محاسبات کوانتمی (۲۲۶۷۱) ترم بهار ۱۳۹۱-۱۳۹۰

مدرس: سلمان ابوالفتح بیگی نویسنده: مسعود مردانی

جلسه ۴

ابتدا دو نکته:

جلسه قبل فقط اندازه‌گیری‌های گسسته در نظر گرفته شد. در اصل یک اندازه‌گیری کوانتمی می‌تواند پیوسته نیز باشد. به این معنی که مجموعه مقادیر حاصل اندازه‌گیری می‌تواند یک مجموعه‌ی نامتناهی و در واقع ناشمارا باشد. ولی توجه کنید که وقتی بحث محاسبه (computing) و انجام آزمایش در میان است، به خاطر وجود خطا فقط اندازه‌گیری‌های گسسته را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که این نکته حتی در مورد اندازه‌گیری‌های کلاسیک نیز برقرار است.

نکته‌ی دوم اینکه تحول زمانی یک سیستم در صورتی با عملگرهای یکانی بیان می‌شود که «بسته» باشد، یعنی با دنیای خارج برهم‌کنش نداشته باشد. در جلسات آینده تحول زمانی یک سیستم دلخواه که لزوماً بسته نیست را بررسی خواهیم کرد.

۱ POVM

اندازه گیری کوانتومی دارای دو مؤلفه است:

۱) حاصل اندازه‌گیری با یک توزیع احتمال مشخص می‌شود.

۲) بعد از اندازه‌گیری حالت سیستم تغییر می‌کند و به اصطلاح collapse می کند.

یک اندازه‌گیری با عملگرهای $M_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ داده می شود که

$$\sum_i M_i^\dagger M_i = I_{\mathcal{H}}.$$

نتیجه اندازه گیری با احتمال $p(i) = \langle\Psi|M_i^\dagger M_i|\Psi\rangle$ برابر i است و در این صورت حالت سیستم به

$$\frac{M_i|\Psi\rangle}{\langle\Psi|M_i^\dagger M_i|\Psi\rangle}$$

تغییر می کند.

فرض کنید در یک مسأله فقط مؤلفه‌ی اول اندازه‌گیری برای ما مهم باشد. یعنی فقط توزیع احتمال نتیجه اندازه‌گیری را می‌خواهیم بدانیم، و تغییر سیستم بعد از اندازه‌گیری در جواب مسأله ظاهر نمی‌شود. در این صورت به جای فرمول‌بندی

اندازه‌گیری که در بالا به آن شاره شد، بهتر است از فرمول‌بندی جدیدی که به آن اندازه‌گیری POVM گفته می‌شود استفاده کرد.

عملگرهای خطی E_i را به این صورت تعریف کنید :

$$E_i = M_i^\dagger M_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}.$$

در این صورت

$$p(i) = \langle \Psi | M_i^\dagger M_i | \Psi \rangle = \langle \Psi | E_i | \Psi \rangle.$$

یعنی $p(i)$ را مستقیماً می‌توان بر حسب E_i به دست آورد.

خواص E_i:

(۱) $E_i \geq 0$

(۲) $\sum_i E_i = I$

به این عملگرها Positive Operator Valued Measure (POVM) می‌گویند.

سوال: آیا برای هر مجموعه دلخواه از E_i ها که دو خاصیت بالا را داشته باشد می توان M_i های متناظر را پیدا کرد که داشته باشیم : $E_i = M_i^\dagger M_i$

جواب: چون $E_i \geq 0$ بنابراین $E_i^{1/2}$ وجود دارد و هرمیتی است. حال اگر قرار دهیم $M_i = E_i^{1/2}$ آنگاه $E_i = M_i^\dagger M_i$.

در نتیجه فرمول‌بندی اندازه‌گیری POVM معادل فرمول‌بندی قبلی است. تنها تفاوت این است که در اندازه‌گیری POVM تغییر حالت سیستم بعد از اندازه‌گیری را نمی‌توانیم محاسبه کنیم. در این درس با مسأله‌های مختلفی برخورد خواهیم کرد که در آنها تغییر حالت سیستم در اندازه‌گیری مهم نیست و لذا از فرمول‌بندی POVM استفاده می‌شود.

