محاسبات کوانتمی (۲۲۶۷۱) ترم بهار ۱۳۹۱-۱۳۹۰

مدرس: سلمان ابوالفتح بیگی نویسنده: الینکا بدرویا

جلسه ۶

۱ نحوه‌ی محاسبه‌ی اثر جزئی

فرض کنید ماتریس S_{AB} به صورت ضرب تانسوری دو ماتریس باشد.

$$S_{AB} = M_A \otimes N_B = \begin{pmatrix} m_{11}N & m_{12}N & \dots & m_{1d}N \\ m_{21}N & m_{22}N & \dots & m_{2d}N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{d1}N & m_{d2}N & \dots & m_{dd}N \end{pmatrix}.$$

می‌خواهیم $\mathrm{tr}_A(S_{AB})$ را بدست بیاوریم. با توجه به تعریف اثر جزئی داریم

$$\mathrm{tr}_A(S_{AB}) = \mathrm{tr}_A(M_A \otimes N_B) = (\mathrm{tr}(M))N = \sum_{i=1}^{d} m_{ii}N.$$

پس در واقع اثر جزئی بر روی زیرفضای A از مجموع بلوک‌های روی قطر اصلی ماتریس S_{AB} بدست می‌آید.

حال بیایید $\mathrm{tr}_B(S_{AB})$ را بدست آوریم. مجدداً با استفاده از تعریف اثر جزئی داریم

$$\mathrm{tr}_B(S_{AB}) = \mathrm{tr}_B(M_A \otimes N_B) = (\mathrm{tr}(N))M = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(m_{11}N) & \mathrm{tr}(m_{12}N) & \dots & \mathrm{tr}(m_{1d}N) \\ \mathrm{tr}(m_{21}N) & \mathrm{tr}(m_{22}N) & \dots & \mathrm{tr}(m_{2d}N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{tr}(m_{d1}N) & \mathrm{tr}(m_{d2}N) & \dots & \mathrm{tr}(m_{dd}N) \end{pmatrix}.$$

پس اثر جزئی گرفتن بر روی زیرفضای B معادل این است که به جای هر بلوک ماتریس S_{AB}، اثرش را قرار دهیم.

توجه کنید که به دلیل خطی بودن، این دو روش محاسبه‌ی اثر جزئی بر حسب بلوک‌های ماتریس S_{AB} حتی اگر این ماتریس به صورت ضرب تانسوری نباشد نیز برقرار است.

۲ مشابه کلاسیک اثر جزئی، توزیع احتمال حاشیه ای

در این بخش ابتدا با کمک یک مثال، مشابه کلاسیک اثر جزئی را بررسی می‌کنیم. از آنجا که ماتریس چگالی از یک توزیع احتمال روی فضای هیلبرت به دست می‌آید، در واقع اثر جزئی گرفتن مانند یافتن توزیع احتمال حاشیه‌ای است. در مثالی دیگر بررسی خواهیم کرد که متوسط حالت یک بخش از سیستمی ترکیبی مستقل از اندازه‌گیری روی بخش‌های دیگر است.

مثال ۱ دو متغیر تصادفی X و Y را در نظر بگیرید که به ترتیب می‌توانند مقادیر $\{x_0, x_1\}$ و $\{y_0, y_1\}$ را اتخاذ کنند. تابع توزیع احتمال مشترک این دو متغیر به صورت زیر داده شده است.

$$p(X = x_0, Y = y_0) = \frac{1}{2}, \quad p(X = x_0, Y = y_1) = \frac{1}{3}$$
$$p(X = x_1, Y = y_0) = \frac{1}{6}, \quad p(X = x_1, Y = y_1) = 0$$

حالا می‌خواهیم توزیع حاشیه‌ای X را به دست بیاوریم. به عبارتی می‌خواهیم $p(X = x_0), p(X = x_1)$ را محاسبه کنیم.

$$p(X = x_0) = p(X = x_0, Y = y_0) + p(X = x_0, Y = y_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$
$$p(X = x_1) = \frac{1}{6}$$

