Математические заметки

том 79 выпуск 4 апрель 2006

УДК 511.3

ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ СУММ ДЗЕТА-ЗНАЧЕНИЙ

Т. Хессами Пилеруд, Х. Хессами Пилеруд

В работе доказывается оценка снизу для размерностей векторных пространств, натянутых над $\mathbb{Q}$ на 1 и суммы значений дзета-функции Римана в четных и нечетных точках. Как следствие, получены количественные результаты об иррациональности и линейной независимости сумм дзета-значений в четных и нечетных точках из заданного интервала натурального ряда.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Рассмотрим полилогарифмическую функцию, определенную для всех целых $k \geqslant 1$ рядом

$$\mathrm{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}, \tag{1}$$

где $|z| < 1$, если $k = 1$, и $|z| \leqslant 1$ при $k \geqslant 2$. Линейная независимость значений полилогарифмов в рациональных точках, близких к нулю, исследовалась во многих работах (см., например, [1]–[4]). Проблема линейной независимости значений функций (1) в точках, близких к границе круга сходимости, в частности, в точке $z = 1$ остается открытой. Из трансцендентности π следует трансцендентность и линейная независимость в точке $z = 1$ значений полилогарифмов с четными номерами

$$\mathrm{Li}_{2k}(1) = \zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} B_{2k};$$

здесь $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ – дзета-функция Римана, $B_{2k} \in \mathbb{Q}$ – числа Бернулли. Иррациональность $\mathrm{Li}_3(1) = \zeta(3)$ была доказана Апери в [5].

Используя критерий линейной независимости Нестеренко [6] и конструкцию Никишина из [1], Ривоаль в [7] доказал, что для любого рационального α, $|\alpha| < 1$, существует бесконечно много таких целых j, что $\mathrm{Li}_j(\alpha)$ иррационально. В дальнейшем этот результат был обобщен в [8] на множество чисел

$$\left\{ \lambda \,\mathrm{Li}_k(\alpha) + \mu \frac{\log^k(\alpha)}{(k-1)!} \;\middle|\; k \in \mathbb{N},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ (\lambda, \mu) \neq (0,0),\ \alpha \in \mathbb{Q},\ |\alpha| \leqslant 1 \right\},$$

Работа выполнена при частичной поддержке Института исследований по теоретической физике и математике (Иран), гранты № 84110026 (первый автор) и № 84110027 (второй автор).

которое также содержит бесконечно много иррациональных. Более того, использование соответствующей симметрии рациональной функции в работах Болла и Ривоаля позволило доказать [9], что среди значений дзета-функции Римана в нечетных точках $\zeta(2k+1) = \mathrm{Li}_{2k+1}(1)$, $k \geqslant 1$, имеется бесконечно много иррациональных, а также получить наилучший количественный результат [10] о том, что по крайней мере одно из четырех чисел $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ иррационально. Подобная методика применялась также в [11] для исследования значений бета-функции Дирихле

$$\beta(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^k}$$

в четных точках $k \geqslant 2$.

В настоящей заметке мы модифицируем конструкцию Ривоаля [9] и доказываем следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть λ_1, λ_2 – произвольные действительные числа, не равные одновременно нулю. Тогда в каждом числовом множестве*

$$\{\lambda_1\zeta(2k) + 2k\lambda_2\zeta(2k+1),\ k \in \mathbb{N}\}, \qquad \{\lambda_1\zeta(2k+1) + (2k+1)\lambda_2\zeta(2k+2),\ k \in \mathbb{N}\}$$

имеется бесконечно много иррациональных чисел. Более точно, для размерностей $\delta_1(a)$, $\delta_2(a)$ векторных пространств, натянутых над $\mathbb{Q}$ на числа

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_1\zeta(2k) + 2k\lambda_2\zeta(2k+1), \qquad k = 1, 2, \dots, \frac{a-1}{2},$$

и

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_1\zeta(2k+1) + (2k+1)\lambda_2\zeta(2k+2), \qquad k = 1, 2, \dots, \frac{a-1}{2},$$

соответственно, где a нечетно, справедливы оценки

$$\delta_1(a), \delta_2(a) \geqslant \frac{\log a}{1+\log 2}(1+o(1)) \qquad \text{при} \quad a \to \infty.$$

Если в теореме 1 для первого из множеств положить $\lambda_1 = 4\lambda\pi$, $\lambda_2 = 1$, а для второго – $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda/(2\pi)$, где $\lambda \in \mathbb{Q}$, то получим

Следствие 1. *Для любого рационального λ в каждом из числовых множеств*

$$\left\{\zeta(2k+1) - \frac{\lambda(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{k(2k)!} \cdot \pi^{2k+1},\ k \in \mathbb{N}\right\},$$
$$\left\{\zeta(2k+1) - \frac{\lambda(-1)^k (2k+1) 2^{2k} B_{2k+2}}{(2k+2)!} \cdot \pi^{2k+1},\ k \in \mathbb{N}\right\}$$

имеется бесконечно много иррациональных чисел.

