مدرس: ابوالفتح بیگی و امین زاده گوهری نویسنده: کامران کیخسروی

جلسه ۱۳

۱ بازنویسی اصول مکانیک کوانتم برحسب ماتریس‌های چگالی

در جلسه قبل دیدیم که برای هر بردار واحد $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ماتریس چگالی[۱] متناظر آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|.$$

این ماتریس دو خاصیت دارد: $\rho \geq 0$ و $\mathrm{tr}(\rho) = 1$. در حالت کلی عملگر $\rho \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$ یک ماتریس چگالی نامیده می‌شود اگر این دو خاصیت را داشته باشد. چنین ماتریس‌هایی متناظر با حالات هنگردها هستند. همچنین دیدیم که اندازه‌گیری و تحول زمانی را می‌توان بر حسب ماتریس‌های چگالی نوشت. لذا اصول مکانیک کوانتم را می‌توان به جالی بردارها برحسب ماتریس‌های چگالی بازنویسی کرد:

- **اصل اول: فضای حالات:** به هر سیستم فیزیکی یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ متناظر است و حالت سیستم در هر لحظه با یک ماتریس چگالی $\rho \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$ مشخص می‌شود.

- **اصل دوم : اندازه‌گیری:** اندازه‌گیری یک سیستم فیزیکی با عمگرهای $\{M_1, \dots, M_k\}$ مشخص می‌شود بطوریکه $\sum_i M_i^\dagger M_i = I$.[۲] اگر حالت سیستم ρ باشد، حاصل اندازه‌گیری با احتمال $p(i) = \mathrm{tr}\left(M_i^\dagger M_i \rho\right)$ برابر i است. در صورتی که نتیجه‌ی اندازه‌گیری را مشاهده کنیم (و آن i باشد) حالت سیستم به

$$\frac{1}{p(i)} M_i \rho M_i^\dagger = \frac{1}{\mathrm{tr}\left(M_i^\dagger M_i \rho\right)} M_i \rho M_i^\dagger$$

سقوط می‌کند. در صورتی که نتیجه‌ی اندازه‌گیری را مشاهده نکنیم، حالت سیستم متناظر با هنگرد $\{p(i); \frac{1}{p(i)} M_i \rho M_i^\dagger\}$ است و ماتریس چگالی $\sum_i M_i \rho M_i^\dagger$.

- **اصل سوم: تحول زمانی:** تحول زمانی یک سیستم فیزیکی با یک عملگرهای یکانی مشخص می‌شود. اگر حالت سیستم در زمان t_0، ρ و در زمان t_1، σ باشد، عملگر یکانی U وجود دارد که $\sigma = U\rho U^\dagger$.

[۱] Density matrix
[۲] Completeness condition

- **اصل چهارم: سیستم‌های ترکیبی:** فضای هیلبرت یک سیستم ترکیبی از ضرب تانسوری فضای هیلبرت متناظر با اجزای آن بدست می‌آید. درحالت خاص اگر زیرسیستم‌ها از هم مجزا باشند و زیرسیستم i ام در حالت ρ_i باشد آنگاه کل سیستم در حالت $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \ldots \otimes \rho_l$ می‌باشد.

تمرین ۱ نشان دهید که اگر ρ و σ ماتریس چگالی باشند $\rho \otimes \sigma$ نیز ماتریس چگالی است.

۲ تمیز دادن حالات کوانتمی

فرض کنید پیغام j در یک سیستم فیزیکی با حالت ρ_j کد شود. همچنین فرض کنید احتمال اینکه پیغام j باشد برابر p_j باشد. برای کدگشایی بر روی سیستم یک اندازه‌گیری انجام می‌دهیم. اگر حاصل اندازه‌گیری j بود پیغام را j در نظر می‌گیریم[۳]. در این مسأله از آنجا که تغییر حالت سیستم بعد از اندازه‌گیری برای ما مهم نیست از فرمول بندی POVM استفاده می‌کنیم. پس فرض کنید که اندازه‌گیری POVM $\{E_1, \ldots, E_k\}$ را انجام می‌دهیم و اگر حاصل اندازه‌گیری i شد، حدس می‌زنیم که سیستم در حالت ρ_i بوده است. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}\Pr(\text{حدس درست}) &= \sum_{i=1}^{k} \Pr(\text{پیغام } i \text{ انتخاب شده باشد}) \cdot \Pr(\text{حدس درست} \mid \text{پیغام } i \text{ انتخاب شده باشد}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} p_i \, \mathrm{tr}(E_i \rho_i).\end{aligned}$$

بنابراین برای حل مسأله تمیز دادن حالات کوانتمی باید مسأله بهینه‌سازی زیر را حل کنیم:

$$\max_{\{E_i\}} \sum_{i=1}^{k} p_i \mathrm{tr}(E_i \rho_i)$$

که در آن $E_i \geq 0$ و $\sum_i E_i = I$.