به طور مشابه می‌توان توزیع احتمال حاشیه‌ای متغیر Y را نیز بدست آورد

$$p(Y = y_0) = \frac{2}{3}, \quad p(Y = y_1) = \frac{1}{3}$$

می‌دانیم که برای محاسبه‌ی میانگین و یا واریانس X، داشتن توزیع حاشیه‌ای X کافی است و دیگر نیازی به شناختن توزیع احتمال کل X, Y نیست. در مکانیک کوانتومی اثر جزئی دقیقاً همین نقش توزیع حاشیه‌ای را دارد. برای مثال اگر سیستم ترکیبی A, B را داشته باشیم و بخواهیم با اندازه‌گیری روی سیستم A اطلاعاتی از آن بدست آوریم دیگر نیازی به ماتریس چگالی ρ_{AB} نیست و کافی است ماتریس چگالی کاهیده[۱] سیستم $\rho_A = \text{tr}_B(\rho_{AB})$ را داشته باشیم. به عبارت دیگر توزیع احتمال حاصل یک اندازه‌گیری روی بخش A را می‌توان از روی ρ_A محاسبه کرد.

توجه کنید که همان طور که در حالت کلی تساوی $p(X = x_0, Y = y_0) = p(X = x_0) \cdot p(Y = y_0)$ برقرار نیست، تساوی $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ نیز لزوما برقرار نیست:

$$p(X = x_0, Y = y_0) = \frac{1}{2},$$
$$p(X = x_0) \cdot P(Y = y_1) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{18} \neq p(X = x_0, Y = y_0).$$

مثال ۲ حالت در هم تنیده‌ی $|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle$ برای دو کیوبیت A, B داده شده است.

[۱] Reduced density matrix

ابتدا ماتریس چگالی متناظر را محاسبه کنیم

$$\begin{aligned}\rho_{AB} &= |\psi\rangle\langle\psi| \\ &= \frac{1}{4}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}|01\rangle\langle 01| + \frac{1}{4}|11\rangle\langle 11| \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}}|00\rangle\langle 01| + \frac{1}{2\sqrt{2}}|01\rangle\langle 00| \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}}|01\rangle\langle 11| + \frac{1}{2\sqrt{2}}|11\rangle\langle 01| \\ &+ \frac{1}{4}|11\rangle\langle 00| + \frac{1}{4}|00\rangle\langle 11|.\end{aligned}$$

حال ماتریس‌های چگالی کاهیده را حساب کنیم.

$$\rho_A = \mathrm{tr}_B(\rho_{AB}) = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{2\sqrt{2}}|0\rangle\langle 1| + \frac{1}{2\sqrt{2}}|1\rangle\langle 0|.$$

$$\rho_B = \mathrm{tr}_A(\rho_{AB}) = \frac{1}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{3}{4}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{2\sqrt{2}}|0\rangle\langle 1| + \frac{1}{2\sqrt{2}}|1\rangle\langle 0|.$$

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \qquad \rho_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

می‌خواهیم A را در پایه‌ی $|0\rangle, |1\rangle$ اندازه‌گیری کنیم. احتمالات هر خروجی و حالت‌های جدیدی که سیستم به آنها تغییر[۲] می‌کند را بدست می‌آوریم.

$$P(0) = \langle\psi|(|0\rangle\langle 0|_A \otimes \mathcal{I}_B)|\psi\rangle = \mathrm{tr}((|0\rangle\langle 0|_A \otimes \mathcal{I}_B)\rho_{AB}) = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{3}{4}.$$

توجه کنید که $P(0) = 3/4$ برابر است با $\mathrm{tr}(|0\rangle\langle 0|\rho_A)$ یعنی همان طور که انتظار داشتیم توزیع احتمال حاصل اندازه‌گیری روی کیوبیت A را مستقیماً می‌توان از ρ_A بدست آورد.

$$|\psi\rangle \quad \xrightarrow{Collapse} \quad |\psi_0\rangle_{AB} = |0\rangle\langle 0|_A \otimes \mathcal{I}_B|\psi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|01\rangle$$

$$P(1) = \mathrm{tr}((|1\rangle\langle 1|_A \otimes \mathcal{I}_B)\rho_{AB}) = \frac{1}{4} = \mathrm{tr}(|1\rangle\langle 1|\rho_A).$$

$$|\psi\rangle \quad \xrightarrow{Collapse} \quad |\psi_1\rangle_{AB} = |1\rangle\langle 1|_A \otimes \mathcal{I}_B|\psi\rangle = \frac{1}{2}|11\rangle \sim |11\rangle$$