Теорема 2. *Пусть λ_1, λ_2 произвольные рациональные числа, не равные одновременно нулю. Тогда в каждом числовом наборе*

$$\{\lambda_1\zeta(2k) + 2k\lambda_2\zeta(2k+1),\ k = 1, 2, \dots, 6\},$$
$$\{\lambda_1\zeta(2k+1) + (2k+1)\lambda_2\zeta(2k+2),\ k = 1, 2, \dots, 6\}$$

имеется, по крайней мере, одно иррациональное число.

Теорема 3. *Для любого иррационального λ существуют четное a и нечетное b, $2 \leqslant a, b \leqslant 339$, такие, что каждая из троек чисел*

$$1,\ \lambda,\ \zeta(a) + a\lambda\zeta(a+1) \quad \textit{и} \quad 1,\ \lambda,\ \zeta(b) + b\lambda\zeta(b+1)$$

линейно независима над $\mathbb{Q}$.

Непосредственно из теоремы 3 получаем

Следствие 2. *Для любого иррационального λ в каждом числовом наборе*

$$\{\lambda\zeta(a) + a\zeta(a+1),\ a = 2, 4, \dots, 338\}, \qquad \{\zeta(a) + a\lambda\zeta(a+1),\ a = 2, 4, \dots, 338\}$$

и

$$\{\lambda\zeta(b) + b\zeta(b+1),\ b = 3, 5, \dots, 339\}, \qquad \{\zeta(b) + b\lambda\zeta(b+1),\ b = 3, 5, \dots, 339\}$$

имеется по крайней мере одно иррациональное число.

Теорема 4. *Для любого рационального μ существуют натуральные числа c и d одинаковой четности, $2 \leqslant c < d \leqslant 339$, такие, что числа*

$$1,\ \zeta(c) + c\mu\zeta(c+1),\ \zeta(d) + d\mu\zeta(d+1)$$

линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Из ранее известных результатов о суммах дзета-значений отметим здесь работу Гутника [12], где доказывается, что при любом рациональном λ, $\lambda \neq 0$, по крайней мере, одно из чисел $3\zeta(3) + \lambda\zeta(2)$, $\zeta(2) + 2\lambda \ln 2$ иррационально. Линейная независимость и иррациональность значений дзета-функции изучалась также в [13], где, в частности, доказано, что существуют нечетные $a_1 \leqslant 145$ и $a_2 \leqslant 1971$ такие, что числа $1, \zeta(3), \zeta(a_1), \zeta(a_2)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

2. Аналитическая конструкция. Пусть $r \geqslant 1$, $a > 4r$ – целые числа и n – натуральный параметр. Положим

$$R_n(t) = (n!)^{a-4r} \frac{(t - rn)_{rn}^2 (t + n + 1)_{rn}^2}{(t)_{n+1}^a}, \tag{2}$$

где $(\alpha)_k$ – символ Похгаммера: $(\alpha)_0 = 1$ и $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$ для $k \geqslant 1$.

Для комплексных z, $|z| \geqslant 1$, определим два ряда

$$E_{n,1}(z) = \sum_{t=1}^{\infty} R_n(t) z^{-t}, \tag{3}$$

$$E_{n,2}(z) = -\sum_{t=1}^{\infty} R_n'(t) z^{-t}, \tag{4}$$

которые сходятся абсолютно при $|z| \geqslant 1$ в силу того, что

$$R_n(t) = O(t^{(4r-a)n-a}). \tag{5}$$

Разложим рациональную функцию $R_n(t)$ в сумму простейших дробей:

$$R_n(t) = \sum_{k=1}^{a} \sum_{j=0}^{n} \frac{A_{k,j,n}}{(t+j)^k}, \tag{6}$$

откуда

$$A_{k,j,n} = \frac{1}{(a-k)!} \left(\frac{d}{dt}\right)^{a-k} \left(R_n(t)(t+j)^a\right)\Big|_{t=-j}.$$

