrak{a}, H^t_\mathfrak{a}(M))}$ متناهی هستند.

از طرف دیگر دیبایی و یاسمی بدون استفاده از رشته‌های طیفی مطلب زیر که تعمیمی از ۴.۰.۰ است را ثابت کرده اند.

قضیه ۰.۰.۷ (**[16, Theorem 2.1]**) فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده آلی از حلقه نوتری R، s یک عدد صحیح نامنفی و M یک Rـمدول باشد بطوریکه $\mathrm{Ext^s_R(R/a, M)}$ متناهی مولد است. اگر به ازای هر $i < s$، $\mathrm{H^i_\mathfrak{a}(M)}$ $\mathfrak{a}$ـهم متناهی باشد آنگاه $\mathrm{Hom_R(R/\mathfrak{a}, H^s_\mathfrak{a}(M))}$ متناهی مولد خواهد بود.

در ادامه این مطالب دیبایی و یاسمی نشان دادند که اگر مدولهای $\mathrm{H^i_\mathfrak{a}(M)}$، $i < s$، در تعداد متناهی شرط صدق کنند آنگاه $\mathrm{Hom_R(R/\mathfrak{a}, H^s_\mathfrak{a}(M))}$ متناهی مولد خواهد بود.

قضیه ۰.۰.۸ (**[18, Theorem 6.3.9]**) فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده آلی از حلقه‌ی نوتری R، s یک عدد صحیح نامنفی و M یک Rـمدول باشد. شرایط زیر را در نظر بگیرید:

---

[۱] weakly Laskerian
[۲] Support
[۳] spectral sequences

الف) $\mathrm{Ext}^{s}_{R}(R/\mathfrak{a}, M)$ متناهی مولد است.

ب) $\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H^{s}_{\mathfrak{a}}(M))$ متناهی مولد است.

در اینصورت خواهیم داشت:

۱) اگر به ازای هر $j < s$، $\mathrm{Ext}^{s-j}_{R}(R/\mathfrak{a}, H^{j}_{\mathfrak{a}}(M))$ متناهی مولد باشد آنگاه (ب) ، (الف) را نتیجه می دهد.

۲) اگر به ازای هر $j < s$، $\mathrm{Ext}^{s+1-j}_{R}(R/\mathfrak{a}, H^{j}_{\mathfrak{a}}(M))$ متناهی مولد باشد آنگاه (الف) ، (ب) را نتیجه می دهد.

بعلاوه اگر به ازای $t = s, s+1$ و به ازای هر $j < s$، $\mathrm{Ext}^{t-j}_{R}(R/\mathfrak{a}, H^{j}_{\mathfrak{a}}(M))$ متناهی مولد باشد آنگاه گزینه های (الف) و (ب) معادل می شوند.

در بخش دوم به مطالعه‌ی $\mathrm{Ass}_R(H^{s}_{R_+}(M))$ می پردازیم. ابتدا نشان می دهیم که اگر K یک مدول روی حلقه‌ی نوتری S باشد آنگاه به ازای هر ایده‌آل $\mathfrak{a}$ از S و هر عدد صحیح نامنفی s خواهیم داشت:

$$\mathrm{Ass}_S(H^{s}_{\mathfrak{a}}(K)) \subseteq \bigcup_{0\leq j<s} \mathrm{Ass}_S(\mathrm{Ext}^{s-j+1}_{S}(S/\mathfrak{a}, H^{j}_{\mathfrak{a}}(K))/L_j) \bigcup \mathrm{Ass}_S(\mathrm{Ext}^{s}_{S}(S/\mathfrak{a}, K)/L)$$

که در آن $L, L_0, \cdots, L_{s-1}$ زیر مدولهایی از مدولهای متناظر خود می‌باشند. همچنین نشان می‌دهیم که در حالتیکه M یک مدول مدرج روی حلقه‌ی مدرج استاندارد $R = R_0[R_1]$ است و مدولهای $\mathrm{Ext}^{s-j+1}_{R}(R/R_+H^{j}_{R_+}(M)), 0 \leq j < s$ و $\mathrm{Ext}^{s}_{R}(R/R_+, M)$ لسکرین ضعیف مدرج هستند مجموعه‌ی $\mathrm{Ass}_R(H^{s}_{R_+}(M))$ یک مجموعه‌ی متناهی است.

بخش سوم به مطالعه‌ی رفتار مجانبی مدولهای $\mathrm{Hom}_R(R/R_+, H^{i}_{R_+}(M))$ و $H^{i}_{R_+}(M)$ اختصاص داده شده است. در این بخش مابه ازای Rـمدول مدرج دلخواه M ایستایی مجانبی ایده‌آلهای اول وابسته[1] ، ایستایی مجانبی محملها[2] و رام[3] بودن $\mathrm{Hom}_R(R/R_+, H^{i}_{R_+}(M))$ را

[1] asymptotic stability of associated primes
[2] asymptotic stability of supports
[3] tame

مطالعه و بررسی می‌کنیم. همچنین تعمیمی برای [9, Theorem 3.6(a)]، که نشان می‌دهد $\mathrm{H}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M})$، $f := f(M) = \inf\{i \mid \mathrm{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M})$ متناهی مولد نیست $\}$، رام است، ارائه می‌دهیم. در [6, Theorem 4.8(e)] رام بودن $\mathrm{H}^{\mathrm{cd(M)}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M})$ مطرح شده است (که در آن، $\mathrm{cd(M)} = \mathrm{Max}\{\mathrm{i} \mid \mathrm{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M}) \neq 0\}$ می باشد). ما نشان خواهیم داد که اگر به ازای هر $h < i$، $\mathrm{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M})$ آرتینی باشد آنگاه $\mathrm{H}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M})$ رام است. این مطلب نشان می دهد که $\mathrm{H}^{\mathrm{dim_R(M)-1}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M})$ نیز رام است.