و در صورتی که توزیع احتمال یکنواخت باشد مسئله به صورت زیر در می‌آید:

$$\max_{\{E_i\}} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{tr}(E_i \rho_i)$$

حل این مساله در حالت کلی کار دشواری است. اما برای حالت خاص $k = 2$ می‌توان آن را حل کرد که آن را در جلسات آینده خواهیم دید.

[۳] ممکن است به ذهن برسد که می‌توانیم ابتدا یک تحول زمانی روی سیستم انجام دهیم و بعد اندازه‌گیری کنیم یا اینکه دو یا چند اندازه‌گیری پشت سر هم انجام دهیم و برحسب حاصل همه‌ی اندازه‌گیری‌های پیغام را حدس بزنیم. اما در جلسات بعد خواهیم دید که همه‌ی این‌ها را می‌توان با یک اندازه‌گیری مدل کرد

۱.۲ حداکثر تعداد پیغام‌های قابل ارسال با شرط کدگشایی بدون خطا

سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که با فرض اینکه در گیرنده بتوانیم پیغام‌ها را بدون خطا آشکارسازی کنیم حداکثر چند پیام را می‌توان کد کرد. برای اینکه بتوانیم به مسئله بالا پاسخ گوییم به چند لم نیاز داریم که در پیوست آمده است و خواننده می‌تواند هنگام نیاز به صورت و اثبات آنها رجوع کند. با فرض اینکه توزیع پیغام‌ها یکنواخت باشد و بخواهیم کدگشایی با احتمال یک درست انجام شود خواهیم داشت:

$$\Pr(\text{حدس درست}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} \operatorname{tr}(E_i\rho_i) = k$$

اما مطابق با لم ۵ از پیوست می‌دانیم $\operatorname{tr}(E_i\rho_i) \leq 1$. پس باید داشته باشیم:

$$\operatorname{tr}(E_i\rho_i) = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tr}(E_i\rho_i) = \operatorname{tr}(\rho_i) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tr}(\rho_i - E_i\rho_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tr}((I - E_i)\rho_i) = 0$$

اما می‌دانیم که ماتریس‌های ρ_i و $I - E_i = \sum_{j\neq i} E_j$ مثبت نیمه معین هستند. پس مطابق لم ۷ از پیوست داریم:

$$(I - E_i)\rho_i = 0 \quad \Rightarrow \quad E_i\rho_i = \rho_i$$

حال توجه کنید که

$$\sum_{i=1}^{k} E_i = I \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} E_i\rho_j = \rho_j \quad \Rightarrow \quad \sum_{i\neq j} E_i\rho_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i\neq j} \operatorname{tr}(E_i\rho_j) = 0$$

پس با توجه به این که $\operatorname{tr}(E_i\rho_j) \geq 0$ داریم

$$\forall i \neq j : \operatorname{tr}(E_i\rho_j) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_i\rho_j = \rho_j E_i = 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall\ i \neq j \ \ \rho_i\rho_j = \rho_i I \rho_j = \sum_{l=1}^{k} \rho_i E_l \rho_j = 0$$

نتیجه این که می‌توان کدگشایی بدون خطا داشت فقط اگر تمامی ماتریس‌های چگالی دو به دو برهم عمود باشند ($\rho_i\rho_j = 0$ برای هر $i \neq j$). حال می‌خواهیم ببینیم حداکثر چند ماتریس چگالی با این خاصیت در یک فضای بعدی می‌توان داشت. اگر فضای پشتیبان[۴] یک ماتریس چگالی را برد آن به عنوان یک عملگر در نظر بگیریم:

$$Supp(\rho) = \{\rho|v\rangle : |v\rangle \in \mathcal{H}_d\}.$$

آن وقت لم ۸ نتیجه می‌دهد که ماتریس‌های چگالی ρ_i و ρ_j بر هم عمودند اگر و فقط اگر فضای پشتیبان آنها دو زیرفضای برداری عمود بر هم باشند. در نتیجه کدگشایی بدون خطا امکان‌پذیر است فقط اگر زیرفضاهای $Supp(\rho_i)$ دو به دو بر هم عمود باشند. از آنجا که بعد کل فضا d تعداد این زیرفضاها و در نتیجه تعداد ρ_iها نمی‌تواند از d بیشتر شود. بنابراین برای اینکه کدگشایی را بتوانیم بدون خطا انجام دهیم تعداد پیغام‌ها نباید بیشتر از بعد فضا باشد.