Тогда для рядов (3) и (4) получим представления

$$E_{n,1}(z) = \sum_{k=1}^{a} P_{k,n}(z) \operatorname{Li}_k(z^{-1}) - P_{0,n}(z), \tag{7}$$

$$E_{n,2}(z) = \sum_{k=1}^{a} k P_{k,n}(z) \operatorname{Li}_{k+1}(z^{-1}) - P_{-1,n}(z), \tag{8}$$

где

$$P_{k,n}(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} A_{k,j,n} z^j, & \text{если } 1 \leqslant k \leqslant a, \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{a} \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=1}^{j} \frac{A_{m,j,n} z^{j-l}}{m^k l^{m-k}}, & \text{если } -1 \leqslant k \leqslant 0. \end{cases}$$

Заметим, что $E_{n,1}(z)$ является вполне уравновешенным гипергеометрическим рядом (см. [14, с. 188]),

$$E_{n,1}(z) = z^{-rn-1} (n!)^{a-4r} \Gamma^2((2r+1)n+2) \left(\frac{\Gamma(rn+1)}{\Gamma((r+1)n+2)}\right)^{a+2}$$
$$\times {}_{a+4}F_{a+3}\left(\begin{matrix} (2r+1)n+2,\ (2r+1)n+2,\ rn+1,\ \ldots,\ rn+1 \\ 1,\ (r+1)n+2,\ \ldots,\ (r+1)n+2 \end{matrix} \,\middle|\, z^{-1}\right),$$

что позволяет получить следующие ниже разложения (9), (10) от значений дзета-функции одинаковой четности.

Лемма 1. *Пусть a нечетное. Тогда имеют место равенства*

$$\begin{cases} E_{n,1}(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{(a-1)/2} P_{2k,n}(1)\zeta(2k) - P_{0,n}(1), \\ E_{n,2}(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{(a-1)/2} 2kP_{2k,n}(1)\zeta(2k+1) - P_{-1,n}(1), \end{cases} \tag{9}$$

если n нечетное, и

$$\begin{cases} E_{n,1}(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{(a-1)/2} P_{2k+1,n}(1)\zeta(2k+1) - P_{0,n}(1), \\ E_{n,2}(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{(a-1)/2} (2k+1)P_{2k+1,n}(1)\zeta(2k+2) - P_{-1,n}(1), \end{cases} \tag{10}$$

если n четное.

Доказательство. Заметим, что

$$P_{1,n}(1) = \sum_{j=0}^{n} A_{1,j,n} = \sum_{j=0}^{n} \operatorname*{Res}_{t=-j} R_n(t) = -\operatorname*{Res}_{t=\infty} R_n(t) = 0$$

в силу (5) и

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|>1}} P_{1,n}(z)\operatorname{Li}_1(z^{-1}) = 0.$$

Поэтому, устремляя $z \to 1$ в (7) и (8), получим

$$E_{n,1}(1) = \sum_{k=2}^{a} P_{k,n}(1)\zeta(k) - P_{0,n}(1), \tag{11}$$

$$E_{n,2}(1) = \sum_{k=2}^{a} kP_{k,n}(1)\zeta(k+1) - P_{-1,n}(1). \tag{12}$$

Из определения (2) следует, что $R_n(-t-n) = (-1)^{a(n+1)}R_n(t)$, откуда, учитывая единственность разложения (6), получаем

$$A_{k,n-j,n} = (-1)^{a(n+1)+k}A_{k,j,n}, \qquad k = 1,\dots,a, \quad j = 0,\dots,n.$$

Таким образом, многочлены $P_{k,n}(z)$ в точке $z = 1$ удовлетворяют равенству

$$P_{k,n}(1) = (-1)^{a(n+1)+k}P_{k,n}(1), \qquad k = 1,\dots,a,$$

и, следовательно, $P_{k,n}(1) = 0$, если $a(n+1)+k$ нечетное. Утверждение леммы теперь следует из (11), (12).

Лемма 2. *Для всех $k=-1,0,\dots,a$ имеет место неравенство*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|P_{k,n}(1)|\leqslant(a-4r)\log 2+(4r+2)\log(2r+1).$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно оценить сверху коэффициенты $A_{k,j,n}$, для которых по формуле Коши имеем

$$A_{k,j,n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|u+j|=1/2}R_n(u)(u+j)^{k-1}\,du,\qquad k=1,\dots,a,\quad j=0,\dots,n.$$

Далее, следуя оценкам леммы 3.4 из [7], получаем требуемое.

Лемма 3. *Для всех $k=-1,0,\dots,a$ справедливы включения*

$$D_n^{a-k}P_{k,n}(1)\in\mathbb{Z},$$

где $D_n=\text{НОК}(1,2,\dots,n)$.

