مدرسین: ابوالفتح بیگی و امین‌زاده گوهری نویسنده: محمدمهدی مجاهدیان

جلسه ۱۹، ۲۰

در این جلسه می‌خواهیم معیاری برای تعیین میزان نزدیکی دو حالت کوانتمی معرفی کنیم. بنابراین نیاز داریم تا متری روی فضای حالات کوانتمی تعریف کرده به‌طوری‌که با استفاده از آن بتوانیم تشخیص دهیم دو حالت کوانتمی تا چه حد شبیه هم هستند.

مطابق با اصل اول مکانیک کوانتمی، هر سیستم کوانتمی متناظر با یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است و حالات آن سیستم با ماتریس‌های چگالی $\rho \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$ نمایش داده می‌شوند. روی فضای $\mathbf{L}(\mathcal{H})$ (فضای برداری متناهی بُعد با ضرب داخلی) نُرم‌های زیادی قابل تعریف هستند. برای هر $1 \leq p \leq \infty$ و $\mu \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$ (که لزوما یک عملگر چگالی نیست) تعریف کنید:

$$\|\mu\|_p := \left(\mathrm{tr}(\mu^\dagger \mu)^{p/2}\right)^{1/p}.$$

در این صورت $d_p(\rho, \sigma) = \|\rho - \sigma\|_p$ یک متر روی $\mathbf{L}(\mathcal{H})$ و در نتیجه رو فضای حالات کوانتمی خواهد بود که با استفاده از آن می‌توانیم فاصله دو حالت کوانتمی و در نتیجه میزان شباهت آن‌ها به هم را تعیین کنیم. برای $p = 2$ این همان متری است که بوسیله‌ی ضرب داخلی فضای $\mathbf{L}(\mathcal{H})$ القاء می‌شود که به آن نُرم هیلبرت–اشمیت[۱] هم می‌گویند. $p = \infty$ نُرم عملگری[۲] را می‌دهد. نامساوی مهمی که برای این نُرم‌ها برقرار است نامساوی هولدر[۳] است. برای هر $1 \leq p, q \leq \infty$ که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ داریم:

$$|\mathrm{tr}(\mu_1 \mu_2)| \leq \|\mu_1\|_p \|\mu_2\|_q.$$

با وجود همه‌ی این مترهایی که روی فضای حالات کوانتمی قابل تعریف هستند، به دنبال متری هستیم که «معنای عملگری» [۴] داشته باشد. یعنی اینکه به صورت جواب یک مساله فیزیکی طبیعی و ملموس ظاهر شود، و نه اینکه صرفا بر حسب یک فرمول ریاضی بدون هیچ‌گونه معنی و مفهومی تعریف شده باشد.

۱ فاصله‌ی اثر

اگر دو حالت کوانتمی به هم نزدیک باشند، احتمال اینکه بتوان آنها را از هم تمیز داد کم است. بالعکس اگر دو حالت از هم دور باشند با احتمال زیاد می‌توان آنها را از هم تمیز داد. لذا احتمال تمیز دادن دو حالت کوانتمی معیاری از دوری یا نزدیکی آنهاست. مسأله‌ی تمیز دادن حالات کوانتمی را قبلاً بررسی کردیم.

---

[۱] Hilbert–Schmidt norm
[۲] Operator norm
[۳] Holder's inequality
[۴] Operational meaning

فرض کنید که یک سیستم کوانتمی با احتمال $1/2$ در حالت ρ و با احتمال $1/2$ در حالت σ آماده‌سازی شده است. می‌خواهیم تشخیص دهیم سیستم کوانتمی در کدام حالت است. برای این کار یک اندازه‌گیری دو–دویی روی سیستم انجام می‌دهیم. اگر حاصل اندازه‌گیری 0 شد می‌گوییم سیستم در حالت ρ است، و در غیر این صورت می‌گوییم حالت سیستم σ است. درواقع می خواهیم از بین اندازه گیری‌ها، اندازه‌گیری‌ای را بدست آوریم که بهترین عملکرد را داشته باشد (در تشخیص حالت صحیح سیستم خطای کمتری داشته باشد). از آنجا که در این مسأله فقط احتمالات برای ما مهم هستند، می‌توانیم از فرمول‌بندی POVM برای اندازه‌گیری استفاده کنیم. در نتیجه:

$$\begin{aligned} Pr(\text{تشخیص درست}) &= \max_{0\preceq E_0, E_1:\, E_0+E_1=I} \quad \frac{1}{2}\mathrm{tr}(E_0\rho)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(E_1\sigma) \\ &= \max_{0\preceq E\preceq I} \quad \frac{1}{2}\mathrm{tr}(E\rho)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}((I-E)\sigma) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\max_{0\preceq E\preceq I}\mathrm{tr}(E(\rho-\sigma)). \end{aligned} \tag{۱}$$

پس هر قدر $\max_{0\preceq E\preceq I}\mathrm{tr}(E(\rho-\sigma))$ بزرگتر باشد، احتمال اینکه ρ و σ را از هم تمیز دهیم بیشتر است. بنابراین می‌توانیم این عدد را به عنوان فاصله‌ی این دو حالت تعریف کنیم:

$$D(\rho,\sigma) := \max_{0\preceq E\preceq I}\mathrm{tr}(E(\rho-\sigma)).$$

حال به این سؤال پاسخ می‌دهیم که چگونه می‌توان $D(\rho,\sigma)$ را حساب کرد. این کار را با دو روش در واقع معادل، اما آموزنده، انجام می‌دهیم.