در فصلهای سوم و چهارم حلقه‌ی پایه $R_\circ$ موضعی در نظر گرفته می شود. حلقه‌ی خارج قسمتی $R_\circ$ را با K نشان می دهیم. برای یک مدول مدرج M، عدد نظم Tor، عدد نظم کاستلنو‌ـ‌مامفورد[1] و عدد نظم Ext به ترتیب به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\mathrm{reg}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}) = \mathrm{Max}\{\mathrm{endTor}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{i}}(\mathrm{M}, \mathrm{R}/\mathrm{R}_+) - \mathrm{i} \mid \mathrm{i} \geq 0\}$$

$$\mathrm{reg}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}) = \mathrm{Max}\{\mathrm{endH}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{M}) + \mathrm{i} \mid \mathrm{i} \geq 0\}$$

$$\mathrm{reg}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}) = \mathrm{Max}\{\mathrm{j} \mid 0 \leq \mathrm{i} \text{ به ازای یک } , \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}, \mathrm{R})_{-\mathrm{j}-\mathrm{i}} \neq 0\}.$$

اخیراً رمر[2] در [32, Theorem 3.1] و چاردین[3] در [12, Proposition 2.4] نشان داده‌اند که برای هر Rـ‌مدول متناهی مولد M روی یک Kـ‌جبر استاندارد R، نامساوی زیر برقرار است.

$$\mathrm{reg}^{T}_{R}(M) \leq \mathrm{reg}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}) + \mathrm{reg}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{R}}(\mathrm{K}) \qquad \text{(I)}$$

در قضیه ۴.۲.۳ ما این مطلب را تعمیم می دهیم.

در فصل سوم بعد از ذکر مطالب مقدماتی در بخش اول، در بخش دوم ابتدا نشان می‌دهیم که روی حلقه‌ی چند جمله‌ایهای Q با حلقه پایه موضعی $R_\circ$، برای مدول متناهی مولد M تساوی $\mathrm{reg}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{M}) = \mathrm{reg}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{M})$ برقرار است.

[1] Castelnuovo–Mumford
[2] Römer
[3] Chardin

پس از آن در قضیه‌ی اصلی این فصل نشان خواهیم داد که روی حلقه‌ی مدرج استاندارد R با حلقه پایه موضعی $R_\circ$، برای هر مدول متناهی مولد M، عدد نظم Tor $\mathrm{reg}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}(\mathrm{M})$ کوچکتر یا مساوی مجموع عدد نظم کاستلنو-مامفورد $\mathrm{reg}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M})$ و عدد نظم Tor $\mathrm{reg}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}(\mathrm{K})$ می‌باشد. این نامساوی نشان می‌دهد که اگر عدد نظم Tor میدان خارج قسمتی K متناهی باشد آنگاه عدد نظم Tor همه‌ی مدولهای متناهی مولد متناهی خواهد بود.

در فصل چهارم نشان می‌دهیم که‌برای هر R-مدول مدرج متناهی مولد M، عدد نظم Ext $\mathrm{reg}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{E}}(\mathrm{M})$ کوچکتر یا مساوی مجموع عدد نظم کاستلنو-مامفورد $\mathrm{reg}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M})$، عدد نظم Ext $\mathrm{reg}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{E}}(\mathrm{K})$ و بعد کرول $\dim(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}_+\mathrm{M}})$ می‌باشد. این نامساوی نشان می‌دهد که اگر عدد نظم Ext میدان خارج قسمتی K متناهی باشد آنگاه عدد نظم Ext همه‌ی مدولهای متناهی مولد متناهی خواهد بود. این فصل شامل سه بخش است. در بخش اول ما نشان می‌دهیم که به ازای هر $\mathfrak{p}_\circ \in \mathrm{SpecR}_0$ داریم $\mathrm{reg}^{\mathrm{E}}(\frac{\mathrm{R}}{\mathfrak{p}_0+\mathrm{R}_+}) \leq \mathrm{reg}^{\mathrm{E}}(\mathrm{K}) + \dim\frac{\mathrm{R}}{\mathfrak{p}_0+\mathrm{R}_+}$ و سپس در قضیه‌ی اصلی فصل چهارم، قضیه ۵.۱.۴، نشان خواهیم داد که برای هر مدول متناهی مولد M رابطه زیر برقرار است.

$$\mathrm{reg}^{E}(M) \leq \mathrm{reg}(\mathrm{M}) + \mathrm{reg}^{\mathrm{E}}(\mathrm{K}) + \dim\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}_+\mathrm{M}} \qquad \text{(II)}$$

در بخش دوم، مدولهای R_+-تابی را که تساوی در رابطه‌ی فوق برای آنها برقرار است بررسی می‌کنیم و در قضیه ۲.۲.۴ شرایط هم ارزی برای برقراری تساوی

$$\mathrm{reg}^{\mathrm{E}}(\frac{\mathrm{R}}{\mathfrak{p}_0+\mathrm{R}_+}) = \mathrm{reg}^{\mathrm{E}}(\mathrm{K}) + \dim\frac{\mathrm{R}}{\mathfrak{p}_0+\mathrm{R}_+}$$

را ارائه می‌دهیم و سرانجام در بخش سوم، مقادیر موجود در (I) و (II) را با هم مقایسه می‌کنیم.

علیرضانظری

دانشگاه تربیت معلم

پاییز ۱۳۷۸