Доказательство. Утверждение следует из доказательства леммы 3.5 в [7] и представления

$$R_n(t)(t+j)^a=\biggl(\prod_{m=1}^{r}F_m(t)\biggr)^2\cdot\biggl(\prod_{m=1}^{r}G_m(t)\biggr)^2\cdot H(t)^{a-4r},$$

где в обозначениях той же леммы

$$F_m(t)=\frac{(t-mn)_n}{(t)_{n+1}}(t+j),\qquad G_m(t)=\frac{(t+mn+1)_n}{(t)_{n+1}}(t+j),\qquad H(t)=\frac{n!}{(t)_{n+1}}(t+j).$$

3. Асимптотика линейных форм.

Лемма 4. *Для суммы $E_{n,2}(1)$ справедливо интегральное представление*

$$\begin{aligned}E_{n,2}(1)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{X-i\infty}^{X+i\infty}R_n(t)\biggl(\frac{\pi}{\sin\pi t}\biggr)^2dt\\&=\frac{(n!)^{a-4r}}{2\pi i}\int_{X-i\infty}^{X+i\infty}\frac{\Gamma^{a+2}(t)\Gamma^2(t+(r+1)n+1)\Gamma^2(rn+1-t)}{\Gamma^{a+2}(t+n+1)}\,dt,\end{aligned}\tag{13}$$

где X – произвольная постоянная из интервала $(0,rn+1)$.

Доказательство. Утверждение леммы легко следует из теоремы о вычетах, свойства (5) и того факта, что $R_n(t)$ имеет нули второго порядка в точках $1,2,\dots,rn$ (см., например, [15, лемма 2]).

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 5. *Пусть $r\geqslant 1$, $a>4r$ – целые числа и*

$$h(\tau)=\tau^{a+2}(\tau+r+1)^2-(\tau+1)^{a+2}(\tau-r)^2.$$

Тогда многочлен $h(\tau)$ имеет ровно два положительных корня τ_1 и τ_2, причем $0<\tau_2<r<\tau_1$.

Доказательство. Заметим, что так как $h(0) < 0$, $h(r) > 0$ и

$$h(\tau) = (4r - a)\tau^{a+3} + O(\tau^{a+2}) \quad \text{при} \quad \tau \to \infty,$$

то на каждом из интервалов $(0, r)$ и $(r, +\infty)$ существует по крайней мере по одному корню; докажем, что ровно по одному. Рассмотрим сначала интервал $(r, +\infty)$ и разложим $h(\tau)$ в произведение

$$h(\tau) = \bigl(\tau^{a/2+1}(\tau+r+1) + (\tau+1)^{a/2+1}(\tau-r)\bigr)\bigl(\tau^{a/2+1}(\tau+r+1) - (\tau+1)^{a/2+1}(\tau-r)\bigr),$$

откуда следует, что все корни $h(\tau)$ из $(r, +\infty)$ являются решениями уравнения (и наоборот)

$$\tau^{a/2+1}(\tau + r + 1) - (\tau + 1)^{a/2+1}(\tau - r) = 0.$$

Разделим обе части этого уравнения на $(\tau + 1)^{a/2+2}$ и воспользуемся равенством $1/(\tau + 1) = 1 - \tau/(\tau + 1)$; получим

$$\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^{a/2+1}\left(r + 1 - \frac{r\tau}{\tau+1}\right) - \left(\frac{(r+1)\tau}{\tau+1} - r\right) = 0. \tag{14}$$

Рассмотрим отображение $s = \tau/(\tau+1)$, которое взаимно однозначно отображает интервал $(r, +\infty)$ на $(r/(r+1), 1)$ и уравнение (14) в $H_1(s) = 0$, где $H_1(s) = s^{a/2+1}(r+1-rs) - (r + 1)s + r$. Заметим, что

$$H_1(s) > 0 \quad \text{на} \quad \left(0, \frac{r}{r+1}\right], \tag{15}$$

$$H_1'(s) = -r\left(\frac{a}{2} + 2\right)s^{a/2+1} + (r + 1)\left(\frac{a}{2} + 1\right)s^{a/2} - (r + 1),$$

$$H_1''(s) = \left(\frac{a}{2} + 1\right)s^{a/2-1}\left(\frac{a}{2}(r + 1) - r\left(\frac{a}{2} + 2\right)s\right) > 0 \quad \text{на} \quad (0, 1).$$

Таким образом, $H_1'(s)$ монотонно возрастает на интервале $(0, 1)$ и $H_1'(0) = -r - 1$, $H_1'(1) = (a - 4r)/2$. Следовательно, с учетом (15) и равенства $H_1(1) = 0$ получаем, что существует единственная точка $s_1 \in (r/(r + 1), 1)$, в которой $H_1(s_1) = 0$. Ей соответствует единственный корень $\tau_1 = s_1/(1 - s_1) \in (r, +\infty)$ многочлена $h(\tau)$.