[۲] Collapse

با وجود اینکه اندازه گیری روی سیستم A انجام شده بود، مشاهده می‌شود که سیستم B نیز تغییر کرده است. حال ماتریس‌های چگالی σ^{AB} را در این حالت‌های جدید بدست می آوریم و با استفاده از آنها ماتریس‌های چگالی کاهیده σ_0^B و σ_1^B را برای حالت‌های جدید سیستم B بدست می آوریم.

$$\sigma_0^{AB} = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|, \qquad \sigma_0^B = \mathrm{tr}_A(\sigma_0^{AB}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1^{AB} = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|, \qquad \sigma_1^B = \mathrm{tr}_A(\sigma_1^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

بنابراین B با احتمال $P(0) = \frac{3}{4}$ به σ_0^B و با احتمال $P(1) = \frac{1}{4}$ به σ_1^B تغییر می کند. پس میانگین سیستم B بعد از اندازه‌گیری برابر است با

$$P(0)\sigma_0^B + P(1)\sigma_1^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \rho_B.$$

مشاهده می‌شود که میانگین سیستم B تغییر نکرد. البته از ابتدا می‌دانستیم که میانگین سیستم B نباید با اندازه‌گیری روی سیستم A تغییر کند؛ چون اگر می‌توانستیم با اندازه گیری روی یک سیستم، میانگین سیستم دیگر را تغییر دهیم آنگاه بدون رد و بدل کردن سیگنال می‌توانستیم پیغام بفرستیم.

۱.۲ خلاصه نکات

۱. ماتریس چگالی کاهیده مانند مفهوم توزیع چگالی حاشیه‌ای است و همان کاربردها را دارد.

۲. متوسط حالت B مستقل از اندازه گیری روی A است.[۳]

۳. هنگام اندازه گیری بر روی سیستم A توزیع احتمال متناظر را می‌توان مستقیماً از روی ماتریس چگالی کاهیده حساب کرد. $P(0) = \mathrm{tr}(|0\rangle\langle 0|\rho_A)$. در حالت کلی:

$$\mathrm{tr}((M_A \otimes \mathcal{I}_B)X_{AB}) = \mathrm{tr}(M_A\, \mathrm{tr}_B(X_{AB})).$$

۳ خالص سازی

تاکنون ماتریس چگالی را در دو جا دیده‌ایم

۱. برای توصیف حالت سیستم در آنسامبل‌ها $\{p_i, |\psi_i\rangle\} \longrightarrow \rho = \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

۲. استفاده از ماتریس چگالی کاهیده برای بررسی یک سیستم به صورت جداگانه در سیستم‌های درهم تنیده

$$|\psi\rangle_{AB} \longrightarrow \rho_B = \mathrm{tr}_A|\psi\rangle\langle\psi|.$$

این دو کاربرد تقریبا یکسان هستند. در این بخش نشان می‌دهیم که با داشتن یک آنسامبل در فضای A می‌توانیم یک ماتریس چگالی خالص[۴] روی فضای A, B بسازیم بطوری که سیستم A همان ماهیت قبلی را داشته باشد. یعنی اگر

[۳] No-signaling
[۴] Pure

ماتریس چگالی کاهیده A را حساب کنیم همان ماتریس چگالی متناظر با آنسامبل را بدست آوریم. به این عمل خالص سازی[۵] گویند.