[۴] Support

تمرین ۲ نشان دهید بعد $Supp(\rho)$ برابر با $rank\,\rho$ است.

دیدیم که در صورتی که بخواهیم کدگشایی بدون خطا داشته باشیم باید ماتریس‌های چگالی ρ_i دو به دو بر هم عمود باشند. حال می‌خواهیم عکس این قضیه را بررسی کنیم. یعنی با فرض $\rho_i\rho_j = 0$ نشان می‌دهیم کدگشایی بدون خطا امکان‌پذیر است. برای این کار باید یک اندازه‌گیری معرفی کنیم که احتمال خطا را صفر کند. عملگرهای این اندازه‌گیری در واقع عملگر تصویر بر روی زیرفضای پشتیبان ρ_iها هستند.

هر ماتریس چگالی ρ_j در یک پایه‌ی متعامد یکه قطری می‌شود:

$$\rho_j = \sum_m p_m^j |\psi_m^j\rangle\langle\psi_m^j|$$

که در آن فرض می‌کنیم $p_m^j > 0$ ناصفر هستند. حال Q_j را عملگر تصویر روی زیرفضای $Supp(\rho_j)$ یا به عبارت دیگر زیرفضای تولید شده توسط بردارهای $\{|\psi_m^j\rangle\}$ تعریف می‌کنیم. یعنی

$$Q_j = \sum_m |\psi_m^j\rangle\langle\psi_m^j| \quad \Rightarrow \quad Q_j\rho_j = \rho_j$$
$$\Rightarrow \quad \mathrm{tr}(Q_j\rho_j) = \mathrm{tr}(\rho_j) = 1$$

واضح است که Q_j مثبت نیمه معین است.

حال باید شرط تمامیت را برای ماتریس‌های Q_j بررسی کرد. با توجه به شرط $\rho_i\rho_j = 0$ برای هر $i \neq j$ بردارهای $\{|\psi_m^j\rangle\ :\ j, m\}$ دو به دو بر هم عمودند. پس می‌توان این بردارها را با اضافه کردن بردارهای $|v_r\rangle$ به پایه‌ای متعامد یکه برای کل فضا تعمیم داد. داریم:

$$I = \sum_{j,m} |\psi_m^j\rangle\langle\psi_m^j| + \sum_r |v_r\rangle\langle v_r| = \sum_j Q_j + \hat{Q}$$

که در آن $\hat{Q} = \sum_r |v_r\rangle\langle v_r|$ مثبت نیمه معین است. پس $\{Q_1, \ldots, Q_k, \hat{Q}\}$ یک اندازه‌گیری تصویری تشکیل می‌دهد. با انجام این اندازه‌گیری روی ρ_j حاصل همواره Q_j خواهد بود.

بنابراین شرط لازم و کافی برای کدگشایی بدون خطا متعامد بود ماتریس‌ها چگالی است.

تمرین ۳ فرض کنید حالت سیستم ρ باشد و اندازه‌گیری تصویری $\{Q_1, \ldots, Q_k\}$ را انجام دهیم. نشان دهید اگر حاصل اندازه‌گیری همواره j باشد آنگاه حالت سیستم بعد از اندازه‌گیری تغییری نمی‌کند.

تمرین ۴ فرض کنید به شما یک کیوبیت داده شده است که در یکی از دو حالت $|\phi\rangle = |0\rangle$ یا

$$|\psi\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$$

آماده‌سازی شده است. فرض کنید شما قصد دارید آزمایشی طراحی کنید تا این دو حالت را از هم به بهترین نحو تمیز دهید. دو آزمایش زیر را در این رابطه با هم مقایسه کرده و نتیجه را توجیه کنید. دو اندازه‌گیری زیر را برای تمیز دادن این دو حالت مقایسه کنید.

(الف) اندازه‌گیری در پایه‌ی $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

(ب) اندازه‌گیری را در پایه $\{\cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)|1\rangle, \sin(\theta/2)|0\rangle - \cos(\theta/2)|1\rangle\}$ انجام دهید. توجه کنید که این پایه نسبت به متوسط حالت‌های داده شده متقارن می‌باشد.