Для исследования интервала $(0, r)$ поступим аналогичным образом. Так же, как и выше, находим, что достаточно рассмотреть уравнение

$$\tau^{a/2+1}(\tau + r + 1) - (\tau + 1)^{a/2+1}(r - \tau) = 0,$$

которое с помощью замены $s = \tau/(\tau + 1)$ приводится к виду

$$H_2(s) = 0, \qquad s \in \left(0, \frac{r}{r+1}\right), \tag{16}$$

где $H_2(s) = s^{a/2+1}(r + 1 - rs) + (r + 1)s - r$, $H_2(0) = -r$, $H_2(r/(r + 1)) > 0$,

$$H_2'(s) = -r\left(\frac{a}{2} + 2\right)s^{a/2+1} + (r + 1)\left(\frac{a}{2} + 1\right)s^{a/2} + (r + 1)$$

и $H_2''(s) = H_1''(s) > 0$ на $(0,1)$. Следовательно, $H_2'(s)$ монотонно возрастает на $(0,1)$, а так как $H_2'(0) = r+1 > 0$, то $H_2'(s) > 0$ на $(0,1)$, и уравнение (16) имеет единственный корень. Отсюда получаем, что и многочлен $h(\tau)$ имеет единственный корень τ_2 в интервале $(0,r)$. Лемма доказана.

Рассмотрим две функции

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &= (a+2)\tau\log\tau + 2(\tau+r+1)\log(\tau+r+1) \\ &\qquad - (a+2)(\tau+1)\log(\tau+1) - 2(\tau-r)\log(\tau-r), \\ f_2(\tau) &= (a+2)\tau\log\tau + 2(\tau+r+1)\log(\tau+r+1) \\ &\qquad - (a+2)(\tau+1)\log(\tau+1) - 2(\tau-r)\log(r-\tau), \end{aligned} \tag{17}$$

определенные в $\mathbb{C}\setminus(-\infty,r]$ и $\mathbb{C}\setminus\{(-\infty,0]\cup[r,+\infty)\}$ соответственно, фиксируя при этом главные ветви логарифмов. Заметим, что $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$, рассмотренные как функции действительной переменной, непрерывны на соответствующих интервалах действительной оси $(r,+\infty)$ и $(0,r)$ и в точке $\tau = r$ имеют устранимую особенность, так как

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\substack{\tau\to r\\ \tau>r}} f_1(\tau) = \lim_{\substack{\tau\to r\\ \tau<r}} f_2(\tau) \\ &= (a+2)r\log r + 2(2r+1)\log(2r+1) - (a+2)(r+1)\log(r+1). \end{aligned}$$

Поэтому их можно доопределить в точке $\tau = r$, положив

$$f_1(r) = f_2(r) = L.$$

Лемма 6. *При $n\to\infty$ справедливы асимптотические формулы*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log|E_{n,i}(1)|}{n} = f_i(\tau_i), \qquad i = 1,2,$$

причем

$$f_2(\tau_2) < f_2(r) = f_1(r) < f_1(\tau_1) < 2(r+1)\log 2 - (a-4r)\log(r+1),$$

а числа τ_1,τ_2 определены в лемме 5.

Доказательство. Для линейной формы $E_{n,1}(1)$ имеем

$$E_{n,1}(1) = \sum_{t=rn+1}^{\infty} R_n(t) = (n!)^{a-4r}\sum_{t=rn+1}^{\infty}\frac{\Gamma^{a+2}(t)\Gamma^2(t+(r+1)n+1)}{\Gamma^{a+2}(t+n+1)\Gamma^2(t-rn)}.$$

Далее, применяя к последней сумме второй способ доказательства леммы 3 из [16], получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log|E_{n,1}(1)|}{n} = \max_{\tau\in(r,+\infty)} f_1(\tau).$$

С производной функции $f_1(\tau)$,

$$f_1'(\tau) = (a+2)\log\tau + 2\log(\tau+r+1) - (a+2)\log(\tau+1) - 2\log(\tau-r),$$

