نظریه اطلاعات کوانتمی ۱ ترم پاییز ۱۳۹۱-۱۳۹۲
مدرس: ابوالفتح بیگی و امین راده گوهری نویسنده: علی ایزدی راد

جلسه ۲۳

۱ تابع آنتروپی و خاصیت مقعر بودن

در جلسه ی قبل به تعریف توابع محدب و صعودی پرداختیم و قضیه های جنسن ، کلین ،پیرل و لونر را بررسی کردیم . در این جلسه قصد داریم تا با استفاده از این قضایای چند خاصیت تابع آنتروپی را بررسی کنیم

تابع آنتروپی در تئوری اطلاعات کوانتومی به صورت $H(\rho) = -tr(\rho \log \rho)$ تعریف میشود . تابع آنتروپی تابعی مقعر است و در ادامه با چند روش به بررسی این موضوع می پردازیم.

تابع $f(x)$ مقعر است اگر $-f(x)$ محدب باشد. بنابر این می خواهیم نشان دهیم که :

$$\rho := q\sigma + \bar{q}\omega \Rightarrow H(\rho) \geq qH(\sigma) + \bar{q}H(\omega)$$

و یا :

$$-tr(\rho \log \rho) \geq -qtr(\sigma \log \sigma) - \bar{q}tr(\omega \log \omega)$$

اثبات اول:

تابع $f(t) = t \log t$ یک تابع محدب است .اگر نامساوی بالا را بر حسب این تابع بازنویسی کنیم خواهیم داشت :

$$tr(f(q\sigma + \bar{q}\omega)) \leq q\mathrm{tr}(f(\sigma)) + \bar{q}\mathrm{tr}(f(\omega))$$

بنابر این به دنبال این هستیم که نامساوی بالا را اثبات کنیم . ماتریس ρ یک ماتریس مثبت است و بنابراین می توان آن را به صورت زیر نوشت :

$$\rho = \sum \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i| \Rightarrow f(\rho) = \sum f(\lambda_i)|e_i\rangle\langle e_i|, f(\lambda_i) = \langle e_i|f(\rho)|e_i\rangle$$

حال :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(f(\rho)) &= \sum_{i=1}^{d} \langle e_i|f(\rho)|e_i\rangle = \sum f(\lambda_i) = \sum f(\langle e_i|\rho|e_i\rangle) \\ &= \sum f(\langle e_i|q\sigma + \bar{q}\omega|e_i\rangle = \sum f(q\langle e_i|\sigma|e_i\rangle + \bar{q}\langle e_i|\omega|e_i\rangle)\end{aligned}$$

چون تابع $f(t)$ محدب است نامساوی جنسن برای آن برقرار است بنابراین :

$$\mathrm{tr}(f(\rho)) \leq q \sum f(\langle e_i|\sigma|e_i\rangle) + \bar{q} \sum f(\langle e_i|\omega|e_i\rangle)$$

و اکنون طرف راست نامساوی توسط نامسوای پیرل به صورت زیر در می آید :

$$\mathrm{tr}(f(\rho)) \leq q\mathrm{tr}(f(\sigma)) + \bar{q}\mathrm{tr}(f(\omega))$$

و این همان نامساوی است که در صدد اثباتش بودیم .پس اثبات تمام است و نتیجه می گیریم که تابع آنتروپی یک تایع مقعر است

اثبات دوم: می دانیم که تابع $f(t) = t\log(t)$ یک تابع محدب است از تعریف تابع محدب داریم که :

$$qf(\sigma) + \bar{q}f(\omega) \geq f(q\sigma + \bar{q}\omega)$$

در نتیجه با تعریف $\rho = q\sigma + \bar{q}\omega$ خواهیم داشت :

$$\rho\log(\rho) \leq q\sigma\log(\sigma) + \bar{q}\omega\log(\omega)$$

از قضایای جبر خطی به خاطر داریم برای دوماتریس مثبت A, Bاگر $A \leq B$ آنگاه $\mathrm{tr}(A) \leq \mathrm{tr}(B)$. در نتیجه اگر از نامساوی بالا رد بگیریم خواهیم داشت :

$$\mathrm{tr}(\rho\log(\rho)) \leq q\mathrm{tr}(\sigma\log(\sigma)) + \bar{q}tr(\omega\log(\omega))$$

و این نامساوی مقعر بودن تابع آنتروپی را نشان می دهد.

اثبات سوم: مجددا با تعریف $\rho = q\sigma + \bar{q}\omega$ داریم :

$$\mathrm{tr}(\rho\ln\rho) = \mathrm{tr}((q\sigma + \bar{q}\omega)\ln\rho) = q\mathrm{tr}(\sigma\ln\rho) + \bar{q}\mathrm{tr}(\omega\ln\rho)$$

با توجه به نامساوی بالا اگر بتوانیم اثبات کنیم که $\mathrm{tr}(\sigma\ln\rho) \leq \mathrm{tr}(\sigma\ln\sigma)$یا $\mathrm{tr}(\sigma\ln\sigma) - \mathrm{tr}(\sigma\ln\rho) \geq 0$ آنگاه اثبات مقعر بودن تابع به راحتی امکان پذیر می شود.برای اثبات این موضوع از نامساوی کلین کمک میگیریم طبق نامساوی کلین به ازای تابع محدب f نامساوی زیر برقرار است:

$$\mathrm{tr}(f(A) - f(B)) \geq \mathrm{tr}((A - B)f^{'}(B))$$

اکنون با در نظر گرفتن $f := t\ln t$ و $f' = \ln t + 1$ و $A := \sigma, B := \rho$ و با استفاده از نامساوی کلین به دست می آوریم که :

$$\mathrm{tr}[\sigma\ln\sigma - \rho\ln\rho] \geq \mathrm{tr}[(\sigma - \rho)(\ln\rho + 1)]$$

