مدرسین: ابوالفتح بیگی و امین زاده گوهری
نویسنده: الینکا بدرویا

جلسه ۱۸

جلسه‌ی قبل ثابت کردیم هر نگاشت کاملا مثبت و حافظ اثر را می‌توان به صورت

$$\Phi(X) = \sum_k M_k X M_k^\dagger$$

نوشت. در روند اثبات از

$$\sigma_{SE} = \Phi \otimes \mathcal{I}_E(|\alpha\rangle\langle\alpha|)$$

استفاده کردیم که در آن

$$|\alpha\rangle_{SE} = \sum_{i=0}^{d-1} |i\rangle_S |i\rangle_E.$$

در نتیجه

$$\sigma_{SE} = \Phi_S \otimes \mathcal{I}_E(|\alpha\rangle\langle\alpha|_{SE}) = \sum_{i,j=0}^{d-1} \Phi_S(|i\rangle\langle j|)_S \otimes |i\rangle\langle j|_E.$$

توجه کنید که $\{|i\rangle|j\rangle : \quad 0 \leq i, j \leq d-1\}$ یک پایه برای فضای $\mathbf{L}(\mathcal{H}_S)$ است، و اگر فرم بلوکی σ_{SE} را در نظر بگیریم، بلوک ij-ام برابر $\Phi(|i\rangle|j\rangle)$ است. نتیجه این که $\Phi \otimes \mathcal{I}(|\alpha\rangle\langle\alpha|)$ به نوعی عملگر Φ را در خود «کد» کرده است.

در حالت کلی به

$$J(\Phi) = \Phi \otimes \mathcal{I}(|\alpha\rangle\langle\alpha|)$$

نمایش Choi-Jamiołkowski متناظر با نگاشت Φ گویند.

تمرین ۱ نشان دهید برای هر ρ داریم

$$\Phi(\rho_S) = tr_E\left(J(\Phi)_{SE} I_S \otimes \rho_E^T\right)$$

که در آن ρ^T ترانهاده‌ی ماتریس ρ نسبت به پایه‌ی $\{|0\rangle, \ldots, |d-1\rangle\}$ است.

تمرین ۲ نشان دهید

$$\Phi(\rho_{S'}) = (I_S \otimes \langle\alpha|_{ES'})(J(\Phi)_{SE} \otimes \rho_{S'})(I_S \otimes |\alpha\rangle_{ES'}).$$

نکته ۳ تا کنون دینامیک‌های کوانتمی را به عنوان نگاشت‌هایی از حالات یک سیستم کوانتمی به خودش در نظر گرفتیم. ولی در حالت کلی یک نگاشت کوانتمی ممکن است یک سیستم کوانتمی S را به سیستم متفاوت S' بنگارد:

$$\Phi : \mathbf{L}(\mathcal{H}_S) \to \mathbf{L}(\mathcal{H}_{S'}).$$

گاهی برای مشخص شدن سیستم ورودی و خروجی یک دینامیک از نماد $\Phi_{S\to S'}$ استفاده می‌شود.

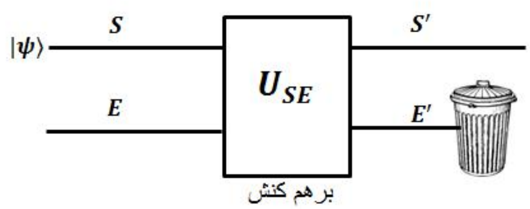
با این تعمیمی همچنان همه قضایایی که گفته شد برقرار می‌باشند. برای هر نگاشت کاملا مثبت و حافظ اثر $\Phi_{S\to S'}$ عملگرهای $M_i : \mathcal{H}_S \to \mathcal{H}_{S'}$ وجود دارند به طوری که

$$\Phi(\rho) = \sum_i M_i \rho M_i^\dagger$$

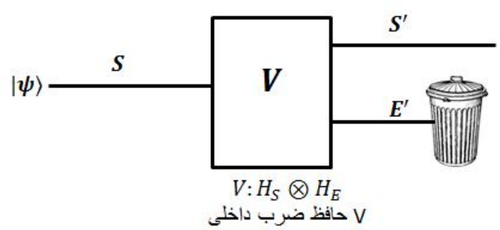
و $\sum_i M_i^\dagger M_i = I_S$. به همین ترتیب ایزومتری $V_{S\to S'E}$ وجود دارد که

$$\Phi(\rho) = \mathrm{tr}_E(V\rho V^\dagger).$$

نمودار: برهم‌کنش سیستم S با محیط اطرافش توسط نمودار زیر نشان داده می‌شود:



همان‌طور که قبلا هم اشاره شد حالت اولیه‌ی محیط اطراف (E) در واقع ثابت فرض می شود و تاثیری ندارد. بنابراین در این نمودار می‌توان یکانی U را با یک ایزومتری V جایگزین کرد.