برای مثال آنسامبل زیر را برای سیستم A در نظر بگیرید

$$\{p_i, |\psi_i\rangle_A\}_{i=1}^k,$$

که ماتریس چگالی متناظر آن برابر است با

$$\sigma = \sum_{i=1}^k p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|.$$

حال یک سیستم B در نظر بگیرید که فضای هیلبرت متناظر آن k بعدی و دارای پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|1\rangle, \ldots, |k\rangle\}$ باشد. حالت زیر را برای سیستم ترکیبی A, B تعریف می کنیم.

$$|\Phi\rangle_{AB} := \sum_{i=1}^k \sqrt{p_i} |\psi_i\rangle_A |i\rangle_B.$$

برای این حالت تعریف شده، ماتریس چگالی کاهیده را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\rho_A = \mathrm{tr}_B(|\Phi\rangle\langle\Phi|_{AB}) &= \mathrm{tr}_B \left(\sum_{i,j} \sqrt{p_i p_j} |\psi_i\rangle\langle\psi_j|_A \otimes |i\rangle\langle j|_B \right) \\
&= \sum_{i,j} \sqrt{p_i p_j} |\psi_i\rangle\langle\psi_j|_A \cdot \mathrm{tr}(|i\rangle\langle j|)_B \\
&= \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|_A.
\end{aligned}$$

مشاهده می‌شود نتیجه همان σ ماتریس چگالی است که به آنسامبل نسبت دادیم.

توجه کنید که این خالص سازی یکتا نیست چون انتخاب پایه‌ی متعامد یکه برای B دلخواه بود. قضیه‌ی 2.6 و تمرین 2.81 کتاب مرجع در مورد درجه‌های آزادی این خالص سازی و همچنین نوشتن یک ماتریس چگالی بر حسب یک انسامبل هستند.

۴ پارادکس اینشتین-پودلسکی-روزن و نامساوی بل

اینشتین و همکارانش، پودلسکی و روزن در سال ۱۹۳۵ مقاله‌ای[۶] منتشر و ادعا کردند که فرمول‌بندی مکانیک کوانتمی ناقص است. استدلال آنها را با مثال زیر توضیح می‌دهیم.

حالت درهم تنیده‌ی $|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ را برای دو کیوبیت A و B که از هم دور هستند در نظر بگیرید. کمیت فیزیکی s_1 را در نظر بگیرید که اندازه‌گیری متناظر آن، اندازه‌گیری در پایه‌ی $M_1 = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ باشد. کیوبیت

[۵] Purification

[۶] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete

A را در این پایه اندازه‌گیری می‌کنیم. در این حالت حاصل اندازه‌گیری 0 و یا 1 است و سیستم B نیز تغییر خواهد کرد. حال اگر سیستم B را نیز در این پایه اندازه‌گیری کنیم جواب با قطعیت مشخص است. مثلاً اگر حاصل اندازه گیری A، 1 باشد، کل سیستم به $|11\rangle$ تغییر پیدا می‌کند و لذا حاصل اندازه گیری B نیز قطعاً 1 خواهد بود. یعنی کمیت s_1 کیوبیت B، بعد از اندازه‌گیری روی A خوش تعریف است و یک مقدار واقعی مشخص[۷] دارد. توجه کنید که این مقدار از کسی که حاصل اندازه‌گیری روی A را نمی‌داند پوشیده است، ولی نکته در اینجاست که این کمیت وجود دارد. برای مثال شیر یا خط بودن سکه‌ای که پرتاب می‌شود کمیتی است خوش تعریف که مقداری مشخص دارد. در عین حال تا زمانی که سکه را نگاه نکنیم حاصل آن از ما پوشیده است.

اینشتین و همکارانش استدلال کردند که این وجود داشتن کمیت s_1 خاصیتی است «موضعی[۸]» و فقط در مورد کیوبیت B که با فاصله‌ی زیاد از سیستم A قرار گرفته. در نتیجه این وجود داشتن باید مستقل از اندازه‌گیری روی A باشد. بنابراین چون مقدار کمیت s_1 کیوبیت B بعد از اندازه‌گیری روی A وجود دارد، قبل از آن هم می‌بایست وجود داشته باشد.

با همین استدلال می‌توان نتیجه گرفت که کمیت s_1 برای کیوبیت A نیز وجود دارد. اینشتین و همکارانش سپس نتیجه گرفتند که مکانیک کوانتمی کامل نیست زیرا طبق اصول آن، کیمیت s_1 (یعنی حاصل اندازه‌گیری در پایه‌ی M_1) فقط بعد از اندازه‌گیری وجود دارد.

