مدرس: سلمان ابوالفتح بیگی
نویسنده: سلمان ابوالفتح بیگی

جلسه ۱۰

در این جلسه دینامیک سیستم‌های کوانتمی را بررسی می‌کنیم. طبق اصول مکانیک کوانتمی دینامیک یک سیستم «بسته» به وسیله‌ی عملگرهای یکانی مشخص می‌شود:

$$\rho \mapsto U\rho U^\dagger$$

حال سؤال این است که اگر سیستم بسته نباشد چه. نکته‌ی دیگر این است که تغییری که اندازه‌گیری روی یک سیستم کوانتمی القاء می‌کند را نیز می‌توان به عنوان یک دینامیک کوانتمی در نظر گرفت. همچنین ممکن است یک دینامیک کوانتمی از ترکیب تحول یکانی و اندازه‌گیری به وجود بیاید. در اینجا ابتدا دو مثال مهم از دینامیک‌های کوانتمی را بررسی می‌کنیم و بعد این مسأله را در حالت کلی در نظر می‌گیریم.

۱ برهم کنش با محیط

فرض کنید که سیستم کوانتمی S با محیط اطرافش، که آن را با E نشان می‌دهیم، بر هم کنش داشته باشد. توجه کنید که S با محیط اطرافش یک سیستم ترکیبی «بسته» تشکیل می‌دهد، پس تحول زمانی SE یک تحول یکانی U_{SE} است. از طرف دیگر از آنجا که بعد از برهم کنش فقط به حالت سیستم S علاقه‌مندیم، باید E را از رابطه‌ی بدست آمده اثر جزیی بگیریم. حال فرض کنید حالت هر یک سیستم‌های S, E قبل از برهم کنش τ_E و ρ_S باشد. در نتیجه بعد از برهم کنش حالت سیستم S برابر است با $\mathrm{tr}_E\left(U_{SE}(\rho_S\otimes\tau_E)U_{SE}^\dagger\right)$. بنابراین می‌توانیم نگاشت

$$\begin{aligned}&\Phi:\mathbf{L}(\mathcal{H}_S)\to\mathbf{L}(\mathcal{H}_S)\\&\Phi(\rho_S)=\mathrm{tr}_E\left(U_{SE}(\rho_S\otimes\tau_E)U_{SE}^\dagger\right),\end{aligned}\qquad(۱)$$

را تعریف کنیم.

می‌خواهیم فرم دیگری برای Φ به دست بیاوریم. ابتدا برای سادگی فرض می‌کنیم $\tau_E=|v\rangle\langle v|_E$ محض باشد. همچنین $\{|e_0\rangle_E,\dots,|e_{d-1}\rangle_E\}$ را یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{H}_E$ بگیرید. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}\Phi(\rho_S)&=\mathrm{tr}_E\left(U_{SE}(\rho_S\otimes|v\rangle\langle v|_E)U_{SE}^\dagger\right)\\&=\sum_{i=0}^{d-1}(I_S\otimes\langle e_i|_E)\left(U_{SE}(\rho_S\otimes|v\rangle\langle v|_E)U_{SE}^\dagger\right)(I_S\otimes|e_i\rangle_E)\\&=\sum_{i=0}^{d-1}(I_S\otimes\langle e_i|_E)U_{SE}(I_S\otimes|v\rangle_E)\rho_S(I_S\otimes\langle v|_E)U_{SE}^\dagger(I_S\otimes|e_i\rangle_E).\end{aligned}$$

حال برای هر $0 \leq i \leq d-1$ تعریف کنید

$$M_i = (I_S \otimes \langle e_i|_E) U_{SE} (I_S \otimes |v\rangle_E).$$

داریم $M_i^\dagger = (I_S \otimes \langle v|_E) U_{SE}^\dagger (I_S \otimes |e_i\rangle_E)$ و در نتیجه