свяжем многочлен $h(\tau)$, определенный в лемме 5. Многочлен $h(\tau)$ имеет ровно один корень $\tau_1 \in (r, +\infty)$; кроме того, $h(r) > 0$, $h(+\infty) < 0$, следовательно, $h(\tau)$ ровно один раз меняет знак на $(r, +\infty)$ с '+' на '$-$' и, таким образом, τ_1 – единственная точка максимума функции $f_1(\tau)$ на $(r, +\infty)$. Окончательно получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|E_{n,1}(1)|}{n} = f_1(\tau_1) > f_1(r).$$

Далее, для

$$f_1(\tau_1) = \tau_1 \cdot f_1'(\tau_1) + \log\frac{(\tau_1 + r + 1)^{2r+2}(\tau_1 - r)^{2r}}{(\tau_1 + 1)^{a+2}},$$

учитывая, что $\tau_1 > r$, имеем

$$\begin{aligned}\frac{(\tau_1 + r + 1)^{2r+2}(\tau_1 - r)^{2r}}{(\tau_1 + 1)^{a+2}} &= \frac{\bigl(1 + r/(\tau_1 + 1)\bigr)^{2r+2}\bigl(1 - (r+1)/(\tau_1+1)\bigr)^{2r}}{(\tau_1 + 1)^{a-4r}} \\ &< \frac{\bigl(1 + r/(r+1)\bigr)^{2r+2}}{(r+1)^{a-4r}} < \frac{2^{2(r+1)}}{(r+1)^{a-4r}}\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$f_1(\tau_1) < 2(r+1)\log 2 - (a - 4r)\log(r+1).$$

Вычислим асимптотику линейной формы $E_{n,2}(1)$. Для этого в интеграле (13) положим $t = n\tau$, где $n \in \mathbb{N}$, $\tau = \tau_2 + iy$, $y \in (-\infty, +\infty)$, число $\tau_2 \in (0, r)$ определено в лемме 5, и воспользуемся асимптотикой Γ-функции:

$$\log\Gamma(u) = \left(u - \frac{1}{2}\right)\log u - u + \log\sqrt{2\pi} + r(u), \qquad |r(u)| \leqslant K|\operatorname{Re} u|^{-1},$$

где K – абсолютная постоянная. Тогда получим, что интеграл (13) преобразуется к виду

$$E_{n,2}(1) = \frac{c}{n^{a/2+2r}} \int_{\tau_2 - i\infty}^{\tau_2 + i\infty} \frac{(r-\tau)(r+1+\tau)}{(\tau(\tau+1))^{a/2+1}} e^{nf_2(\tau)}\bigl(1 + O(n^{-1})\bigr)\,d\tau, \tag{18}$$

где функция $f_2(\tau)$ определена в (17), $c = c(a, r)$ – комплексная постоянная, отличная от нуля и константа в $O(\,\cdot\,)$ абсолютная. К интегралу (18) применим метод перевала. Заметим, что $f_2'(\tau_2) = 0$ согласно лемме 5. Покажем, что функция $\operatorname{Re} f_2(\tau_2 + iv)$ при $v \in (-\infty, +\infty)$ достигает максимума в единственной точке $v = 0$. Для $\tau = \tau_2 + iv$, $v \in (-\infty, +\infty)$ находим

$$\begin{aligned}\frac{d}{dv}\operatorname{Re} f_2(\tau_2 + iv) &= -\operatorname{Im}\frac{d}{d\tau} f_2(\tau_2 + iv) \\ &= (a+2)\arg(\tau+1) - (a+2)\arg\tau + 2\arg(r-\tau) - 2\arg(\tau + r + 1).\end{aligned} \tag{19}$$

На контуре интегрирования при $v > 0$ имеем $\arg(\tau+1) < \arg\tau$, $\arg(\tau + r + 1) > 0$ и так как $\operatorname{Re}(r - \tau) > 0$, $\operatorname{Im}(r-\tau) < 0$, то $\arg(r - \tau) < 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dv}\operatorname{Re} f_2(\tau_2 + iv) < 0 \qquad \text{при} \quad v > 0.$$

В силу нечетности (19) по переменной v получаем

$$\frac{d}{dv}\operatorname{Re} f_2(\tau_2+iv)>0 \qquad \text{при} \quad v<0$$

и, следовательно, $v=0$ – единственная точка максимума функции $\operatorname{Re} f_2(\tau_2+iv)$ на вертикальной прямой $(\tau_2-i\infty,\tau_2+i\infty)$. Заметим также, что

$$f_2''(\tau)=\frac{a+2}{\tau(\tau+1)}+\frac{2(2r+1)}{(\tau+r+1)(r-\tau)}>0 \qquad \text{на} \quad (0,r).$$