روش اول: می‌دانیم ρ و σ مثبت نیمه معین و درنتیجه هرمیتی هستند. بنابراین $\rho-\sigma$ نیز یک ماتریس هرمیتی است، و در یک پایه‌ی متعامد یکه قطری شدنی است و همه مقادیر ویژه‌ی آن حقیقی هستند. نمایش ماتریسی $\rho-\sigma$ در این پایه‌ی متعامد یکه به صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & -\mu_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -\mu_s \end{pmatrix},$$

که در آن $r+s=d$ و $\lambda_i,\mu_j\geq 0$. یعنی مقادیر ویژه‌ی مثبت و منفی $\rho-\sigma$ را جدا کرده‌ایم. در این صورت اگر عناصر روی قطر E در نمایش ماتریسی برابر باشند با

$$E=\begin{pmatrix} e_1 & & * & * \\ & e_2 & & * \\ * & & \ddots & \\ * & * & & e_{r+s} \end{pmatrix},$$

آنگاه از $0 \le E \le I$ نتیجه می‌شود که $0 \le e_i \le 1$. پس داریم

$$\max_{0\preceq E\preceq I} \mathrm{tr}(E(\rho-\sigma)) \le \max_{0\le e_i\le 1} \sum_{i=1}^{r} e_i\lambda_i - \sum_{j=1}^{s} e_{r+j}\mu_j = \sum_{i=1}^{r}\lambda_i.$$

بعلاوه $\sum_{i=1}^r \lambda_i$ قابل حصول است. کافی است ماتریس E را قطری گرفته و قرار دهیم $e_i = 1$ برای $i \le r$ و $e_i = 0$ برای $i > r$.

بنابراین $D(\rho,\sigma)$ برابر با جمع مقادیر ویژه مثبت $\rho-\sigma$ است. از آنجایی که $\mathrm{tr}(\rho-\sigma)=0$ داریم

$$\sum_{j=1}^{s}\mu_j = \sum_{i=1}^{r}\lambda_i,$$

و در نتیجه $D(\rho,\sigma)$ برابر با نصف مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه $\rho-\sigma$ است.

برای مثال فرض کنید که ρ و σ هم‌زمان در یک پایه‌ی متعامد یکه قطری شوند و مقادیر ویژه آنها به ترتیب p_i و q_i باشند. در این صورت داریم:

$$D(\rho,\sigma) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} |p_i - q_i|.$$

روش دوم: از آنجایی که $\rho-\sigma$ یک ماتریس هرمیتی است. پس در یک پایه‌ی متعامد یکه $\{|v_1\rangle, ..., |v_d\rangle\}$ قطری شدنی است و همه مقادیر ویژه‌ی آن حقیقی هستند:

$$\rho-\sigma = \sum_{i=1}^{r+s}\lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|$$

فرض کنید که $\lambda_1, ..., \lambda_r \ge 0$ و $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_{r+s} < 0$ باشند که در آن $r+s=d$. قرار دهید $\mu_i = -\lambda_{r+i}$. تعریف کنید:

$$S = \sum_{i=1}^{r}\lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|, \qquad T = \sum_{i=1}^{s}\mu_i |v_i\rangle\langle v_i|.$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \rho-\sigma &= S - T,\\ S, T &\succeq 0,\\ ST = TS &= 0,\\ \mathrm{tr}S &= \mathrm{tr}T. \end{aligned}$$

رابطه‌ی اول و دوم طبق تعریف برقرارند، و رابطه‌ی سوم از عمود بودن $|v_i\rangle$ها بدست می‌آید. برای رابطه‌ی چهارم توجه کنید که $\mathrm{tr}S - \mathrm{tr}T = \mathrm{tr}\rho - \mathrm{tr}\sigma = 1-1 = 0$. حال داریم:

$$\begin{aligned}
D(\rho,\sigma) &= \max_{0\preceq E\preceq I} \mathrm{tr}(E(\rho-\sigma)) \\
&= \max_{0\preceq E\preceq I} \mathrm{tr}(E(S-T)) \\
&= \max_{0\preceq E\preceq I} \mathrm{tr}(ES) - \mathrm{tr}(ET) \\
&\leq \max_{0\preceq E\preceq I} \mathrm{tr}(ES) \\
&\leq \mathrm{tr}S.
\end{aligned}$$

در این جا نامساوی اول از $\mathrm{tr}(ET) \geq 0$ که بدلیل اینکه E و T مثبت نیمه معین هستند درست است، نتیجه می‌شود. همچنین نامساوی آخر برقرار است به این دلیل که $0 \preceq E \preceq I$ و در نتیجه $I-E \succeq 0$ پس

$$\mathrm{tr}(S) - \mathrm{tr}(ES) = \mathrm{tr}((I-E)S) \geq 0$$

روش دیگر دیدن درستی این نامساوی این است که

$$\mathrm{tr}(ES) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \langle v_i|E|v_i\rangle \leq \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = \mathrm{tr}S.$$

پس $D(\rho,\sigma) \leq \mathrm{tr}S$. از طرف دیگر برای

$$F = \sum_{i=1}^{r} |v_i\rangle\langle v_i|$$

داریم $FT=0$ و $FS=S$ و همچنین $0 \preceq F \preceq I$. در نتیجه $\mathrm{tr}(F(\rho-\sigma)) = \mathrm{tr}(FS) - \mathrm{tr}(FT) = \mathrm{tr}S$. بنابراین:

$$D(\rho,\sigma) = \mathrm{tr}S.$$

همان‌طورکه قبلاً هم دیدیم

$$\mathrm{tr}S - \mathrm{tr}T = \mathrm{tr}\rho - \mathrm{tr}\sigma = 1-1=0 \Rightarrow \mathrm{tr}S = \mathrm{tr}T,$$