$$\Phi(\rho_S) = \sum_{i=0}^{d-1} M_i \rho_S M_i^\dagger. \tag{۲}$$

همچنین

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{d-1} M_i^\dagger M_i &= \sum_{i=0}^{d-1} (I_S \otimes \langle v|_E) U_{SE}^\dagger (I_S \otimes |e_i\rangle_E)(I_S \otimes \langle e_i|_E) U_{SE} (I_S \otimes |v\rangle_E) \\
&= (I_S \otimes \langle v|_E) U_{SE}^\dagger \left(\sum_{i=0}^{d-1} I_S \otimes |e_i\rangle\langle e_i|_E \right) U_{SE} (I_S \otimes |v\rangle_E) \\
&= (I_S \otimes \langle v|_E) U_{SE}^\dagger (I_S \otimes I_E) U_{SE} (I_S \otimes |v\rangle_E) \\
&= (I_S \otimes \langle v|_E)(I_S \otimes |v\rangle_E) \\
&= \langle v|v\rangle I_S \\
&= I_S.
\end{aligned}$$

بنابراین برای نگاشت Φ دو رابطه به دست آوردیم. به (۱) Stinespring dilation گفته می‌شود و به عملگرهای M_i، Kraus operators . در ابتدا ما فرض کرده بودیم که τ_E محض است و رابطه‌ی (۲) را به دست آوردیم. به راحتی می‌توان بررسی کرد که اگر τ_E محض هم نباشد باز این رابطه برقرار است.

۲ اندازه‌گیری به عنوان یک دینامیک

فرض کنید سیستم S را که در حالت ρ_S قرار دارد با عملگرهای $\{M_i\}$ اندازه‌گیری کنیم. طبق شرط کامل بودن داریم $\sum_i M_i^\dagger M_i = I_S$. می‌دانیم حاصل اندازه‌گیری با احتمال $p_i = \mathrm{tr}(M_i \rho M_i^\dagger)$ برابر i است و در این صورت حالت سیستم به

$$\sigma_i = \frac{1}{p_i} M_i \rho M_i^\dagger$$

تغییر پیدا می‌کند. یعنی پس از اندازه‌گیری انسامبل $\{p_i, \sigma_i\}$ را خواهیم داشت. طبق تعریف ماتریس چگالی متناظر با این انسامبل برابر است با

$$\sum_i p_i \sigma_i = \sum_i M_i \rho M_i^\dagger.$$

در واقع اگر حالت سیستم بعد از اندازه‌گیری را با $\Phi(\rho)$ نمایش دهیم خواهیم داشت

$$\Phi(\rho) = \sum_i M_i \rho M_i^\dagger.$$

توجه کنید که در اینجا ما فرض کردیم حاصل اندازه‌گیری از ما پوشیده است. زیرا اگر بدانیم حاصل اندازه‌گیری j است، حالت سیستم بعد از اندازه‌گیری σ_j خواهد بود. ولی اگر حاصل اندازه‌گیری را ندانیم، و فقط بدانیم که اندازه‌گیری انجام شده است انسامبل $\{p_i, \sigma_i\}$ را به دست می‌آوریم که متناظر با $\Phi(\rho)$ است.

نکته‌ی دیگر این که با این دید اثر جزیی نیز متناظر با اندازه‌گیری در یک پایه است. فرض کنید که حالت ترکیبی ρ_{AB} را با عملگرهای $\{M_i = I_A \otimes \langle i|_B\}$ که در آن $\{|i\rangle_B\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{H}_B$ است اندازه بگیریم. در این صورت داریم

$$\Phi(\rho_{AB}) = \sum_i M_i \rho M_i^\dagger = \sum_i (I_A \otimes \langle i|_B)\rho_{AB}(I_A \otimes |i\rangle_B) = \mathrm{tr}_B \rho_{AB}.$$

همچنین توجه کنید که با در نظر گرفتن اندازه‌گیری به عنوان یک دینامیک کوانتمی همان رابطه‌ی (۲) را به دست آوردیم که از برهم کنش با محیط به دست آمد. سؤالی که در اینجا بوجود می‌آید این است که آیا عکس این رابطه نیز برقرار است. یعنی آیا برای هر اندازه‌گیری، برهم کنشی با محیط اطراف وجود دارد که دینامیک متناظر آن همان دینامیک اندازه‌گیری باشد. قضیه‌ی زیر به این سؤال پاسخ می‌دهد.