مثال: مجموعه عملگرهای

$$\{E_0 = |0\rangle\langle 0|, E_1 = |1\rangle\langle 1|\}$$

را برای یک کیوبیت در نظر بگیرید. اگر تعریف کنیم

$$\{M_0 = |0\rangle\langle 0|, M_1 = |1\rangle\langle 1|\}, \quad \{N_0 = |+\rangle\langle 0|, N_1 = |-\rangle\langle 1|\},$$

که در آن $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$ می بینیم که

$$E_i = M_i^\dagger M_i = N_i^\dagger N_i.$$

بنابر این به یک مجموعه از $\{E_i\}$ها می‌توان $\{M_i\}$ های مختلفی را نسبت داد. به طور کلی $\{M_i\}$ و $\{U_iM_i\}$ که در آن $\{U_i\}$ ها ماتریس‌های یکانی دلخواه هستند، به یک مجموعه از عملگرهای POVM منجر می شوند.

مثال: (تمیز دادن حالات کوانتمی) فرض کنید یک سیستم فیزیکی به طور تصادفی در یکی از حالات $|\psi_1\rangle, ..., |\psi_k\rangle$ قرار داده شده است و ما می‌خواهیم تشخیص دهیم کدام حالت. برای این کار می‌توانیم روی سیستم یک اندازه‌گیری انجام دهیم به طوری که حاصل اندازه‌گیری یک اندیس $1 \leq i \leq k$ باشد، که در این صورت حدس می‌زنیم که حالت سیستم $|\psi_i\rangle$ بوده است. حال سؤال این است که چه اندازه‌گیریی انجام دهیم که احتمال درست حدس زدن ما بیشینه شود.

توجه کنید که در این مسأله تغییر حالت سیستم بعد از اندازه‌گیری برای ما مهم نیست. لذا بهتر است که از فرمول بندی POVM استفاده کنیم. پس عملگرهای $E_1, ..., E_k$ را با خواص $E_i \geq 0$ و $\sum_i E_i = I$ می‌گیریم و سیستم را با این POVM اندازه می‌گیریم. حاصل اندازه گیری i معادل حدس $|\psi_i\rangle$ است. پس احتمال حدس درست را می‌توان محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} Pr[\text{ حدس درست }] &= \sum_{i=1}^{k} Pr[\text{ حالت سیستم } |\psi_i\rangle \text{ باشد }] \cdot Pr[\text{ حدس درست } | \text{ حالت سیستم } |\psi_i\rangle \text{ باشد }] \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} Pr[\text{ حدس درست } | \text{ حالت سیستم } |\psi_i\rangle \text{ باشد }]. \end{aligned}$$

حال توجه کنید که اگر حالت سیستم $|\psi_i\rangle$ باشد، حدس درست معادل این است که حاصل اندازه‌گیری i باشد که این با احتمال $\langle\psi_i|E_i|\psi_i\rangle$ اتفاق می‌افتد. در نتیجه داریم

$$Pr[\text{ حدس درست }] = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\langle\psi_i|E_i|\psi_i\rangle.$$

بنابراین برای بیشینه کردن احتمال حدس درست باید

$$\max \frac{1}{k}\sum_{i}\langle\psi_i|E_i|\psi_i\rangle$$

را با شرایط $E_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{k} E_i = I$ حساب کنیم. جواب این مساله در حالت کلی فرم بسته ندارد.

۲ توضیح بیشتر اصل چهارم

دو کیوبیت A و B را در نظر بگیرید. $\mathcal{H}_A$ و $\mathcal{H}_B$ فضای هیلبرت معادل هر کدام از این کوبیت‌ها با پایه‌های $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$ و $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$ نمایش داده می‌شود. طبق اصل چهارم فضای هیلبرت متناظر با سیستم ترکیبی این دو کیوبیت برابر است با:

$$\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B.$$

که با پایه‌ی متعامد یکه‌ی

$$\{|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B, |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B, |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B, |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B\} = \{|00\rangle_{AB}, |01\rangle_{AB}, |10\rangle_{AB}, |11\rangle_{AB}\}$$

مشخص می‌شود. دقت کنید که در این نمادگذاری ترتیب مهم است و اول عضو فضای A را می‌نویسیم .
هر $|\psi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ به صورت ترکیب خطی از چهار عضو مجموعه‌ی بالا است. اگر $|\psi\rangle_{AB}$ را بتوان به صورت $|\psi\rangle_{AB} = |v\rangle_A \otimes |w\rangle_B$ نمایش داد به این حالت، حالت ضربی product state یا separable state گفته می شود.
اگر چنین نمایشی برای $|\psi\rangle_{AB}$ وجود نداشته باشد به آن حالت درهم تنیده entangled state می گویند.
به عنوان مثال

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A \otimes (|0\rangle_B + |1\rangle_B)$$

حالت ضربی و

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

حالت درهم تنیده است.