است. در نتیجه:

$$D(\rho,\sigma) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(S+T).$$

رابطه‌ی فوق را بیشتر بررسی می‌کنیم. تعریف می‌کنیم $|X| := (X^\dagger X)^{\frac{1}{2}}$. در نتیجه:

$$\begin{aligned}
|\rho-\sigma| &= ((\rho-\sigma)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= ((S-T)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= (S^2+T^2-ST-TS)^{\frac{1}{2}} \\
&= (S^2+T^2+ST+TS)^{\frac{1}{2}} \\
&= ((S+T)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= S+T,
\end{aligned}$$

که در تساوی چهارم از رابطه $ST=TS=0$ و در تساوی آخر از این که $S+T$ مثبت نیمه معین است استفاده شده است. بنابراین:

$$D(\rho,\sigma) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(S+T) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}|\rho-\sigma| = \frac{1}{2}\| \rho-\sigma \|_1.$$

توجه کنید که $\mathrm{tr}|\rho-\sigma|$ همان $\|\rho-\sigma\|_p$ برای $p=1$ است که در ابتدای جلسه تعریف شد.

مثال ۱ فاصله اثر $\rho = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1|$ و $\sigma = \frac{2}{3}|+\rangle\langle +| + \frac{1}{3}|-\rangle\langle -|$ را بدست آورید؟

$$\begin{aligned}
\rho-\sigma &= \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| - \frac{2}{3}|+\rangle\langle +| - \frac{1}{3}|-\rangle\langle -| \\
&= \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| - \frac{1}{3}(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \\
&\quad - \frac{1}{6}(|0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \\
&= \frac{1}{4}|0\rangle\langle 0| - \frac{1}{6}|0\rangle\langle 1| - \frac{1}{6}|1\rangle\langle 0| - \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

مقادیر ویژه این ماتریس برابر با $\pm\frac{\sqrt{13}}{12}$ هستند و در نتیجه فاصله اثر برابر با $\frac{\sqrt{13}}{12}$ است.

۱.۱ خواص $D(\cdot,\cdot)$

۱. $0 \le D(\rho,\sigma) \le 1$

اثبات: به این دلیل که $(1+D(\rho,\sigma))/2$ یک احتمال است.

۲. $D(\rho,\sigma) = D(\sigma,\rho)$

اثبات: به این دلیل که با تعویض جای ρ و σ در رابطه (۱) احتمال تشخیص درست تغییر پیدا نمی‌کند.

۳. $D(\rho,\sigma)=0$ اگر و فقط اگر $\rho=\sigma$

اثبات: $D(\rho,\sigma)=0$ نتیجه می‌دهد که $\mathrm{tr}S=\mathrm{tr}T=0$ و از آنجا که T,S هر دو مثبت نیمه معین هستند نتیجه می‌گیریم $S=T=0$. پس $\rho-\sigma=0$.

۴. $D(\sigma,\sigma')\leq D(\rho,\sigma)+D(\rho,\sigma')$

اثبات: برای اثبات نامساوی مثلث داریم:

$$
\begin{aligned}
D(\sigma,\sigma') &= \max_{0\preceq E\preceq I}\mathrm{tr}(E(\sigma-\sigma'))\\
&= \max_{0\preceq E\preceq I}\mathrm{tr}(E(\sigma-\rho))+\mathrm{tr}(E(\rho-\sigma'))\\
&\leq \max_{0\preceq E_1\preceq I}\mathrm{tr}(E_1(\sigma-\rho))+\max_{0\preceq E_2\preceq I}\mathrm{tr}(E_2(\rho-\sigma'))\\
&= D(\rho,\sigma)+D(\rho,\sigma').
\end{aligned}
$$

چهار خاصیت فوق نشان می‌دهند که $D(\cdot,\cdot)$ یک متر است.

۵. $D(\rho,\sigma)=1$ اگر و فقط اگر $\rho\sigma=\sigma\rho=0$

اثبات: اگر $D(\rho,\sigma)=1$ یعنی $0\preceq E\preceq I$ وجود دارد به طوری که $\mathrm{tr}(E\rho)-\mathrm{tr}(E\sigma)=1$. از آنجا که $0\leq\mathrm{tr}(E\rho),\mathrm{tr}(E\sigma)\leq 1$ نتیجه می‌گیریم $\mathrm{tr}(E\rho)=\mathrm{tr}(\rho)=1$ و $\mathrm{tr}(E\sigma)=0$. چون σ و E هر دو مثبت نیمه معین هستند $E\sigma=\sigma E=0$. به همین ترتیب از $\mathrm{tr}((I-E)\rho)=0$ نتیجه می‌شود $E\rho=\rho E=\rho$.
حال داریم:

$$\rho\sigma=(\rho E)\sigma=\rho(E\sigma)=0,$$

و به همین ترتیب $\sigma\rho=0$.

بالعکس اگر $\rho\sigma=\sigma\rho=0$ آنگاه $S=\rho$ و $T=\sigma$. لذا $D(\rho,\sigma)=\mathrm{tr}S=\mathrm{tr}\rho=1$.