نکته ۴ در نمودار فوق ایزومتری V سیستم S را به سیستم ترکیبی $S'E'$ می‌نگارد $|\psi\rangle \mapsto V|\psi\rangle$. از آنجا که $V^\dagger V = I_S$ با دسترسی به $S'E'$ می‌توان حالت اولیه‌ی $|\psi\rangle$ را بازیابی کرد. در واقع هر گونه اطلاعاتی که بتوان از $|\psi\rangle$ دریافت کرد، قابل بازیابی از $V|\psi\rangle$ نیز هست. با این دید نویزی که در اطلاعات پس از رد شدن از یک «کانال» کوانتمی به وجود می‌آید در واقع ناشی از دسترسی نداشتن به بخشی از اطلاعات E' است. با دسترسی به S' (یا E') به تنهایی نمی‌توان اطلاعات را بازیابی کرد و $S'E'$ با هم شامل همه‌ی اطلاعات S هستند.

نکته ۵ بسته به شرایط مساله یک دینامیک کوانتمی، «نگاشت کوانتمی»، «نگاشت کاملا مثبت و حافظ اثر» و «کانال کوانتمی» خوانده می‌شود.

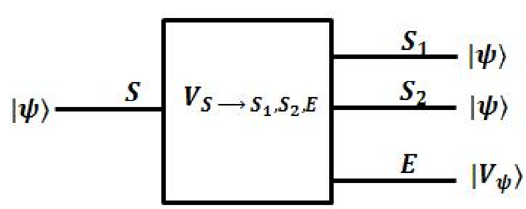
۱ کپی کوانتومی

در این بخش ثابت می‌کنیم کپی کوانتومی نداریم.[۱] به این معنا که با داشتن یک سیستم S در حالت دلخواه و نامعلوم $|\psi\rangle_S$ نمی‌توان سیستمی ترکیبی در حالت $|\psi\rangle_{S_1}|\psi\rangle_{S_2}$ ساخت.

فرض کنید چنین نباشد. یعنی دینامیک کوانتمی Φ وجود داشته باشد به طوری که

$$\forall\psi : \qquad \Phi(|\psi\rangle\langle\psi|_S) = |\psi\rangle\langle\psi|_{S_1} \otimes |\psi\rangle\langle\psi|_{S_2}.$$

برای این دینامیک کوانتمی ایزومتری $V_{S\to S_1S_2E}$ وجود دارد به طوری که $\Phi(\rho) = \mathrm{tr}_E(V\rho V^\dagger)$.



در این صورت برای هر $|\psi\rangle$، $V|\psi\rangle$ برداری است که بردار کاهیده‌ی آن روی S_1S_2 محض و در حالت $|\psi\rangle_{S_1}|\psi\rangle_{S_2}$ است. و از آنجا که کل $V|\psi\rangle$ نیز محض است باید داشته باشیم

$$V|\psi\rangle = |\psi\rangle_{S_1}|\psi\rangle_{S_2}|v_\psi\rangle_E$$

که $|v_\psi\rangle$ برداری مرتبط با $|\psi\rangle$. در اینجا ما در واقع از تمرین زیر استفاده کرده‌ایم.

تمرین ۶ فرض کنید که ρ_{AB} ماتریس چگالی باشد که $\rho_A = tr_B(\rho_{AB}) = |v\rangle\langle v|_A$ محض است. موارد زیر را ثابت کنید.

[۱] No-cloning Theorem

۱. نشان دهید که $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B = |v\rangle\langle v|_A \otimes \rho_B$

۲. نشان دهید که اگر ρ_{AB} محض باشد آنگاه ρ_B نیز محض است.