در واقع حالت ضربی حالتی است که عدد اشمیت (Schmidt number) آن 1 باشد. توجه کنید که طبق قضیه‌ی تجزیه‌ی اشمیت Schmidt decomposition هر عضو دلخواه $|\psi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ را می توان به صورت

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i |v_i\rangle_A |w_i\rangle_B$$

نمایش داد که λ_i ها نامنفی باشند و $\{|v_i\rangle\}$ و $\{|w_i\rangle\}$ ها پایه متعامد یکه برای به ترتیب $\mathcal{H}_A$ و $\mathcal{H}_B$ باشند. تعداد λ_i های ناصفر یک کمیت خوش تعریف است و به آن عدد اشمیت حالت $|\psi\rangle_{AB}$ گویند. در این صورت یک حالت ضربی است اگر و فقط اگر عدد اشمیت آن یک باشد.

اندازه‌گیری روی بخشی از یک سیستم ترکیبی: فرض کنید بخواهیم یک اندازه‌گیری روی بخش A از یک سیستم دو بخشی AB انجام دهیم. اندازه‌گیری روی A با عملگرهای

$$M_i : \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_A$$

با شرط $\sum_i M_i^\dagger M_i = I_{\mathcal{H}_A}$ مشخص می‌شود. در این صورت عملگرهای اندازه گیری متناظر روی سیستم ترکیبی AB

$$N_i^{AB} = M_i^A \otimes I^B$$

هستند. توجه کنید که شرط تمامیت برای N_i ها برقرار است:

$$\begin{aligned}\sum_i N_i^\dagger N_i &= \sum_i (M_i \otimes I)^\dagger (M_i \otimes I) = \sum_i (M_i^\dagger \otimes I)(M_i \otimes I) \\ &= \sum_i (M_i^\dagger M_i \otimes I) = (\sum_i M_i^\dagger M_i) \otimes I \\ &= I^A \otimes I^B = I^{AB}.\end{aligned}$$

احتمال رخ دادن حالت i برابر است با

$$p(i) = \langle\psi|N_i^\dagger N_i|\psi\rangle = \langle\psi|M_i^\dagger M_i \otimes I|\psi\rangle$$

و بعد از اندازه گیری حالت سیستم به

$$N_i|\psi\rangle = M_i \otimes I|\psi\rangle$$

تغییر می کند.

اگر حالت سیستم ضربی باشد: $|\psi\rangle_{AB} = |v\rangle_A \otimes |w\rangle_B$ داریم

$$\begin{aligned} p(i) &= \langle v|_A\langle w|_B(M_i^\dagger M_i) \otimes I_B|v\rangle_A|w\rangle_B \\ &= \langle v|M_i^\dagger M_i|v\rangle\langle w|I|w\rangle \\ &= \langle v|M_i^\dagger M_i|v\rangle, \end{aligned}$$

و حالت سیستم به

$$N_i|v\rangle|w\rangle = (M_i|v\rangle) \otimes |w\rangle$$

تغییر می کند. یعنی در حالت ضربی، وقتی اندازه‌گیریی بر روی یک بخش از سیستم انجام می‌شود، نه توزیع احتمال حاصل و نه تغییر حالت هیچ کدام به بخش‌های دیگر ارتباطی ندارد.

برعکس، اگر حالت سیستم ترکیبی درهم تنیده باشد، مثلا

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

و اندازه‌گیری $\{M_0 = |0\rangle\langle 0|, M_1 = |1\rangle\langle 1|\}$ را روی سیستم اول اعمال کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} p(0) &= \frac{1}{2}(\langle 00| + \langle 11|)\,(|0\rangle\langle 0| \otimes I)\,(|00\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\left[\langle 00|(|0\rangle\langle 0| \otimes I)|00\rangle + \langle 00|(|0\rangle\langle 0| \otimes I)|11\rangle + \langle 11|(|0\rangle\langle 0| \otimes I)|00\rangle + \langle 11|(|0\rangle\langle 0| \otimes I)|11\rangle\right] \\ &= \frac{1}{2}\langle 00|(|0\rangle\langle 0| \otimes I)|00\rangle = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

و اگر حاصل اندازه‌گیری 0 باشد تغییر سیستم

$$M_0^A \otimes I|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{2}|0\rangle|0\rangle$$

خواهد بود. توجه کنید که در این حالت سیستم B نیز تغییر می کند.

