به نام حق

# گرافهاي با دومين مقدار ويژه ي ۱

فرزانه رمضاني

مبتني بر يك تحقيق مشترك با دكتر طايفه رضايي

دوازدهم دي ماه

# فهرست

- مقدمه اي بر روش مكمل ستاره اي
- اضافه كردن يك رأس به مكمل ستاره اي
- گرافهاي ماكسيمال با دومين مقدار ويژه ي ۱و
  مكمل ستاره اي $K_{r,s}+tK_1$

- گرافهاي منظم با دومين مقدار ويژه ي ۱ و
  مكمل ستاره اي $K_{r,s}+tK_1$

# مقدمه

- $G$ را گرافي با مجموعه رأسي $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ در نظربگيريد. فرض كنيد $\mu$ مقدار ويژه ي $G$ با تكرر $k$ باشد.

$k$-زير مجموعه ي $X$ از $V(G)$ را مجموعه ي ستاره اي گويند هرگاه طيف زير گراف القايي $G\backslash X$ شامل $\mu$ نباشد. در اين صورت زير گراف $G\backslash X$ را مكمل ستاره اي براي $\mu$ در $G$ گويند.

# قضيه ي باز سازي

- فرض كنيد $G$ گرافي با مقدار ويژه ي $\mu$ با تكرر $k$ باشد. $k$-زير مجموعه ي $X$ از $G$ را در نظر بگيريد. فرض كنيد ماتريس مجاورت $G$ به فرم زير باشد.

$$\begin{bmatrix} A_X & B^T \\ B & C \end{bmatrix}$$

كه در آن $A_X$ زير ماتريس $A$ متناظر با مجموعه $X$ است. در اين صورت $X$ يك مجموعه ي ستاره اي براي مقدار ويژه ي $\mu$ است اگر و فقط اگر

$$\mu I - A_X = B^T(\mu I - C)^{-1}B.$$

# يك نتيجه ي مهم

فرض كنيد گراف $G$ شامل زير گراف القايي $H$ به عنوان مكمل ستاره اي براي مقدار ويژه $\mu$ باشد. اگر ماتريس مجاورت $G$ مانند آنچه در قضيه ي باز سازي ديديم باشد، آنگاه براي هر دو ستون $B$ مانند $b_u, b_v$ داريم:

$$< b_u, b_v >=$$

$$b_u^T(\mu I - C)^{-1} b_v = \begin{cases} \mu & u = v, \\ -1 & u \text{ adjacent to } v, \\ 0 & u \text{ non-adjacent to } v. \end{cases}$$

# مسأله

تعيين گرافهايي كه شامل مكمل ستاره اي $K_{r,s}+tK_1$ براي مقدار ويژه ي ۱ هستند.

# مراحل حل

۱. تعيين (۱و۰)-بردار هاي به طول $t$ مانند $b$ كه در رابطه ي زير صدق كنند.

$$b^T(\mu I-C)^{-1}b=1$$

۲. متناظر كردن گراف همساز روي رئوس با شرايط بالا و اتصال دو بردار $b\,,c$ هرگاه در شرط زير صدق كنند.

$$b^T(\mu I - C)^{-1}C = 0,-1.$$

۳. پيدا كردن يك خوشه در گراف همساز متناظر.

۴. اتصال رئوس به $H = K_{r,s} + tK_1$ و رسم يالها ي بين اين بردار ها با استفاده از قضيه ي باز سازي.

# قضيه ي باز سازي در مورد مسأله ي ما

- طبق نتيجه اي كه از قضيه ي باز سازي به دست آمد، براي هر ستون $B$ مانند $b_u$ داريم: $< b_u , b_u >= 1$

- ماتريس $C$ در اين حالت به فرم زير است.

$$\begin{bmatrix} 0 & J_{r\times s} & 0 \\ J_{s\times r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