Таким образом, при $n\to\infty$ согласно методу перевала получаем

$$E_{n,2}(1)=\frac{c}{n^{a/2+r}}\frac{(r-\tau_2)(r+1+\tau_2)}{(\tau_2(\tau_2+1))^{a/2+1}}e^{nf_2(\tau_2)}|f_2''(\tau_2)|^{-1/2}\bigl(1+O(n^{-1})\bigr),$$

откуда и следует требуемая асимптотика

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log|E_{n,2}(1)|}{n}=f_2(\tau_2).$$

Докажем, что $f_2(\tau_2)<f_2(r)$. По лемме 5 τ_2 – единственный корень многочлена $h(\tau)$ в интервале $(0,r)$, $h(0)<0$ и $h(r)>0$. Следовательно, $h(\tau)$ один раз меняет знак на $(0,r)$ с '$-$' на '$+$'. С учетом знаков получаем, что

$$f_2(\tau_2)=\min_{\tau\in(0,r)}f_2(\tau)<f_2(r)=f_1(r),$$

и лемма доказана.

4. Доказательство теорем. Доказательство теорем 1–4 опирается на следующий ниже критерий линейной независимости Нестеренко [6].

Критерий линейной независимости. *Пусть для заданного набора вещественных чисел $\theta_0,\theta_1,\dots,\theta_m$, $m\geqslant 1$, существует последовательность линейных форм*

$$E_n=A_{0,n}\theta_0+A_{1,n}\theta_1+\dots+A_{m,n}\theta_m, \qquad n=1,2,\dots,$$

с целыми коэффициентами и числа $\alpha>0$, $\beta>0$ такие, что

$$\log|E_n|=-n\alpha+o(n), \quad \log\max_{0\leqslant j\leqslant m}|A_{j,n}|\leqslant n\beta+o(n) \qquad \textit{при} \quad n\to\infty.$$

Тогда

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\theta_0+\mathbb{Q}\theta_1+\dots+\mathbb{Q}\theta_m)\geqslant 1+\frac{\alpha}{\beta}.$$

Доказательство теоремы 1. Предположим, что a – нечетное целое число, $a \geqslant 5$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$. Обозначим

$$\delta_1(a) = \dim_{\mathbb{Q}}\Biggl(\mathbb{Q}\lambda_1 + \mathbb{Q}\lambda_2 + \sum_{k=1}^{(a-1)/2} \mathbb{Q}\bigl(\lambda_1\zeta(2k) + 2k\lambda_2\zeta(2k+1)\bigr)\Biggr),$$

$$\delta_2(a) = \dim_{\mathbb{Q}}\Biggl(\mathbb{Q}\lambda_1 + \mathbb{Q}\lambda_2 + \sum_{k=1}^{(a-1)/2} \mathbb{Q}\bigl(\lambda_1\zeta(2k+1) + (2k+1)\lambda_2\zeta(2k+2)\bigr)\Biggr).$$

Для $n \in \mathbb{N}$ определим

$$l_n = D_{2n+1}^{a+1}\bigl(\lambda_1 E_{2n+1,1}(1) + \lambda_2 E_{2n+1,2}(1)\bigr),$$
$$\tilde{l}_n = D_{2n}^{a+1}\bigl(\lambda_1 E_{2n,1}(1) + \lambda_2 E_{2n,2}(1)\bigr),$$

а также

$$p_{k,n} = D_{2n+1}^{a+1} P_{2k,2n+1}(1), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{a-1}{2}, \qquad p_{-1,n} = D_{2n+1}^{a+1} P_{-1,2n+1}(1),$$
$$\tilde{p}_{k,n} = D_{2n}^{a+1} P_{2k+1,2n}(1), \quad k = -1, 1, \dots, \frac{a-1}{2}, \qquad \tilde{p}_{0,n} = D_{2n}^{a+1} P_{0,2n}(1).$$

Тогда согласно леммам 1 и 3 получаем, что l_n и $\tilde{l}_n$ являются линейными формами с целыми коэффициентами от сумм дзета-значений:

$$l_n = \sum_{k=1}^{(a-1)/2} p_{k,n}\bigl(\lambda_1\zeta(2k) + 2k\lambda_2\zeta(2k+1)\bigr) - p_{0,n}\lambda_1 - p_{-1,n}\lambda_2, \tag{20}$$

$$\tilde{l}_n = \sum_{k=1}^{(a-1)/2} \tilde{p}_{k,n}\bigl(\lambda_1\zeta(2k+1) + (2k+1)\lambda_2\zeta(2k+2)\bigr) - p_{0,n}\lambda_1 - p_{-1,n}\lambda_2. \tag{21}$$