آنها سپس استدلال کردند که این آزمایش را می‌توان به صورت زیر توضیح داد به طوری که تناقضی با بحث وجود کمیت s_1 نداشته باشد. فرض کنید که دو سیستم A, B با احتمال $1/2$ در حالت 00 و با احتمال $1/2$ در حالت 11 باشند. در این صورت کمیت s_1 روی سیستم A با احتمال $1/2$ برابر 0 است و با احتمال $1/2$ برابر 1. همچنین اگر حاصل اندازه‌گیری روی A مثلاً 1 باشد، آنگاه حاصل اندازه‌گیری روی B نیز 1 خواهد بود. در عین حال کمیت s_1 روی هر کدام از سیستم‌های A و B وجود دارد، چه قبل از اندازه‌گیری و چه بعد از آن (دقیقاً مانند سکه‌ای که شیر یا خط بودن آن کمیتی خوش تعریف است و در عین حال احتمالی).

سؤالی که پیش می‌آید این است که اینشتین و همکارانش تناقض وجود و یا عدم وجود کمیت‌های فیزیکی را در صورتی که فقط یک کمیت داشته باشیم حل کردند. ولی اگر بیش از یک کمیت داشته باشیم چه؟

کمیت s_2 را در نظر بگیرید که اندازه‌گیری متناظر آن در پایه‌ی

$$M_2 = \left\{ |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle),\ \ |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right\},$$

باشد. توجه کنید که

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle),$$

و همان استدلال‌هایی که در مورد s_1 کردیم در مورد s_2 نیز برقرارند. حال کمیت‌های s_1 و s_2 سیستم‌های A, B را به طور هم زمان می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

[۷] Realism
[۸] Locality

	(s_1, s_2) of A	(s_1, s_2) of B
with probability $1/4$	$(0, +)$	$(0, +)$
with probability $1/4$	$(0, -)$	$(0, -)$
with probability $1/4$	$(1, +)$	$(1, +)$
with probability $1/4$	$(1, -)$	$(1, -)$

اگر به عنوان مثال کمیت s_2 را برای سیستم A اندازه‌گیری کنیم با احتمال $1/2$ حاصل $+$ می‌شود، و در این صورت حاصل اندازه‌گیری s_2 سیستم B نیز $+$ خواهد بود. در واقع جدول فوق حاصل آزمایش اندازه‌گیری کمیت‌های s_1, s_2 روی سیستم AB را همان طور که مکانیک کوانتمی پیش بینی می‌کند، توضیح می‌دهد و در عین حال تناقضی در مورد وجود این کمیت‌ها ندارد.

۱.۴ روش متغیر نهان

در این بخش ایده اینشتین و همکارانش را دقیق‌تر توضیح می‌دهیم. سیستم ترکیبی AB را در نظر بگیرید و فرض کنید که بتوانیم کمیت‌های $s \in S$ را روی سیستم A اندازه بگیریم. همچنین فرض کنید حاصل هر یک از این اندازه‌گیری‌ها یک عضو از مجموعه‌ی X باشد. در مثال قبل $S = \{s_1, s_2\}$ و X متناظر با s_1 برابر $\{0, 1\}$ است و X متناظر با s_2، $\{+, -\}$ است که چون هر دو، دارای دو عضو هستند آنها را می‌توان با یک مجموعه نشان داد. به همین ترتیب فرض می‌کنیم کمیت‌های $t \in T$ را بتوان روی سیستم B اندازه‌گیری کرد که حاصل هر یک از این اندازه‌گیری‌های یک عضو از مجموعه‌ی Y است.

فرض کنید که اگر کمیت $s \in S$ را روی سیستم A، و کمیت $t \in T$ را روی سیستم B اندازه بگیریم، حاصل اندازه‌گیری‌ها با احتمال $p(x, y|s, t)$ به ترتیب برابر $x \in X$ و $y \in Y$ شوند. مثلاً طبق اصول مکانیک کوانتمی اگر کمیت‌های s, t متناظر با اندازه‌گیری‌های POVM $\{M_x^s : \ x \in X\}$ و $\{N_y^t : \ y \in Y\}$ باشند، و سیستم AB در حالت ρ_{AB}، آنگاه داریم $p(x, y|s, t) = \text{tr}(M_x^s \otimes N_y^t \rho_{AB})$. مثال دیگر پرتاب دو سکه‌ی کاملاً مستقل از هم است که در آن فقط یک کمیت وجود دارد (S, T تک عضوی هستند) و $X = Y = \{$ خط , شیر $\}$. در این مثال به دلیل مستقل بودن دو سکه داریم $p(x, y|s, t) = p(x|s) \cdot p(y|t)$.