۶. $D(\cdot,\cdot)$ تحت نگاشت‌های یکانی پایاست. یعنی برای هر عملگر یکانی U داریم $D(U\rho U^\dagger,U\sigma U^\dagger)=D(\rho,\sigma)$

اثبات: قرار دهید $S'=USU^\dagger$ و $T'=UTU^\dagger$. داریم $U\rho U^\dagger-U\sigma U^\dagger=S'-T'$، $S',T'\geq 0$ و $S'T'=T'S'=0$. بنابراین

$$D(U\rho U^\dagger,U\sigma U^\dagger)=\mathrm{tr}S'=\mathrm{tr}S=D(\rho,\sigma).$$

۷. $D(\text{tr}_B(\rho_{AB}), \text{tr}_B(\sigma_{AB})) \leq D(\rho_{AB}, \sigma_{AB})$

اثبات: طبق تعریف داریم:

$$\begin{aligned} D(\text{tr}_B(\rho_{AB}), \text{tr}_B(\sigma_{AB})) &= \max_{0 \preceq E_A \preceq I_A} \text{tr}(E_A(\text{tr}_B\rho_{AB} - \text{tr}_B\sigma_{AB})) \\ &= \max_{0 \preceq E_A \otimes I_B \preceq I_A \otimes I_B} \text{tr}((E_A \otimes I_B)(\rho_{AB} - \sigma_{AB})) \\ &\leq \max_{0 \preceq E_{AB} \preceq I_A \otimes I_B} \text{tr}(E_{AB}(\rho_{AB} - \sigma_{AB})) \\ &= D(\rho_{AB}, \sigma_{AB}). \end{aligned}$$

که در تساوی دوم از $\text{tr}((M_A \otimes I_B)X_{AB}) = \text{tr}(M_A(\text{tr}_B X_{AB}))$ استفاده کردیم که به راحتی قابل بررسی است. [۵]

۸. $D(\rho \otimes \tau, \sigma \otimes \tau) = D(\rho, \sigma)$

اثبات: تعریف کنید $S' = S \otimes \tau$ و $T' = T \otimes \tau$. در این صورت $\rho \otimes \tau - \sigma \otimes \tau = S' - T'$، $S', T' \geq 0$ و $S'T' = T'S' = 0$. بنابراین:

$$D(\rho \otimes \tau, \sigma \otimes \tau) = \text{tr}S' = (\text{tr}S)(\text{tr}\tau) = \text{tr}S = D(\rho, \sigma).$$

۹. برای هر نگاشت کوانتمی Φ داریم $D(\Phi(\rho), \Phi(\sigma)) \leq D(\rho, \sigma)$

اثبات: در جلسه‌ی گذشته نشان دادیم هر نگاشت کوانتمی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\Phi(\rho) = \text{tr}_B \left(U_{AB}(\rho_A \otimes \tau_B)U_{AB}^\dagger\right)$$

حال با توجه به خواص ۶ و ۷ و ۸ داریم:

$$\begin{aligned} D(\Phi(\rho), \Phi(\rho)) &\leq D(U_{AB}(\rho_A \otimes \tau_B)U_{AB}^\dagger, U_{AB}(\sigma_A \otimes \tau_B)U_{AB}^\dagger) \\ &= D(\rho_A \otimes \tau_B, \sigma_A \otimes \tau_B) \\ &= D(\rho, \sigma). \end{aligned}$$

تمرین ۲ فرض کنید $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ و $\sigma = |\phi\rangle\langle\phi|$ محض باشند. نشان دهید:

$$D(\rho, \sigma) = \sqrt{1 - |\langle\psi|\phi\rangle|^2}.$$

[5] مشاهده کنید که این رابطه زمانی که X_{AB} به صورت ضرب تانسور باشد برقرار است. از آنجایی که هر عملگر دلخواه را به صورت ترکیب خطی عملگرهای ضرب تانسوری می‌توان نوشت و این رابطه خطی است پس باید برای هر عملگر دلخواه X_{AB} درست باشد.

۲.۱ تعمیم تعریف $D(\cdot,\cdot)$ به کل $\mathbf{L}(\mathcal{H})$

تا اینجا $D(\cdot,\cdot)$ را برای ماتریس‌های چگالی تعریف کردیم. می‌خواهیم این تعریف را به کل $\mathbf{L}(\mathcal{H})$ تعمیم دهیم. ابتدا توجه کنید که:

$$D(\rho,\sigma) = \mathrm{tr}S = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(S+T).$$

برای هر $X \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$ تعریف کنید:

$$|X| := (X^\dagger X)^{1/2}.$$

توجه کنید که $X^\dagger X$ همواره مثبت نیمه معین است و لذا $|X|$ خوش تعریف است. از آنجایی که

$$D(\rho,\sigma) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}|\rho-\sigma|$$

پس برای هر $X, Y \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$ می‌توان تعریف کرد:

$$D(X,Y) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}|X-Y|.$$

توجه کنید که $\mathrm{tr}|X-Y|$ همان $\|X-Y\|_p$ برای $p=1$ است که در ابتدای جلسه تعریف شد. یعنی:

$$D(X,Y) = \frac{1}{2}\|X-Y\|_1.$$

$\|\cdot\|_1$ را گاهی با $\|\cdot\|_{\mathrm{tr}}$ نیز نشان می‌دهند و به آن نرم اثر[۶] می‌گویند. طبق نامساوی هولدر داریم:

$$|\mathrm{tr}(XY)| \leq \|X\|_\infty \|Y\|_{\mathrm{tr}}$$

که در اینجا $\|X\|_\infty$ برابر با بزرگترین مقدار ویژه‌ی $|X|$ است.[۷]

توجه کنید که اگر $X = \sum_i p_i|i\rangle\langle i|$ و $Y = \sum_i q_i|i\rangle\langle i|$ هر دو در پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|i\rangle\}$ قطری باشند، آنگاه $|X-Y| = \sum_i |p_i - q_i||i\rangle\langle i|$ و در نتیجه:

$$D(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_i |p_i - q_i|.$$

۲ وفاداری

در این بخش کمیتی دیگر به نام وفاداری[۸] برای سنجش دوری یا نزدیکی دو حالت کوانتمی ρ و σ معرفی می‌کنیم. اگر $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ و $\sigma = |\phi\rangle\langle\phi|$ هر دو محض باشند، ضرب داخلی $|\langle\psi|\phi\rangle|$ دور یا نزدیک بودن $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ را مشخص می‌کند. پس تعریف می‌کنیم:

$$F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = |\langle\psi|\phi\rangle|.$$

[۶] Trace norm

[۷] بزرگترین مقدار ویژه‌ی $|X|$ همان بزرگتری مقدار تکین X است.