حال با توجه به این که V حافظ ضرب داخلی است برای هر $|\psi\rangle$ و $|\psi'\rangle$ داریم:

$$\langle\psi|\psi'\rangle = (|\psi\rangle|\psi\rangle|v_\psi\rangle, |\psi'\rangle|\psi'\rangle|v_{\psi'}\rangle) = \langle\psi|\psi'\rangle^2\langle v_\psi|v_{\psi'}\rangle.$$

اگر ضرب داخلی $\langle\psi|\psi'\rangle$ ناصفر و مخالف 1 باشد خواهیم داشت:

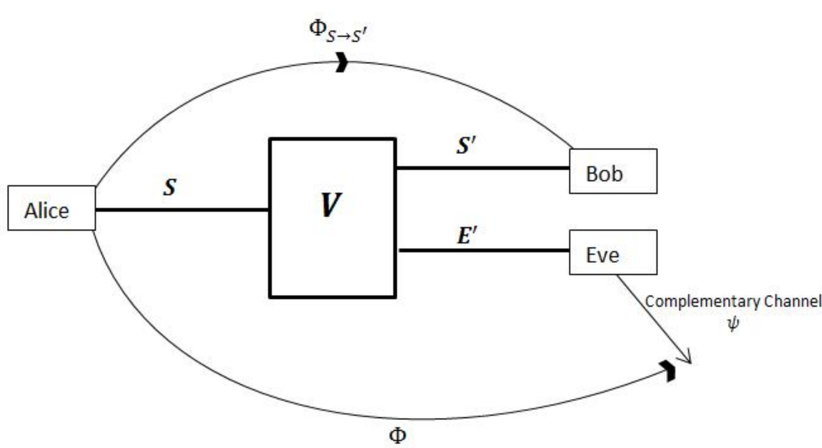
$$1 = \langle\psi|\psi'\rangle\langle v_\psi|v_{\psi'}\rangle.$$

اما می دانیم که $|\langle v_\psi|v_{\psi'}\rangle| \leq 1$ و $|\langle\psi|\psi'\rangle| < 1$ بنابراین حاصلضرب آنها نمی تواند 1 باشد که تناقض است. پس کپی کوانتمی امکان‌پذیر نیست.

توجه کنید که در اینجا فرض کردیم که هدف کپی کردن حالت «دلخواه» یک سیستم است.

ظرفیت کوانتمی: قضیه‌ی No-cloning کاربردهای زیادی دارد که یکی از آنها محاسبه‌ی ظرفیت کوانتمی بعضی از کانال‌هاست. برای هر کانال $\Phi_{S\to S'}(\rho) = \mathrm{tr}_E(V\rho V^\dagger)$ می‌توان کانال دیگری به صورت $\Phi'_{S\to E}(\rho) = \mathrm{tr}_{S'}(V\rho V^\dagger)$ تعریف کرد که به آن complementary channel گفته می‌شود.

فرض کنید که آلیس برای فرستادن پیغامی به باب از کانال $\Phi_{S\to S'}$ استفاده کند و فرض کنید هنگام فرستادن پیغام، ایو سیستم E را دریافت کند. یعنی آلیس هنگام استفاده از کانال، $\Phi'_{S\to E}(\rho)$ را نیز برای ایو می‌فرستد. حال فرض کنید که V به نحوی باشد که ایو بتواند سیستمی را که باب دریافت می‌کند شبیه‌سازی کند. به این معنی که Ψ وجود داشته باشد به طوری که $\Phi(\rho) = \Psi \circ \Phi'(\rho)$. در این صورت ظرفیت «کوانتمی» کانال Φ باید صفر باشد. اگر آلیس بتواند پیغامی کوانتمی را از طریق این کانال برای باب بفرستد، با توجه به فرض فوق ایو هم می‌تواند همان پیغام را دریافت کند. انگاری پیغام آلیس کپی می‌شود که با قضیه‌ی فوق در تناقض است.



مثال ۷ کانالی را در نظر بگیرید که با ورودی ρ خروجی آن با احتمال p حالت $|0\rangle$ و با احتمال $(1-p)$ خود ρ باشد. در این صورت

$$\Phi(\rho) = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)\rho.$$

تمرین ۸ بررسی کنید که Φ تعریف شده در مثال فوق کاملا مثبت و حافظ اثر است. این کانال را به صورت $\sum_i M_i \rho M_i^\dagger$ باز نویسی کنید.