اینشتین و همکارانش استدلال کردند که در یک تئوری فیزیکی بدون تناقض باید متغیر تصادفی λ وجود داشته باشد به طوری که

$$p(x, y|s, t) = \sum_{i=1}^{k} p(\lambda = i) p(x|s, \lambda) p(y|t, \lambda). \qquad (۱)$$

در این نظریه λ یک متغیر نهان[۹] است که آزمایشگرها به آن دسترسی ندارند. اگر λ ثابت باشد و فقط یک مقدار بگیرد ($k = 1$)، همان رابطه‌ی $p(x, y|s, t) = p(x|s) \cdot p(y|t)$ را بدست می‌آوریم که در آن سیستم‌های A, B کاملاً مستقل از هم هستند، یعنی کمیت‌های فیزیکی متناظر آنها «موضعی» هستند. به همین دلیل مدل اینشتین و همکارانش local hidden variable نامیده می‌شود. در مثال قسمت قبل λ متناظر سطرهای جدول است و چهار مقدار $1, 2, 3, 4$

[۹] Hidden variable

را می‌گیرد و داریم $p(\lambda = i) = 1/4$ برای هر i. همچنین به طور مثال $p(x = 0|s = s_1, \lambda = 2) = 1$ و $p(x = +|s = s_2, \lambda = 2) = 0$.

۲.۴ نامساوی بل

سال‌ها پس از انتشار مقاله‌ی اینشتین-پودلسکی-روزن، بل[۱۰] این سؤال را مطرح کرد که آیا هر $p(x, y|s, t)$ که در طبیعت ظاهر می‌شود را می‌توان با رابطه‌ی (۱) و با یک متغیر نهان به صورت موضعی توصیف کرد. بل آزمایشی طراحی کرد که با آن می‌توان به جواب این سؤال رسید. این آزمایش‌ها اخیراً انجام شده‌اند و ثابت می‌کنند که فرضیات اینشتین و همکارانش که منتج به مدل local hidden variable شده، درست نیستند. در واقع این آزمایش‌ها نشان می‌دهند که طبیعت موضعی نیست.

برای توضیح ایده‌ی بل از بازی CHSH استفاده می‌کنیم. این بازی بین دو نفر، آلیس و باب انجام می‌شود. فرد سومی یک بیت $s \in \{0, 1\}$ به آلیس و یک بیت $t \in \{0, 1\}$ به باب می دهد. t, s به صورت تصادفی و مستقل از هم انتخاب می‌شوند. پس آلیس t را نمی‌داند و باب از s بی‌خبر است. حال آلیس و باب بدون داشتن ارتباط، هرکدام باید یک بیت به فرد سوم بدهند. این بیتهای خروجی را a, b می‌نامیم. آنها بازی را برده‌اند اگر

$$a + b \overset{2}{\equiv} s \cdot t.$$

در این صورت احتمال برد آنها برابر است با

$$p(win) = \sum_{s,t} p(s, t) \sum_{a,b \in \{0,1\} \ such \ that \ a+b \overset{2}{\equiv} s \cdot t} p(a, b|s, t) = \sum_{s,t} \frac{1}{4} \sum_{a,b:\, a+b \overset{2}{\equiv} s \cdot t} p(a, b|s, t),$$

که در آن $p(s, t) = 1/4$ احتمال این است که آلیس و باب به ترتیب s و t را دریافت کنند، و $p(a, b|s, t)$ احتمال این است که آلیس و باب به ترتیب خروجی‌های a و b را بدهند با این شرط که ورودی‌های آنها s, t باشند. حال سؤال این است که بیشینه‌ی $p(win)$ چیست.