[۸] Fidelity

حال سؤال این است که چگونه این تعریف را برای حالات غیر محض نیز تعمیم دهیم. برای این کار از مفهوم محض سازی[۹] استفاده می‌کنیم. $|\psi\rangle_{AB}$ را یک محض سازی ρ_A نامند اگر

$$\rho_A = \mathrm{tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|_{AB}).$$

برای حالات دلخواه کوانتمی ρ و σ تعریف می‌کنیم:

$$F(\rho_A, \sigma_A) = \max_{|\psi\rangle_{AB}, |\phi\rangle_{AB}} |\langle\psi|\phi\rangle|,$$

که در آن $\mathcal{H}_B$ «یکریخت» با $\mathcal{H}_A$ است (دارای بُعد یکسان هستند) و ماکزیمم روی همه‌ی محض‌سازی‌های $|\psi\rangle_{AB}$ از ρ_A و محض‌سازی‌های $|\phi\rangle_{AB}$ از σ_A محاسبه می‌شود.

با بررسی فرم محض‌سازی‌های یک ماتریس چگالی در ادامه ثابت خواهیم کرد که

$$F(\rho, \sigma) = \mathrm{tr}|\rho^{1/2}\sigma^{1/2}| = \mathrm{tr}\left(\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}\right)^{1/2}. \tag{۲}$$

بصورت خاص زمانی که ρ و σ در یک پایه متعامد یکه قطری شوند و مقادیر ویژه آنها به ترتیب λ_i و μ_i باشد داریم:

$$F(\rho, \sigma) = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i \mu_i}.$$

بردار متشکل از $(\sqrt{\lambda_i})_{i=1}^d$ ها را در نظر بگیرید. طول این بردار یک است زیرا $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. مشابها طول بردار متشکل از $(\sqrt{\mu_i})_{i=1}^d$ ها یک است. با این تعریف $F(\rho, \sigma)$ ضرب داخلی میان این دو بردار روی کره واحد می‌باشد.

نکته ۳ برای تعریف $F(\rho_A, \sigma_A)$ برحسب محض سازی‌ها فرض کردیم که $\mathcal{H}_B$ یکریخت با $\mathcal{H}_A$ است. اما حتی با برداشتن این شرط رابطه‌ی (۲) همچنان برقرار است.

۱.۲ خواص وفاداری

$$F(\rho, \sigma) = \mathrm{tr}|\rho^{1/2}\sigma^{1/2}| = \mathrm{tr}\left(\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}\right)^{1/2}. \tag{۳}$$

$$F(\rho_A, \sigma_A) = \max_{|\psi\rangle_{AB}, |\phi\rangle_{AB}} |\langle\psi|\phi\rangle|. \tag{۴}$$

که در آن $|\psi\rangle_{AB}$ یک محض سازی ρ_A است و $|\phi\rangle_{AB}$ یک محض سازی σ_A.

تا این جا دو رابطه‌ی فوق را برای محاسبه‌ی وفاداری معرفی کردیم که در ادامه معادل بودن آنها را ثابت خواهیم کرد. ولی قبل از آن به بررسی خواص وفاداری می‌پردازیم.

[۹] Purification

۱. $F(\rho, |\phi\rangle\langle\phi|) = \langle\phi|\rho|\phi\rangle^{1/2}$

اثبات: کافی است از رابطه‌ی (۳) استفاده کنیم.

۲. $0 \leq F(\rho, \sigma) \leq 1$

اثبات: $F(\rho, \sigma)$ برابر با قدر مطلق ضرب داخلی دو بردار یکه است.

۳. $F(\rho, \sigma) = 1$ اگر و فقط اگر $\rho = \sigma$

اثبات: $F(\rho, \sigma) = 1$ اگر و فقط ρ و σ دو محض سازی داشته باشند که $|\langle\psi|\phi\rangle| = 1$. در این صورت $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ فقط در یک فاز با هم تفاوت دارند. پس $|\psi\rangle\langle\psi| = |\phi\rangle\langle\phi|$ و

$$\rho = \text{tr}_B|\psi\rangle\langle\psi| = \text{tr}_B|\phi\rangle\langle\phi| = \sigma.$$

۴. $F(\rho, \sigma) = 0$ اگر و فقط اگر $\rho\sigma = \sigma\rho = 0$

اثبات: $F(\rho, \sigma) = 0$ اگر و فقط اگر $\text{tr}\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2} = 0$ اگر و فقط اگر $\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2} = 0$ اگر و فقط اگر $\rho\sigma = \sigma\rho = 0$. توجه کنید که در اینجا از مثبت نیمه معین بودن ρ, σ استفاده کردیم.

۵. $F(\cdot, \cdot)$ تحت عملگرهای یکانی پایاست یعنی برای هر U یکانی داریم $F(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) = F(\rho, \sigma)$

اثبات: کافی است توجه کنیم که $(U\rho U^\dagger)^{1/2} = U\rho^{1/2}U^\dagger$ و از رابطه‌ی (۳) استفاده کنیم.