مثال ۹ نگاشت $\Phi(X) = tr(X)|0\rangle\langle 0|$ کاملا مثبت و حافظ اثر است. توجه کنید که

$$\begin{aligned}\Phi(X) &= tr(X)|0\rangle\langle 0| \\ &= \sum_i \langle i|X|i\rangle |0\rangle\langle 0| \\ &= \sum_i |0\rangle\langle i|X|i\rangle\langle 0|.\end{aligned}$$

در نتیجه $\Phi(X) = \sum_i M_i X M_i^\dagger$ که در آن $M_i = |0\rangle\langle i|$.

تمرین ۱۰ فرض کنید $\Phi(\rho) = \sum_i M_i \rho M_i^\dagger$ و $\Psi(\sigma) = \sum_j N_j \sigma N_j^\dagger$ دو نگاشت کوانتمی باشند. نشان دهید که $\Psi \circ \Phi$ نیز یک نگاشت کوانتمی است و عملگرهای *Kraus* مربوط به آن را بیابید.

مثال ۱۱ تعریف کنید

$$\mathbf{\Phi}\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}.$$

برای بررسی کوانتومی بودن یا نبودن این نگاشت باید بررسی شود که آیا کاملا مثبت و حافظ اثر است. برای این کار می‌توان از قضیه‌ی مربوط با نگاشت‌های کوانتمی استفاده کرد. توجه کنید که

$$\Phi(X) = |0\rangle\langle 0|X|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|X|1\rangle\langle 1|.$$

پس اگر قرار دهیم $M_i = |i\rangle\langle i|$ برای $i = 0, 1$ آنگاه $\Phi(X) = M_0 X M_0^\dagger + M_1 X M_1^\dagger$ پس Φ کاملا مثبت است. همچنین داریم $M_0^\dagger M_0 + M_1^\dagger M_1 = I$. پس Φ حافظ اثر است.

تمرین ۱۲

۱. نشان دهید که هر عملگر دلخواه $\Phi : \mathbf{L}(\mathcal{H}) \to \mathbf{L}(\mathcal{H})$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Phi(X) = \sum_i A_i X B_i.$$

۲. نشان دهید که اگر عملگر Φ حافظ هرمیتی باشد (عملگرهای هرمیتی را به عملگرهای هرمیتی ببرد) آنگاه می‌توان آن را به صورت

$$\Phi(X) = \sum c_i A_i X A_i^\dagger,$$

نوشت که در آن $c_i \in \mathbb{R}$.

۳. حال اگر عملگر Φ کاملا مثبت هم باشد آنگاه در عبارت بالا می‌توان فرض کرد $c_i \geq 0$.

مثال ۱۳ به راحتی می‌توان بررسی کرد که برای دو کانال کوانتومی Φ_0, Φ_1 داشته باشیم هر ترکیب خطی محدبشان

$$\Phi = p\Phi_0 + (1-p)\Phi_1$$

هم کانال کوانتومی است. حال ترکیب دیگری از Φ_0, Φ_1 را در نظر می‌گیریم. فرض کنید که ورودی کانالی شامل دو سیستم باشد: سیستم دلخواه S و کیوبیت R. کانال به این صورت عمل می‌کند که با ورودی ρ_{SR} کیوبیت R را در پایه‌ی استاندارد اندازه‌گیری می‌کند.اگر حاصل اندازه‌گیری i بود کانال Φ_i را روی سیستم S اعمال می‌کند. به عنوان تمرین نشان دهید که این کانال برابر است با

$$\Psi(\rho_{SR}) = \Phi_0((I_S \otimes \langle 0|_R)\rho_{SR}(I_S \otimes |0\rangle_R)) + \Phi_1((I_S \otimes \langle 1|_R)\rho_{SR}(I_S \otimes |1\rangle_R)).$$