اگر در سیستم ترکیبی AB سیستم A تحت تحول زمانی U_A باشد، عملگر تحول زمانی متناظر روی سیستم ترکیبی

$$U_A \otimes I_B$$

است.

۳ (1993) Teleportation

آلیس یک کیوبیت S در اختیار دارد و می خواهد آن را به باب منتقل کند. فرض کنید کیوبیت S در حالت $|v\rangle_S = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ قرار دارد، و آلیس و باب از آن مطلع نیستند. اگر بین آلیس و باب یک کانال وجود داشت که به وسیله‌ی آن می‌توانستند کیوبیت (اطلاعات کوانتمی) انتقال دهند، مسأله انتقال S ساده بود (کافی بود آلیس کوبیت خود را در ورودی کانال قرار دهد). ولی فرض کنید که بین آنها فقط یک کانال برای انتقال اطلاعات کلاسیک (مانند تلفن معمولی) وجود دارد. سؤال این است که آیا در این صورت نیز انتقال S امکان‌پذیر است یا خیر.

فرض کنید که آلیس و باب هر کدام یک کیوبیت دیگر دارند که مستقل از S در حالت درهم تنیده‌ی

$$|\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

آماده سازی شده‌اند. پس در کل سه کیوبیت داریم. کیوبیت‌های S و A در دست آلیس هستند و کیوبیت B در دست باب.

حال پایه‌ی متعامد یکه‌ی بل (Bell basis) را برای فضای دو کیوبیتی در نظر بگیرید: $\mathcal{B} = \{|\Phi^+\rangle, |\Phi^-\rangle, |\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle\}$ که در آن

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \quad |\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle).$$

توجه کنید که داریم:

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle), \quad |11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle - |\Phi^-\rangle),$$
$$|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle), \quad |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle).$$

حال سیستم ترکیبی هر سه کیوبیت در حالت $|v\rangle_S \otimes |\Phi^+\rangle_{AB}$ است که اگر SA را در پایه‌ی بل بنویسیم داریم:

$$\begin{aligned}
|v_s\rangle \otimes |\Phi^+\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\alpha|00\rangle_{SA}|0\rangle_B + \alpha|01\rangle_{SA}|1\rangle_B + \beta|10\rangle_{SA}|0\rangle_B + \beta|11\rangle_{SA}|1\rangle_B\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\alpha\left(|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle\right)_{SA}|0\rangle_B + \alpha(|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle)_{SA}|1\rangle_B \\
&\qquad + \beta(|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle)_{SA}|0\rangle_B + \beta(|\Phi^+\rangle - |\Phi^-\rangle)_{SA}|1\rangle_B\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[|\Phi^+\rangle_{SA}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_B + |\Phi^-\rangle_{SA}(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)_B \\
&\qquad + |\Psi^+\rangle_{SA}(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)_B + |\Psi^-\rangle_{SA}(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)_B\Big]
\end{aligned}$$

اگر ماتریس‌های پائولی را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\hat{\sigma_x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma_z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

خواهیم داشت

$$|v\rangle_S \otimes |\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{2}\Big[|\Phi^+\rangle_{SA}|v\rangle_B + |\Phi^-\rangle_{SA} \otimes \hat{\sigma_z}|v\rangle_B + |\Psi^+\rangle_{SA} \otimes \hat{\sigma_x}|v\rangle_B + |\Psi^-\rangle_{SA} \otimes \hat{\sigma_x}\hat{\sigma_z}|v\rangle_B\Big].$$

فرض کنیم آلیس دو کیوبیتی که در اختیار دارد، یعنی SA را در پایه‌ی بل اندازه‌گیری کند. در این صورت عملگرهای اندازه‌گیری آلیس برابرند با

$$\begin{aligned} M_1 = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|, \quad M_2 = |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|, \\ M_3 = |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|, \quad M_4 = |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|. \end{aligned} \tag{۱}$$

اگر برای مثال حاصل اندازه‌گیری آلیس M_1 باشد، با توجه به محاسبات فوق سیستم به حالت زیر تغییر می کند:

$$\left(M_1^{SA} \otimes I^B\right)|v\rangle_S \otimes |\Phi^+\rangle_{AB} = \left(|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|^{SA} \otimes I^B\right)|v\rangle_S \otimes |\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{2}|\Phi^+\rangle_{SA}|v\rangle_B.$$