۶. $F(\rho_{AB}, \sigma_{AB}) \leq F(\rho_A, \sigma_A)$

اثبات: کافی است توجه کنیم که هر محض سازی از ρ_{AB} و σ_{AB} یک محض سازی از ρ_A و σ_A نیز هست و از رابطه‌ی (۴) استفاده کنیم.

۷. $F(\rho \otimes \tau, \sigma \otimes \omega) = F(\rho, \sigma).F(\tau, \omega)$

اثبات: توجه کنید که $(\rho \otimes \tau)^{1/2} = \rho^{1/2} \otimes \tau^{1/2}$ و از رابطه‌ی (۳) استفاده کنید.

۸. $F(\rho \otimes \tau, \sigma \otimes \tau) = F(\rho, \sigma)$

اثبات: توجه کنید که $(\rho \otimes \tau)^{1/2} = \rho^{1/2} \otimes \tau^{1/2}$ و از رابطه‌ی (۳) استفاده کنید.

۹. برای هر نگاشت کوانتمی Φ داریم $F(\Phi(\rho), \Phi(\sigma)) \geq F(\rho, \sigma)$

اثبات: هر نگاشت کوانتمی به صورت

$$\Phi(\rho) = \text{tr}_B \left(U_{AB}(\rho_A \otimes \tau_B)U_{AB}^\dagger \right)$$

قابل بیان است. حال کافی است از خواص ۵ و ۶ و ۸ استفاده کنیم.

۱۰. ارتباط بین $D(\rho,\sigma)$ و $F(\rho,\sigma)$: برای هر ρ,σ داریم

$$1-F(\rho,\sigma)\leq D(\rho,\sigma)\leq\sqrt{1-F(\rho,\sigma)^2}.$$

اثبات: فرض کنید که $|\psi\rangle_{AB}$ و $|\phi\rangle_{AB}$ محض‌سازی‌هایی از ρ_A و σ_A باشند به طوری که $F(\rho,\sigma)=|\langle\psi|\phi\rangle|$. در این صورت با استفاده از تمرین ۲ و خواص فاصله‌ی اثر داریم

$$D(\rho_A,\sigma_A)\leq D(|\psi\rangle_{AB},|\phi\rangle_{AB})=\sqrt{1-|\langle\psi|\phi\rangle|^2}=\sqrt{1-F(\rho,\sigma)^2}.$$

برای اثبات نامساوی دیگر توجه کنید که با استفاده از قضیه ۷ (و همچنین اثبات آن) که در انتهای متن آمده، برای هر X عملگر یکانی V وجود دارد به طوری که $|X|=VX$. به علاوه اگر X هرمیتی باشد آنگاه عملگر V در این تساوی را نیز می‌توانی هرمیتی گرفت (یعنی V هم یکانی است و هم هرمیتی). همچنین داریم:

$$\|X\|_1=\max_U|\text{tr}(XU)|,$$

که در آن ماکزیمم روی عملگرهای یکانی U گرفته می‌شود. حل تمرین زیر با استفاده از این نکات ساده است.

تمرین ۴ برای عملگر هرمیتی X و عملگر مثبت نیمه معین M داریم:

$$\|XM\|_1\geq tr(|X|M),$$

و

$$\|XM+MX\|_1\geq 2tr(|X|M).$$

تمرین ۵ برای هر دو عملگر مثبت نیمه معین M,N نشان دهید

$$tr(|M-N|(M+N))\geq tr(|M-N|^2)=tr((M-N)^2).$$

راهنمایی: کافی است اثر را نسبت به پایه‌ای که $M-N$ در آن قطری می‌شود بسط دهیم.

حال با استفاده از دو تمرین فوق نامساوی دوم را ثابت می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
D(\rho,\sigma) &= \frac{1}{2}\|\rho-\sigma\|_1 \\
&= \frac{1}{4}\|(\sqrt{\rho}-\sqrt{\sigma})(\sqrt{\rho}+\sqrt{\sigma})+(\sqrt{\rho}+\sqrt{\sigma})(\sqrt{\rho}-\sqrt{\sigma})\|_1 \\
&\geq \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(|\sqrt{\rho}-\sqrt{\sigma}|(\sqrt{\rho}+\sqrt{\sigma})\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left((\sqrt{\rho}-\sqrt{\sigma})^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\rho+\sigma-\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}-\sqrt{\sigma}\sqrt{\rho}) \\
&= 1-\mathrm{tr}(\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}) \\
&\geq 1-\mathrm{tr}|\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}| \\
&= 1-F(\rho,\sigma).
\end{aligned}$$

نکته ۶ خاصیت آخر در مورد ارتباط بین $D(\rho,\sigma)$ و $F(\rho,\sigma)$ نشان می‌دهد که در صورتی که $D(\rho,\sigma)$ کوچک باشد، $F(\rho,\sigma)$ بزرگ است و برعکس. این خاصیت نشان می‌دهد که علی رغم اینکه برای $F(\rho,\sigma)$ معنای عملیاتی[۱۰] پیدا نشده است، اما به متر دیگری وابسته است که معنای عملیاتی دارد.