پیوست

در این پیوست چند لم مورد نیاز در متن را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم ۵ برای هر اندازه‌گیری $\{M_1, \ldots, M_k\}$ و هر ماتریس چگالی ρ داریم $tr(M_i^\dagger M_i \rho) \leq 1$

اثبات:

$$\sum_{i=1}^{k} {M_i}^\dagger M_i = I \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} \langle\psi|{M_i}^\dagger M_i|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} \|M_i|\psi\rangle\|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \|M_i|\psi\rangle\|^2 \leq 1$$

می‌دانیم که ρ در کلی‌ترین حالت برابر است با $\sum_{i=1}^{m} p_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ که p_j یک توزیع احتمال است. داریم:

$$\forall j, \mathrm{tr}(M_i^\dagger M_i|\psi_j\rangle\langle\psi_j|) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_j p_j \mathrm{tr}(M_i^\dagger M_i|\psi_j\rangle\langle\psi_j|) \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tr}(M_i^\dagger M_i \rho) \leq 1.$$

□

لم ۶ برای هر ماتریس مثبت نیمه معین T اگر $\langle v|T|v\rangle = 0$ آن گاه داریم $T|v\rangle = 0$.

اثبات: فرض کنید: $T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i|w_i\rangle\langle w_i|$ که در آن λ_i نامنفی هستند. در این صورت:

$$0 = \langle v|T|v\rangle = \langle v|(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i|w_i\rangle\langle w_i|)|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\langle v|w_i\rangle\langle w_i|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\|\langle v|w_i\rangle\|^2 \geq 0$$

روابط بالا نتیجه می‌دهد برای هر i :

$$\lambda_i|\langle w_i|v\rangle|^2 = 0$$

پس برای هر i یا $\lambda_i = 0$ یا $\langle v_i|v\rangle = 0$ در نتیجه برای هر i:

$$\lambda_i|w_i\rangle\langle w_i|v\rangle = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_i \lambda_i|w_i\rangle\langle w_i|v\rangle = (\sum_i \lambda_i|w_i\rangle\langle w_i|)|v\rangle = T|v\rangle = 0.$$

□

لم ۷ برای دو عملگر مثبت نیمه معین S,T اگر داشته باشیم $tr(ST)=0$ آنگاه داریم : $ST=TS=0$

اثبات: پایه‌ای که S در آن قطری می‌شود را در نظر می‌گیریم:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|v_i\rangle\langle v_i|.$$

پس

$$0=\mathrm{tr}(ST)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\langle v_i|T|v_i\rangle.$$

از مثبت نیمه معین بودن ماتریس‌ها می‌دانیم که در جمع بالا تمامی جملات نامنفی هستند و بنابران باید تک تک آن‌ها برابر با صفر باشد. یعنی:

$$\forall i,\quad \lambda_i\langle v_i|T|v_i\rangle=0$$

$$\Rightarrow \forall i,\quad \lambda_i=0 \ \text{یا}\ \langle v_i|T|v_i\rangle=0$$

حال با استفاده از لم ۶ داریم:

$$\forall i,\quad \lambda_i=0 \ \text{یا}\ \ T|v_i\rangle=0 \quad (\Rightarrow \quad \langle v_i|T=0).$$

در نتیجه

$$ST=(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|v_i\rangle\langle v_i|)T=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|v_i\rangle(\langle v_i|T)=0.$$

به صورت مشابه می‌توان نشان داد که $TS=0$. □

لم ۸ ماتریس‌های چگالی ρ و σ بر هم عمودند اگر و فقط اگر فضای پشتیبان آنها دو زیرفضای برداری عمود بر هم باشند.

اثبات: اگر $\rho\sigma=0$ آنوقت برای هر دو بردار دلخواه $|v\rangle$ و $|w\rangle$

$$(\rho|v\rangle,\sigma|w\rangle)=\langle v|\rho^\dagger\sigma|w\rangle=\langle v|\rho\sigma|w\rangle=0.$$

برعکس اگر برای هر دو بردار دلخواه $|v\rangle$ و $|w\rangle$ داشته باشیم $(\rho|v\rangle,\sigma|w\rangle)=0$ آنگاه $\langle v|\rho\sigma|w\rangle=0$. حال توجه کنید که اگر $\{|v_1\rangle,\dots,|v_d\rangle\}$ پایه‌ای متعامد یکه برای فضا باشد $\langle v_i|\rho\sigma|v_j\rangle=0$ درایه‌ی ij-ام ماتریس نمایش $\rho\sigma$ در این پایه است. پس $\rho\sigma=0$.

□