یعنی کیوبیت باب به حالت $|v\rangle$ تغییر پیدا می‌کند. در واقع بسته به حاصل اندازه‌گیری آلیس، تغییر کیوبیت باب به صورت زیر خواهد بود:

$$M_1 \Longrightarrow |v\rangle, \quad M_2 \Longrightarrow \hat{\sigma_z}|v\rangle,$$

$$M_3 \Longrightarrow \hat{\sigma_x}|v\rangle, \quad M_4 \Longrightarrow \hat{\sigma_x}\hat{\sigma_z}|v\rangle$$

حال فرض کنید که آلیس بعد از انجام اندازه‌گیری، حاصل را با تلفن به باب گزارش دهد. در این صورت باب با توجه تناظر فوق می‌تواند وارون ماتریس پائولی مناسب را بر کیوبیت خود اعمال و حالت $|v\rangle$ را بدست می آورد. نکته مهمی که در این جا وجود دارد این است که ماتریس‌های پائولی یکانی هستند و در نتیجه متناظر با یک تحول زمانی. لذا طبق اصول مکانیک کوانتمی اعمال آنها برای باب امکان‌پذیر است.

توجه کنید که در این پروتکل اندازه‌گیری آلیس چهار حالت دارد. پس آلیس 2 بیت اطلاعات کلاسیک برای باب می‌فرستد. همچنین حالت $|\Phi^+\rangle_{AB}$ که آلیس و باب از قبل با هم قسمت کرده بودند یک واحد درهم تنیدگی یا ای-بیت (entanglement bit, ebit) نامیده می‌شود. به طور خلاصه

انتقال ۱ کیوبیت $\Longrightarrow$ (انتقال ۲ بیت) + (۱ ای-بیت)

۴ Superdense Coding (1992)

مسأله superdense coding دقیقاً برعکس teleportation است. در این مسأله آلیس و باب دو کیوبیت را مانند حالت قبل در حالت درهم تنیده‌ی

$$|\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)_{AB}$$

تقسیم کرده‌اند. آلیس 2 بیت کلاسیک دارد که می‌خواهد به باب منتقل کند. ولی کانال بین آنها یک کانال کوانتمی است. در اینجا نشان می‌دهیم که این کار با انتقال تنها 1 کیوبیت امکان‌پذیر است. در واقع

$$\text{انتقال ۲ بیت} \Longleftarrow \text{(انتقال ۱ کیوبیت)} + \text{(۱ ای-بیت)}$$

نمادگذاری زیر را در نظر بگیرید

$$\sigma_{00} = I, \quad \sigma_{01} = \sigma_x,$$

$$\sigma_{10} = \sigma_z, \quad \sigma_{11} = \sigma_z \sigma_x.$$

توجه کنید که این چهار عملگر یکانی هستند. پس آلیس می‌تواند هر یک از آنها را بر کیوبیت خود (A) اثر دهد. داریم

$$\sigma_{00}^A \otimes I^B |\Phi^+\rangle = |\Phi^+\rangle, \quad \sigma_{10}^A \otimes I^B |\Phi^+\rangle = |\Phi^-\rangle,$$

$$\sigma_{01}^A \otimes I^B |\Phi^+\rangle = |\Psi^+\rangle, \quad \sigma_{11}^A \otimes I^B |\Phi^+\rangle = |\Psi^-\rangle.$$

پس نتیجه یکی از بردارهای پایه‌ی بل می‌شود و از آنجا که این حالت‌ها بر هم عمود هستند اگر آلیس بعد از اثر دادن عملگر σ_{ij} کیوبیت خود را برای باب بفرستد باب میتواند به طور دقیق تشخیص دهد که این دو کیوبیت در چه حالتی هستند و از آنجا می‌فهمد که آلیس کدام σ_{ij} را اثر داده است.

به طور دقیق‌تر، فرض کنید دو بیت آلیس $i, j \in \{0, 1\}$ باشند. پروتکل این طور شروع می‌شود که آلیس σ_{ij} (که یکانی است) را روی کیوبیت A اعمال می‌کند و بعد این کیوبیت را از طریق کانال کوانتمی برای باب می‌فرستد. حال باب دو کیوبیت A و B را در اختیار دارد و آنها را در پایه‌ی بل اندازه می‌گیرد (پس عملگرهای متناظر این اندازه‌گیری از رابطه (۱) بدست می‌آیند). از آنجا که چهار حالت $\sigma_{ij} \otimes I|\Phi^+\rangle$ بر هم عمودند، این اندازه‌گیری آنها را از هم بدون خطا تشخیص می‌دهد. پس باب از روی حاصل اندازه‌گیریش می‌تواند i, j را بیابد.