۲.۲ اثبات فرمول $F(\rho,\sigma)$

فرض کنید ρ_A یک حالت کوانتمی باشد که در آن $\mathcal{H}_A$ یک فضای هیلبرت با پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|1\rangle,\ldots,|d\rangle\}$ است. $\mathcal{H}_B$ را نیز یک فضای هیلبرت یکریخت با $\mathcal{H}_A$ بگیرید و تعریف کنید:

$$|\alpha\rangle_{AB}=\sum_{i=1}^{d}|i\rangle_A\otimes|i\rangle_B.$$

در این صورت

$$|\zeta\rangle_{AB}=\rho_A^{1/2}\otimes I_B|\alpha\rangle_{AB},$$

[۱۰] Operational meaning

یک محض‌سازی از ρ_A است. زیرا

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_B\left(|\zeta\rangle\langle\zeta|_{AB}\right) &= \mathrm{tr}_B\left((\rho_A^{1/2}\otimes I)|\alpha\rangle\langle\alpha|_{AB}(\rho_A^{1/2}\otimes I)\right)\\
&= \sum_{i,j=1}^{d}\mathrm{tr}_B\left(\rho_A^{1/2}|i\rangle\langle j|\rho_A^{1/2}\otimes|i\rangle\langle j|\right)\\
&= \sum_{i=1}^{d}\rho_A^{1/2}|i\rangle\langle i|\rho_A^{1/2}\\
&= \rho_A^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{d}|i\rangle\langle i|\right)\rho_A^{1/2}\\
&= \rho_A.
\end{aligned}$$

از طرف دیگر می‌دانیم که محض‌سازی‌های ρ_A تحت عملگرهای یکانی با هم معادلند. پس هر محض‌سازی دیگر ρ_A به فرم $|\psi\rangle_{AB}$ برابر

$$|\psi\rangle_{AB} = I_A\otimes V|\zeta\rangle_{AB} = \rho_A^{1/2}\otimes V|\zeta\rangle_{AB},$$

است که در آن V یک عملگر یکانی است. با استفاده از این مطلب $F(\rho,\sigma)$ را می‌توان حساب کرد.

$$\begin{aligned}
F(\rho_A,\sigma_A) &= \max_{|\psi\rangle_{AB},|\phi\rangle_{AB}}|\langle\psi|\phi\rangle|\\
&= \max_{V,W}|(\rho^{1/2}\otimes V|\alpha\rangle,\sigma^{1/2}\otimes W|\alpha\rangle)|\\
&= \max_{V,W}|\langle\alpha|(\rho^{1/2}\otimes V^\dagger)(\sigma^{1/2}\otimes W)|\alpha\rangle\\
&= \max_{V,W}|\langle\alpha|\left(\rho^{1/2}\sigma^{1/2}\otimes V^\dagger W\right)|\alpha\rangle|\\
&= \max_{V,W}|\mathrm{tr}(\rho^{1/2}\sigma^{1/2}(V^\dagger W)^T)|,
\end{aligned}$$

که در آن V, W یکانی هستند و در تساوی آخر از رابطه‌ی

$$\langle\alpha|(X\otimes Y)|\alpha\rangle = \mathrm{tr}(XY^T)$$

استفاده کردیم که به راحتی قابل بررسی است. در نتیجه با توجه به یکانی بودن $(V^\dagger W)^T$ داریم

$$F(\rho_A,\sigma_A) = \max_U|\mathrm{tr}(\rho^{1/2}\sigma^{1/2}U)|,$$

که در آن ماکزیمم روی همه‌ی عملگرهای یکانی U است.

قضیه ۷ برای هر $X\in\mathbf{L}(\mathcal{H})$ داریم

$$\max_U|\mathrm{tr}(UX)| = \|X\|_{\mathrm{tr}} = \mathrm{tr}|X|$$

که در آن ماکزیمم روی همه‌ی عملگرهای یکانی U است.

اثبات: برای اثبات این قضیه از تجزیه مقدار تکین [11] استفاده می‌کنیم. ماتریس‌های یکانی V_1, V_2 و عملگر قطری و مثبت نیمه معین $\Lambda \geq 0$ وجود دارند به‌طوری‌که $X = V_1 \Lambda V_2$. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}\max_U |\text{tr}(UX)| &= \max_U |\text{tr}(UV_1\Lambda V_2)| \\ &= \max_U |\text{tr}((V_2UV_1)\Lambda)| \\ &= \max_U |\text{tr}(U\Lambda)| \\ &= \text{tr}\Lambda.\end{aligned}$$

در تساوی آخر از این نکته استفاده کردیم که اولاً برای $U = I$ تساوی اتفاق می‌افتد. ثانیاً برای هر U دلخواه اگر $\Lambda = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$ داریم:

$$\begin{aligned}|\text{tr}(U\Lambda)| &= |\sum_i \lambda_i \langle i|U|i\rangle| \leq \sum_i \lambda_i |\langle i|U|i\rangle| \\ &= \sum_i \lambda_i |(|i\rangle, U|i\rangle)| \leq \sum_i \lambda_i \||i\rangle\| \cdot \|U|i\rangle\| \\ &= \sum_i \lambda_i = \text{tr}\Lambda.\end{aligned}$$

پس داریم $\max_U |\text{tr}(UX)| = \text{tr}\Lambda$. از طرف دیگر داریم $|X| = (X^\dagger X)^{1/2} = (V_2^\dagger \Lambda^2 V_2)^{1/2} = V_2^\dagger \Lambda V_2$. بنابراین:

$$\|X\|_{\text{tr}} = \text{tr}|X| = \text{tr}(V_2^\dagger \Lambda V_2) = \text{tr}\Lambda = \max_U |\text{tr}(UX)|.$$

□

حال با توجه به این قضیه می‌توانیم وفاداری را حساب کنیم:

$$F(\rho, \sigma) = \max_U |\text{tr}(\rho^{1/2}\sigma^{1/2}U)| = \|\rho^{1/2}\sigma^{1/2}\|_{\text{tr}} = \text{tr}|\rho^{1/2}\sigma^{1/2}| = \text{tr}\left(\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}\right)^{1/2}.$$

۳ فاصله‌ی بین دینامیک‌های کوانتمی

همان‌طور که داشتن معیاری برای اندازه‌گیری فاصله‌ی بین حالات کوانتمی ابزار مهمی در نظریه‌ی اطلاعات کوانتمی محسوب می‌شود، اندازه‌گرفتن فاصله‌ی بین دینامیک‌های کوانتمی نیز مهم است. برای مثال برای تشخیص این که یک کانال کوانتمی Φ تا چه حد نویزی است باید فاصله‌ی آن را با کانال همانی حساب کنیم.