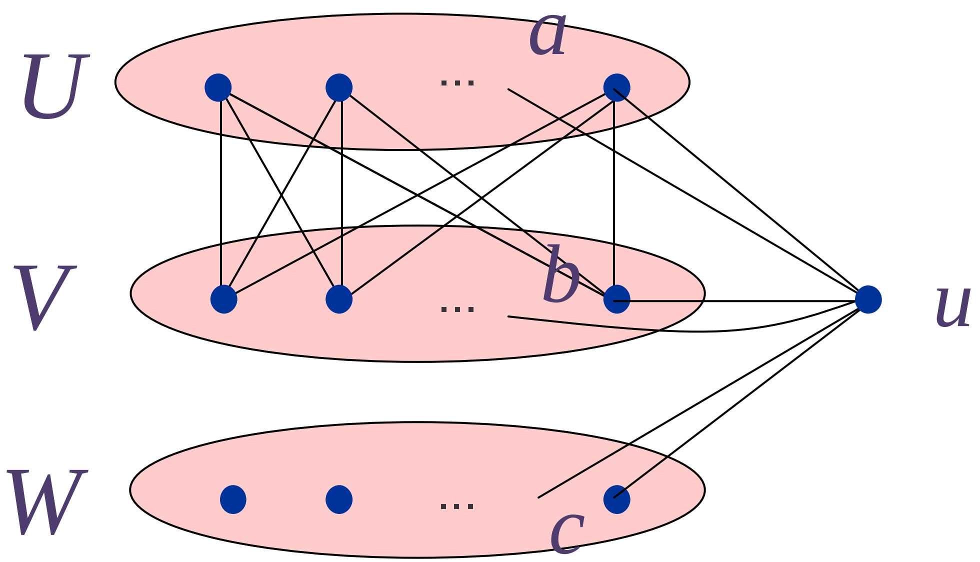
$$(\mu I - C)^{-1}$$

- با استفاده از چند جمله اي مينيمال $C$ ، $(\mu I - C)^{-1}$ را به صورت يك چند جمله اي بر حسب $C$ به دست مي آوريم.

$$(1-rs)(I-C)^{-1} = (1-rs)I + C + C^2.$$

# يك شرط لازم وكافي

فرض كنيد رأس $u$ به $H$ به گونه اي متصل شده باشد كه $a$ همسايه در $U$ ، $b$ همسايه در $V$ و $c$ همسايه در $W$ داشته باشد. در اينصورت داريم:




$$K_{r,s}+tK_1+u$$

$$1-rs=(a+b+c)(1-rs)+2ab+a^2s+b^2r.$$

# جوابهاي ممكن معادله

- $c \geq 3$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| r | ۳ | ۲ | ۲ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |
| s | ۳ | ۵ | ۲ | ۵ | ۳ | ۲ | ۲ | ۲ |
| a | ۳ | ۲ | ۲ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۰ |
| b | ۳ | ۵ | ۲ | ۵ | ۳ | ۲ | ۱ | ۲ |
| c | ۴ | ۴ | ۵ | ۵ | ۶ | ۸ | ۴ | ۳ |

- حالت كلي:

| # | H | (a, b, c) |
|---|---|---|
| 1 | $K_{1,2} + tK_1$ | (0, 2, 3), (1, 1, 4), (1, 2, 8), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 2) |
| 2 | $K_{1,3} + tK_1$ | (1, 3, 6), (0, 0, 1), (0, 2, 1), (1, 1, 2) |
| 3 | $K_{1,5} + tK_1$ | (0, 2, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 4, 1), (1, 3, 2), (1, 5, 5) |
| 4 | $K_{1,9} + tK_1$ | (1, 3, 0), (0, 0, 1), (0, 8, 1), (1, 7, 2) |
| 5 | $K_{1,10} + tK_1$ | (1, 2, 0), (1, 5, 0), (0, 0, 1), (0, 9, 1), (1, 8, 2) |
| 6 | $K_{2,2} + tK_1$ | (2, 2, 5), (0, 0, 1), (1, 1, 1) |
| 7 | $K_{2,5} + tK_1$ | (1, 1, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 1), (2, 2, 1), (1, 4, 1), (2, 5, 4) |
| 8 | $K_{2,13} + tK_1$ | (2, 9, 0), (0, 0, 1), (1, 12, 1) |
| 9 | $K_{3,3} + tK_1$ | (1, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 2, 1), (3, 3, 4) |
| 10 | $K_{3,11} + tK_1$ | (3, 7, 0), (0, 0, 1), (2, 10, 1) |
| 11 | $K_{5,10} + tK_1$ | (5, 6, 0), (0, 0, 1), (4, 9, 1) |
| 12 | $K_{1,s} + tK_1$ (none of the above) | (0, 0, 1), (0, s − 1, 1), (1, s − 2, 2) |
| 13 | $K_{r,s} + tK_1$ (none of the above) | (0, 0, 1), (r − 1, s − 1, 1) |