فرض کنید که آلیس و باب همواره خروجی‌های $a = b = 0$ را بدهند. توجه کنید که $s \cdot t$ با احتمال $3/4$ برابر 0 است. لذا با این استراتژی آنها با احتمال $3/4$ برنده خواهند بود. در حالت کلی‌تر اگر $p(a, b|s, t)$ به صورت (۱) با مدل local hidden varialbe نوشته شود خواهیم داشت

$$p(win) \leq 3/4. \tag{۲}$$

چنین نامساوی‌ای را نامساوی بل[۱۱] گویند. برای اثبات آن ابتدا توجه کنید که فضای $p(a, b|s, t)$هایی که به صورت (۱) هستند یک فضای محدب است. مرز این فضا از نقاط به صورت $p(a, b|s, t) = p(a|s)p(b|t)$ تشکیل شده است که $p(a|s), p(b|t)$ صفر و یا یک هستند. از طرف دیگر $p(win)$ یک تابع خطی بر حسب $p(a, b|s, t)$ است. پس بیشینه‌ی آن روی مرز این فضا گرفته می‌شود. با بررسی حالات مختلفی که مقادیر مرزی می‌توانند اتخاذ کنند اثبات (۲) زیاد سخت نیست.

[۱۰] J.S. Bell, On the Einstein-Poldolsky-Rosen paradox

[۱۱] Bell's inequality

در ادامه استراتژی کوانتومی را مطرح می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که احتمال برد در دنیای کوانتومی بیشتر است و نامساوی بل (۲) را نقض می‌کند. این استراتژی نتیجه می‌دهد که $p(a,b|s,t) = \text{tr}(M_a^s \otimes N_b^t \rho_{AB})$ در دنیای کوانتمی وجود دارد که به صورت (۱) قابل بیان نیست. پس بر خلاف مثال خاصی که اینشتین و همکارانش بررسی کردند مدل local hidden variable نمی‌تواند مکانیک کوانتمی را توضیح دهد.

فرض کنید آلیس و باب قبل از شروع بازی دو کیوبیت را که در حالت $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)_{AB}$ آماده شده‌اند را با هم تقسیم کنند. پایه‌ی متعامد یکه‌ی $R(\theta)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$R(\theta) = \{|r_0(\theta)\rangle, |r_1(\theta)\rangle\},$$

که در آن

$$|r_0(\theta)\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle, \quad |r_1(\theta)\rangle = -\sin(\theta)|0\rangle + \cos(\theta)|1\rangle.$$

همچنین قرار دهید.

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{4} \qquad \beta_0 = \frac{\pi}{8}, \quad \beta_1 = \frac{-\pi}{8}$$

استراتژی این است که آلیس پس از دریافت s کیوبیت A را در پایه ی $R(\alpha_s)$ اندازه می‌گیرد و a را برابر حاصل این اندازه‌گیری قرار می‌دهد. باب هم کیوبیت B را در پایه‌ی $R(\beta_t)$ اندازه‌گیری می‌کند و بیت b را برابر حاصل اندازه‌گیری قرار می دهد. احتمال برد با این استراتژی را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned} p(a,b|s,t) &= \langle\psi|(|r_a(\alpha_s)\rangle\langle r_a(\alpha_s)| \otimes |r_b(\beta_t)\rangle\langle r_b(\beta_t)|)|\psi\rangle \\ &= \frac{1}{2}\text{tr}(|r_a(\alpha_s)\rangle\langle r_a(\alpha_s)|r_b(\beta_t)\rangle\langle r_b(\beta_t)|) \\ &= \frac{1}{2}|\langle r_a(\alpha_s)|r_b(\beta_t)\rangle|^2. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} p(win) &= \sum_{s,t} \sum_{a,b:\ a+b\overset{2}{\equiv}s\cdot t} \frac{1}{4}P(a,b|s,t) \\ &= \sum_{s,t} \sum_{a,b:\ a+b\overset{2}{\equiv}s\cdot t} \frac{1}{8}|\langle r_a(\alpha_s)|r_b(\beta_t)\rangle|^2 \\ &= \cos^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.8535 > 3/4. \end{aligned}$$