برای شروع فرض کنید Φ و Ψ دو کانال کوانتمی باشند. «نزدیک» و شبیه بودن این دو کانال به هم به این معناست که برای هر حالت ρ، دو حالت $\Phi(\rho)$ و $\Psi(\rho)$ نزدیک به هم هستند. یعنی $\|\Phi(\rho) - \Psi(\rho)\|_{\text{tr}} = \|\Phi(\rho) - \Psi(\rho)\|_1$ برای هر ρ نزدیک به صفر است. با استفاده از این بحث فاصله‌ی بین دو کانال کوانتمی را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\|\Phi - \Psi\|_1 := \max_{X:\, \|X\|_1 = 1} \|\Phi(X) - \Psi(X)\|_1.$$

[11] Singular Value Decomposition (SVD)

در واقع برای هر $\Omega:\mathbf{L}(\mathcal{H})\to\mathbf{L}(\mathcal{H})$ قرار می‌دهیم

$$\|\Omega\|_1 := \max_{X:\,\|X\|_1=1}\|\Omega(X)\|_1,$$

که با قرار دادن $\Omega=\Phi-\Psi$ در این رابطه، عبارت اول بدست می‌آید.

طبق تعریف واضح است که $\|\Phi-\Psi\|_1$ خواص یک متر (مانند نامساوی مثلث) را دارد. نکته‌ی مهم‌تر معنای عملگری این متر است. فرض کنید که دستگاهی در اختیار ما قرار داده شده است که یک دینامیک کوانتمی را شبیه‌سازی می‌کند. این دینامیک از ما پوشیده است ولی می‌دانیم یا برابر Φ است و یا Ψ. حال هدف ما این است که با فقط «یک بار» استفاده از این دستگاه مشخص کنیم که دینامیک شبیه‌سازی شده Φ است یا Ψ. برای این کار می‌توانیم یک سیستم ورودی دستگاه را در حالت ρ قرار داده و خروجی را بررسی کنیم. خروجی دستگاه یا $\Phi(\rho)$ است و یا $\Psi(\rho)$ و ما می‌خواهیم تشخیص دهیم که کدام است. در بحث مربوط به نرم اثر دیدیم که احتمال تشخیص درست ما با $\|\Phi(\rho)-\Psi(\rho)\|_1$ معین می‌شود (هر چه این عبارت بیشتر باشد، احتمال تشخیص درست ما هم بیشتر است). پس با این روش احتمال تشخیص درست دینامیکی که دستگاه شبیه‌سازی می‌کند برابر با ماکزیمم $\|\Phi(\rho)-\Psi(\rho)\|_1$ روی همه‌ی حالات اولیه‌ی ρ است.

برای مساله‌ی تشخیص یک دینامیک کوانتمی که در بالا ذکر شد جواب هوشمندانه‌ی دیگری وجود دارد. سیستم ورودی دستگاه را A نامیده و فرض کنید که یک سیستم ترکیبی AB را در حالت ρ_{AB} قرار داده، و زیر سیستم A آن را به عنوان ورودی دستگاه قرار دهیم. در این صورت خروجی حالت $\Phi\otimes\mathcal{I}_B(\rho_{AB})$ یا $\Psi\otimes\mathcal{I}_B(\rho_{AB})$ است. بنابراین احتمال تشخص درست دینامیک از عبارت

$$\|\Phi\otimes\mathcal{I}_B(\rho_{AB})-\Psi\otimes\mathcal{I}_B(\rho_{AB})\|_1$$

محاسبه می‌شود.

با استفاده از این بحث تعریف می‌کنیم:

$$\|\Phi-\Psi\|_\diamond := \max_{\rho_{AB}}\|\Phi\otimes\mathcal{I}_B(\rho_{AB})-\Psi\otimes\mathcal{I}_B(\rho_{AB})\|_1.$$

به عبارت دیگر

$$\|\Phi-\Psi\|_\diamond := \max_{d}\|\Phi\otimes\mathcal{I}_d-\Psi\otimes\mathcal{I}_d\|_1,$$

که در آن منظور از $\mathcal{I}_d$ کانال همانی روی یک فضای d بعدی است. $\|\cdot\|_\diamond$ را نرم لوزی[۱۲] می‌نامند.

نکته ۸ $\|\Omega\|_1$ را برابر ماکزیمم $\|\Omega(X)\|_1$ روی همه‌ی X-ها با شرط $\|X\|_1=1$ تعریف کردیم. در حالت خاصی که $\Omega=\Phi-\Psi$ تفاضل دو کانال کوانتمی است، می‌توان ثابت کرد که این ماکزیمم روی یک ماتریس مثبت نیمه معین اتخاذ می‌شود. پس با شرط $\|X\|_1=1$ نتیجه می‌گیریم که در این حالت خاص می‌توانیم ماکزیمم را روی ماتریس‌های چگالی بگیریم.

خاصیت مهم نرم لوزی ضربی بودن آن تحت ضرب تانسوری است:

$$\|\Omega_1\otimes\Omega_2\|_\diamond = \|\Omega_1\|_\diamond\|\Omega_2\|_\diamond.$$

[۱۲] Diamond norm