قضیه ۱: برای عملگرهای $\{M_i\}_{i=1}^k \subset \mathbf{L}(\mathcal{H}_S)$ که $\sum_{i=1}^k M_i^\dagger M_i = I_S$، فضای هیلبرت $\mathcal{H}_E$ و $|v\rangle \in \mathcal{H}_E$ و عملگر یکانی U_{SE} وجود دارند به طوری که برای هر ρ_S

$$\sum_{i=1}^k M_i \rho_S M_i^\dagger = \mathrm{tr}_E \left(U_{SE} \left(\rho_S \otimes |v\rangle\langle v|_E \right) U_{SE}^\dagger \right).$$

اثبات: $\mathcal{H}_E$ را یک فضای هیلبرت با پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|e_1\rangle, \dots, |e_k\rangle\}$ بگیرید و قرار دهید $|v\rangle = |e_1\rangle \in \mathcal{H}_E$. تعریف کنید $U_{SE} : \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E \to \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$

$$U_{SE}\left(|\psi\rangle_S |e_1\rangle_E\right) = \sum_{i=1}^k M_i |\psi\rangle |e_i\rangle. \tag{۳}$$

تا اینجا U_{SE} روی $\mathcal{H}_S \otimes \{|e_1\rangle_E\} \subseteq \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ تعریف شده است. توجه کنید که U_{SE} روی این زیرفضا حافظ ضرب داخلی است:

$$\begin{aligned}
\left(U_{SE}\left(|\psi\rangle_S|e_1\rangle_E\right), U_{SE}\left(|\phi\rangle_S|e_1\rangle_E\right)\right) &= \left(\sum_i M_i|\psi\rangle|e_i\rangle, \sum_j M_j|\phi\rangle|e_j\rangle \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^k \langle\psi|M_i^\dagger M_j|\phi\rangle\langle e_i|e_j\rangle \\
&\sum_{i=1}^k \langle\psi|M_i^\dagger M_i|\phi\rangle \\
&= \langle\psi|\sum_{i=1}^k M_i^\dagger M_i|\phi\rangle \\
&= \langle\psi|\phi\rangle.
\end{aligned}$$

حال ادعا می‌کنیم که U_{SE} را می‌توان به یک عملگر یکانی روی کل $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ تعریف کرد. اگر $\{|0\rangle, \dots, |d-1\rangle\}$ را یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{H}_S$ بگیریم آنگاه محاسبات بالا نشان می‌دهند که $\{U_{SE}|i\rangle_S|e_1\rangle : \ \ i = 0, \dots, d-1\}$ متعامد یکه است. پس این مجموعه را می‌توان به یک «پایه‌ی» متعامد یکه با dk عضو گسترش داد

$$\mathcal{B} = \{|f_{ij}\rangle : \ \ 0 \le i \le d-1, 1 \le j \le k\}$$

که در آن $|f_{i1}\rangle = U_{SE}|i\rangle_S|e_1\rangle$. کافی است قرار دهیم $U_{SE}|i\rangle_S|e_j\rangle = |f_{ij}\rangle$. در این صورت U_{SE} یکانی است و در (۳) صدق می‌کند. حال داریم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_E\left(U_{SE}\left(|\psi\rangle\langle\psi|_S \otimes |e_1\rangle\langle e_1|_E\right)U_{SE}^\dagger\right) &= \sum_{i,j=1}^{k} \mathrm{tr}_E\left(\left(M_i|\psi\rangle|e_i\rangle\right)\left(\langle\psi|M_j^\dagger\langle e_j|\right)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} \mathrm{tr}_E\left(M_i|\psi\rangle\langle\psi|M_j^\dagger \otimes |e_i\rangle\langle e_j|\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} M_i|\psi\rangle\langle\psi|M_j^\dagger\left(\mathrm{tr}|e_i\rangle\langle e_j|\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} M_i|\psi\rangle\langle\psi|M_i^\dagger \\
&= \Phi(|\psi\rangle\langle\psi|).
\end{aligned}$$

به همین ترتیب برای هر ماتریس چگالی ρ خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{k} M_i\rho_S M_i^\dagger = \mathrm{tr}_E\left(U_{SE}\left(\rho_S \otimes |v\rangle\langle v|_E\right)U_{SE}^\dagger\right).$$