مثال ۱۴ کانال کلاسیکی را در نظر بگیرید که ورودی $x \in \{x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}\}$ را به $f(x) \in \{y_0, \ldots, y_{d'-1}\}$ می‌نگارد. دو فضای هیلبرت با پایه‌های متعامد یکه‌ی $\{|x_0\rangle, \ldots, |x_{d-1}\rangle\}$ و $\{|y_0\rangle, \ldots, |y_{d'-1}\rangle\}$ در نظر گرفته و تعریف کنید $M_t = |f(t)\rangle\langle t|$. قرار دهید $\Phi(\rho) = \sum_t M_t \rho M_t^\dagger$. توجه کنید که $\sum_t M_t^\dagger M_t = I$. پس Φ یک کانال کوانتمی است. از طرف دیگر برای هر x داریم

$$\Phi(|x\rangle\langle x|) = |f(x)\rangle\langle f(x)|.$$

نتیجه این که کانال‌های کلاسیک را هم می‌توان با فرمول‌بندی کوانتمی بازنویسی کرد.

در اینجا ما فرض کردیم که خروجی کانال تابعی از ورودی است. به راحتی قابل بررسی است که در حالت کلی اگر صرفا توزیع احتمال خروجی به ورودی کانال بستگی داشته باشد باز هم طبق فرمول‌بندی کوانتمی قابل بازنویسی است.

مثال ۱۵ (کانال کلاسیک-کوانتم) کانالی با سیستم ورودی X و سیستم خروجی A در نظر بگیرید. ورودی ρ_X در پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|0\rangle, \ldots, |d-1\rangle\}$ اندازه‌گیری می‌شود. اگر حاصل اندازه‌گیری i بود آنگاه خروجی کانال برابر $\tau_i \in \mathbf{L}(\mathcal{H}_A)$ است. در واقع خروجی کانال متناظر با هنگرد $\{\langle i|\rho|i\rangle, \tau_i\}$ است. به عبارت دیگر این کانال برابر است با

$$\Phi(\rho) = \sum_{i=0}^{d-1} \langle i|\rho|i\rangle \tau_i.$$

به کانالی که فرم فوق را داشته باشد کانال کلاسیک-کوانتم گفته می‌شود زیرا ورودی آن بلافاصله در یک پایه‌ی متعامد یکه اندازه‌گیری می‌شود و خروجی فقط به توزیع احتمال حاصل اندازه‌گیری مربوط است. گویی ورودی کانال یک توزیع احتمال و کلاسیک است.

تمرین ۱۶ کانال مثال ۱۵ را به صورت $\sum_k M_k \rho M_k^\dagger$ بنویسید.

مثال ۱۷ (کانال کوانتم-کلاسیک) کانالی با سیستم ورودی A و سیستم خروجی X در نظر بگیرید. ورودی ρ_A با اندازه‌گیری *POVM* $\{E_1, \dots, E_k\}$ اندازه‌گیری می‌شود. اگر حاصل اندازه‌گیری i بود آنگاه خروجی کانال برابر $|i\rangle$ است. در واقع خروجی کانال متناظر با هنگرد $\{tr(E_i\rho), |i\rangle\}$ است. به عبارت دیگر این کانال برابر است با

$$\Phi(\rho) = \sum_{i=1}^{k} tr(E_i\rho)|i\rangle\langle i|.$$

به کانالی که فرم فوق را داشته باشد کانال کوانتم-کلاسیک گفته می‌شود زیرا خروجی آن در پایه‌ی استاندارد $\{|1\rangle, \dots, |k\rangle\}$ قطری است.

تمرین ۱۸ کانال مثال ۱۷ را به صورت $\sum_k M_k\rho M_k^\dagger$ بنویسید.

مثال ۱۹ (*entanglement-breaking channel*) این مثال در واقع تعمیمی از دو مثال قبل است. فرض کنید ورودی ρ_A تحت *POVM* $\{E_1, \dots, E_k\}$ اندازه‌گیری شود و اگر حاصل اندازه‌گیری i بود خروجی کانال τ_i باشد. این کانال برابر است با

$$\Phi(\rho_A) = \sum_{i=1}^{k} tr(E_i\rho_A)\tau_i.$$

دلیل نامگذاری این کانال این است که اگر ρ_{AB} حالتی دلخواه (و احتمالا درهم‌تنیده) باشد، آنگاه $\Phi \otimes \mathcal{I}_B(\rho_{AB})$ همواره جدایی‌پذیر است (این خاصیت را به عنوان تمرین ثابت کنید). به طور خاص $J(\Phi)$ جدایی پذیر است.