Далее, применяя критерий линейной независимости с $m = (a+1)/2$, $\alpha = -2(a+1) - 2f_1(\tau_1)$ и $\beta = 2(a+1) + 2(a-4r)\log 2 + 2(4r+2)\log(2r+1)$ к формам (20), (21), получаем оценки

$$\begin{aligned}\delta_1(a), \delta_2(a) &\geqslant 1 + \frac{\alpha}{\beta} = 1 + \frac{-a-1-f_1(\tau_1)}{a+1+(a-4r)\log 2 + (4r+2)\log(2r+1)} \\ &\geqslant \frac{\log r + ((a-2r)/(a+2))\log 2}{1 + \log 2 + ((4r+2)/(a+2))\log(r+1)}.\end{aligned} \tag{22}$$

Полагая теперь $r = [a/\log^2 a]$, при $a \to \infty$ имеем

$$\log r + \frac{a-2r}{a+2}\log 2 = \bigl(1 + o(1)\bigr)\log a, \qquad 1 + \log 2 + \frac{4r+2}{a+2}\log(r+1) = 1 + \log 2 + o(1).$$

Отсюда находим

$$\delta_1(a), \delta_2(a) \geqslant \frac{\log a}{1 + \log 2}(1 + o(1)) \qquad \text{при} \quad a \to \infty,$$

и теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Выбирая $a = 13$, $r = 1$, находим, что

$$\tau_1 \approx 1.0178067, \qquad f_1(\tau_1) \approx -14.16840167 < -a - 1;$$

следовательно, согласно неравенству (22) целые числа $\delta_1(13), \delta_2(13) > 1$, т.е. $\delta_1(13)$, $\delta_2(13) \geqslant 2$, и теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Полагая $a = 339$, $r = 11$, находим, что

$$\tau_1 \approx 11.00000829, \qquad f_1(\tau_1) \approx -1029.5000921,$$

и целые числа $\delta_1(339), \delta_2(339) > 2.001$ согласно неравенству (22). Следовательно, $\delta_1(399), \delta_2(399) \geqslant 3$, и теорема теперь следует из (20), (21), если положить $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda$.

Доказательство теоремы 4 следует из доказательства теоремы 3 и (20), (21), если положить $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \mu$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Никишин Е. М. Об иррациональности значений функций $F(x, s)$ // Матем. сб. 1979. Т. 109 (151). №3 (7). С. 410–417.
[2] Chudnovsky G. Padé approximations to the generalized hypergeometric functions I // J. Math. Pures Appl. 1979. V. 58. P. 445–476.
[3] Гутник Л. А. О линейной независимости над $\mathbb{Q}$ дилогарифмов в рациональных точках // УМН. 1982. Т. 37. №5. С. 179–180.
[4] Hata M. On the linear independence of the values of polylogarithmic functions // J. Math. Pures Appl. 1990. V. 69. P. 99–125.
[5] Apéry R. Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ // Astérisque. 1979. V. 61. P. 11–13.
[6] Нестеренко Ю. В. О линейной независимости чисел // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1985. №1. С. 46–54.
[7] Rivoal T. Propriétés diophantiennes des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs. Thèse de Doctorat. Caen: Univ. de Caen, 2001.
[8] Fischler S., Rivoal T. Approximants de Padé et séries hypergéométriques équilibrées // J. Math. Pures Appl. 2003. V. 82. №10. P. 1369–1394.
[9] Rivoal T. La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationalites aux entiers impairs // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2000. V. 331. №4. P. 267–270.
[10] Зудилин В. В. Одно из чисел $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ иррационально // УМН. 2001. Т. 56. №4. С. 149–150.
[11] Rivoal T., Zudilin W. Diophantine properties of numbers related to Catalan's constant // Math. Ann. 2003. V. 326. №4. P. 705–721.
[12] Гутник Л. А. Об иррациональности некоторых величин, содержащих $\zeta(3)$ // УМН. 1979. Т. 34. №3. С. 190; // Acta Arith. 1983. V. 42. №3. P. 255–264.
[13] Зудилин В. В. Об иррациональности значений дзета-функции Римана // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. №3. С. 49–102.
[14] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965.
[15] Нестеренко Ю. В. Некоторые замечания о $\zeta(3)$ // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №6. С. 865–880.
[16] Ball K., Rivoal T. Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs // Invent. Math. 2001. V. 146. №1. P. 193–207.

Институт исследований по теоретической физике и математике, г. Тегеран, Иран
Университет Шахрекорда, Иран
E-mail: hessamit@ipm.ir, hessamik@ipm.ir

Поступило
13.04.2005