۳ نگاشت‌های کاملاً مثبت و حافظ اثر

در دو بخش قبل دیدیم که نگاشت‌های متناظر با برهم کنش با محیط و اندازه‌گیری یکسان هستند. در این بخش نگاشت‌های کوانتمی را در حالت کلی مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فرض کنید $\Phi : \mathbf{L}(\mathcal{H}_S) \to \mathbf{L}(\mathcal{H}_S)$ یک نگاشت کوانتمی باشد. با توجه به اصول مکانیک کوانتمی انتظار داریم Φ خطی باشد. نکته‌ی دوم این است که Φ باید حالات کوانتمی، یعنی ماتریس‌های چگالی را به ماتریس‌های چگالی ببرد. پس اولاً Φ باید حافظ اثر باشد ($\mathrm{tr}(\Phi(\rho)) = \mathrm{tr}(\rho)$) و ثانیاً $\Phi(\rho) \ge 0$ اگر $\rho \ge 0$.

تعریف: نگاشت خطی $\Phi : \mathbf{L}(\mathcal{H}_S) \to \mathbf{L}(\mathcal{H}_S)$ را «مثبت[۱]» گوییم اگر برای هر $X \ge 0$ داشته باشیم $\Phi(X) \ge 0$.

[۱] Positive

شرط مثبت بودن به تنهایی برای مشخص کردن نگاشت‌های کوانتمی کافی نیست. برای مثال فرض کنید Φ نگاشت ترانهاده گرفتن باشد: $\Phi(X) = X^T$. اگر X مثبت نیمه معین باشد، X^T نیز مثبت نیمه معین است. پس نگاشت Φ مثبت است. حال اگر ρ_{SE} یک حالت کوانتمی در سیستم ترکیبی SE باشد آنگاه با اعمال یک نگاشت کوانتمی روی فقط بخش S از این سیستم ترکیبی $\Phi_S \otimes \mathcal{I}_E(\rho_{SE})$ انتظار داریم حاصل باز مثبت نیمه معین باشد: $\Phi_S \otimes \mathcal{I}_E(\rho_{SE}) \geq 0$.

قرار دهید $\rho_{SE} = |v\rangle\langle v|_{SE}$ که در آن $|v\rangle_{SE} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. در این صورت

$$\rho_{SE} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \Phi_S \otimes \mathcal{I}_E(\rho_{SE}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

ولی می‌بینیم $\Phi_S \otimes \mathcal{I}_E(\rho_{SE})$ یک مقدار ویژه‌ی $-1/2$ دارد، پس مثبت نیمه معین نیست. در واقع با این که Φ_S مثبت است $\Phi_S \otimes \mathcal{I}_E$ مثبت نیست.

تعریف: نگاشت خطی $\Phi_S : \mathbf{L}(\mathcal{H}_S) \to \mathbf{L}(\mathcal{H}_S)$ را «کاملاً مثبت[۲]» گوییم اگر برای هر فضای هیلبرت $\mathcal{H}_E$، $\Phi_S \otimes \mathcal{I}_E$ مثبت باشد.

قضیه ۲: برای هر نگاشت خطی کاملاً مثبت $\Phi : \mathbf{L}(\mathcal{H}_S) \to \mathbf{L}(\mathcal{H}_S)$ عملگرهای $M_k \in \mathbf{L}(\mathcal{H}_S)$ وجود دارند به طوری که

$$\Phi(X) = \sum_k M_k X M_k^\dagger.$$

همچنین اگر Φ حافظ اثر باشد آنگاه $\sum_k M_k^\dagger M_k = I$.

اثبات: $\{|0\rangle_S, \ldots, |d-1\rangle_S\}$ را یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{H}_S$ بگیرید و $\mathcal{H}_E$ را یک فضای هیلبرت یکریخت با $\mathcal{H}_S$ قرار دهید. تعریف کنید

$$|\alpha\rangle_{SE} = \sum_{i=0}^{d-1} |i\rangle_S |i\rangle_E,$$

و

$$J_{SE} = \Phi_S \otimes \mathcal{I}_E(|\alpha\rangle\langle\alpha|_{SE}) = \sum_{i,j=0}^{d-1} \Phi_S(|i\rangle\langle j|)_S \otimes |i\rangle\langle j|_E.$$

[۲] Completely positive

برای $|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} x_i|i\rangle$ تعریف کنید $|\tilde{\psi}\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} x_i^*|i\rangle$. داریم

$$\begin{aligned}
(I_S \otimes \langle\tilde{\psi}|_E) J_{SE} (I_S \otimes |\tilde{\psi}\rangle_E) &= \sum_{i,j=0}^{d-1} (I_S \otimes \langle\tilde{\psi}|_E) \left(\Phi_S(|i\rangle\langle i|)_S \otimes |i\rangle\langle j|_E\right) (I_S \otimes |\tilde{\psi}\rangle_E) \\
&= \sum_{i,j=0}^{d-1} \Phi_S(|i\rangle\langle j|) \langle\tilde{\psi}|i\rangle\langle j|\tilde{\psi}\rangle \\
&= \sum_{i,j=0}^{d-1} x_i x_j^* \Phi_S(|i\rangle\langle j|) \\
&= \Phi_S\left(\sum_{i,j=0}^{d-1} x_i x_j^* |i\rangle\langle j|\right) \\
&= \Phi_S(|\psi\rangle\langle\psi|).
\end{aligned}$$

می‌دانیم Φ_S کاملاً مثبت است. پس $J_{SE} \geq 0$. لذا پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|\beta_k\rangle_{SE}\}$ و اعداد $\lambda_k \geq 0$ وجود دارند به طوری که

$$J_{SE} = \sum_k \lambda_k |\beta_k\rangle\langle\beta_k|.$$

حال برای هر k تعریف کنید $M_k : \mathcal{H}_S \to \mathcal{H}_S$

$$M_k|\psi\rangle = \sqrt{\lambda_k}(I_S \otimes \langle\tilde{\psi}|_E)|\beta_k\rangle = \sqrt{\lambda_k}\sum_{i=0}^{d-1} x_i (I_S \otimes \langle i|_E)|\beta_k\rangle.$$

M_k یک نگاشت خطی است و داریم:

$$\begin{aligned}
\Phi(|\psi\rangle\langle\psi|) &= (I_S \otimes \langle\tilde{\psi}|_E) J_{SE} (I_S \otimes |\tilde{\psi}\rangle_E) \\
&= \sum_k \lambda_k (I_S \otimes \langle\tilde{\psi}|_E)|\beta_k\rangle\langle\beta_k|(I_S \otimes |\tilde{\psi}\rangle_E) \\
&= \sum_k \left[\sqrt{\lambda_k}(I_S \otimes \langle\tilde{\psi}|_E)|\beta_k\rangle\right]\left[\sqrt{\lambda_k}\langle\beta_k|(I_S \otimes |\tilde{\psi}\rangle_E)\right] \\
&= \sum_k M_k|\psi\rangle\langle\psi|M_k^\dagger.
\end{aligned}$$

با توجه به خطی بودن Φ، رابطه‌ی $\Phi(\rho) = \sum_k M_k \rho M_k^\dagger$ برای هر ماتریس چگالی برقرار است. پس قسمت اول قضیه ثابت شد.

فرض کنید Φ حافظ اثر باشد. یعنی برای هر X داریم

$$\mathrm{tr}X = \mathrm{tr}\Phi(X) = \sum_k \mathrm{tr}(M_k X M_k^\dagger) = \sum_k \mathrm{tr}(M_k^\dagger M_k X).$$

پس $\mathrm{tr}((I-\sum_k M_k^\dagger M_k)X)=0$ برای هر X. در نتیجه $I=\sum_k M_k^\dagger M_k$. در اینجا از این خاصیت استفاده که اگر $\mathrm{tr}(XA)=0$ برای هر X آنگاه $A=0$.

نمایش یک نگاشت کاملاً مثبت که حافظ اثر است[۳] به صورت $\Phi(X)=\sum_k M_k X M_k^\dagger$ یکتا نیست. قضیه‌ی 8.2 کتاب مرجع این نکته را بررسی می‌کند.

نکته‌ی دیگر این که از ترکیب قضایای ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که هر نگاشت کاملاً مثبت و حافظ اثر را می‌توان به صورت (۱) نیز نوشت.

[۳] Completely positive trace-preserving