اما :

$$\mathrm{tr}[(\sigma - \rho)(\ln\rho + 1)] = \mathrm{tr}(\sigma) - \mathrm{tr}(\rho) + \mathrm{tr}(\sigma\ln\rho) - \mathrm{tr}(\rho\ln\rho) = \mathrm{tr}(\sigma\ln\rho) - \mathrm{tr}(\rho\ln\rho)$$

در تساوی آخر از این واقعیت بهره جستیم که برای ماتریس های چگالیρ, σ $\mathrm{tr}(\rho) = \mathrm{tr}(\sigma) = 1$ برقرار است . درنتیجه :

$$\mathrm{tr}[\sigma\ln\sigma - \rho\ln\rho] \geq \mathrm{tr}(\sigma\ln\rho) - \mathrm{tr}(\rho\ln\rho) \Rightarrow \mathrm{tr}(\sigma\ln\sigma) - \mathrm{tr}(\sigma\ln\rho) \geq 0$$

اکنون اثبات مقعر بودن تابع آنتروپی ساده خواهد بود ، با توجه به نامساوی اخیر :

$$\mathrm{tr}(\sigma\ln\sigma) \geq \mathrm{tr}(\sigma\ln\rho)$$

$$\mathrm{tr}(\omega\ln\omega) \geq \mathrm{tr}(\omega\ln\rho)$$

بنابراین :

$$\mathrm{tr}(\rho\ln\rho) = q\mathrm{tr}(\sigma\ln\rho) + \bar{q}\mathrm{tr}(\omega\ln\rho) \leq q\mathrm{tr}(\sigma\ln\sigma) + \bar{q}\mathrm{tr}(\omega\ln\omega)$$

نامساوی اخیر نشان میدهد که تابع آنتروپی مقعر است .

اثبات چهارمی هم وجود دارد که از خاصیت نامنفی بدون آنتروپی نسبی به دست می آید تعریف آنتروپی نسبی و خواص ان را در قسمت بعدی اثبات وبررسی می کنیم اما اگر بدانیم که آنتروپی نسبی نامنفی است بنا به تعریف آن نامساوی زیر حاصل می شود و ادامه اثبات مانند روند اثبات سوم خواهد بود :

$$\mathrm{tr}(\sigma\ln\sigma) \geq \mathrm{tr}(\sigma\ln\rho)$$

۲ آنتروپی نسبی و خواص آن

در اثبات سوم مقعر بودن تابع آنتروپی فون نویمان به جمله ی $\mathrm{tr}(\sigma\ln\sigma) - \mathrm{tr}(\sigma\ln\rho)$ برخورد کردیم .اگر این رابطه را در پایه مناسب بنویسیم خواهیم داشت :

$$\mathrm{tr}(\sigma\ln\sigma) - \mathrm{tr}(\sigma\ln\rho) = \sum\lambda_i\ln\lambda_i - \sum\lambda_i\ln\mu_i = \sum\lambda_i\ln(\frac{\lambda_i}{\mu_i})$$

جمله ی اخر شبیه به رابطه ی انتروپی نسبی یا فاصله ی کولبک در تئوری اطلاعات کلاسیک است . در تئوری اطلاعات کلاسیک برای دو توزیع $p(x), q(x)$ آنتروپی نسبی به صورت زیر تعریف می شود :

$$D(p||q) = \sum p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)}$$

و بنابراین با این شهودی کلاسیکی می توان گفت که:

$$\mathrm{tr}(\sigma\ln\sigma - \sigma\ln\rho) = \sum\lambda_i\ln(\frac{\lambda_i}{\mu_i}) := D(\sigma||\rho)$$

خواص انتروپی نسبی در ادامه ی این جلسه بررسی خواهند شد اما اولین خاصیتی که به اثبات چهارم ما برای بررسی مقعر بودن تابع انتروپی کمک می کند این است که :

خاصیت اول : آنتروپی نسبی همیشه نامنفی است .

$$D(\sigma||\rho) \geq 0$$

برای درستی رابطه بالا با باز نویسی آنتروپی نسبی داریم :

$$\begin{aligned}D(\sigma||\rho) &= \mathrm{tr}(\sigma\ln\sigma - \sigma\ln\rho)\\ &= \mathrm{tr}[\sigma\ln\sigma] - \mathrm{tr}[\sigma^{\frac{1}{2}}\ln\rho\sigma^{\frac{1}{2}}]\\ &= \mathrm{tr}[\sigma^{\frac{1}{2}}[\sigma^{\frac{1}{2}}\ln\sigma - \ln\rho\sigma^{\frac{1}{2}}]]\end{aligned}$$

به خاطر داریم که ضرب داخلی بین دوماتریس را می توانستیم به صورت $(A,B) = \text{tr}(A^\dagger B)$ در نظر بگیریم .اگر بخواهیم با این دید به جمله آخر رابطه اخیر نگاه بیاندازیم ، بد نیست توابع زیر را در ابتدا تعریف کنیم :

$$\begin{aligned}
&\Phi(A) := -A\ln\sigma + (\ln\rho)A \\
&L(A) := A\sigma^{-1}, L^2(A) = A\sigma^{-2}, ..., L^k(A) = A\sigma^{-k} \\
&R(A) := \rho A
\end{aligned}$$

مشاهده می شود که :

$$(LR)(A) = \rho A\sigma^{-1} = (RL)(A)$$

و

$$(\ln L)(A) = A\ln\sigma^{-1} = -A\ln\sigma$$

خاصیت اخیر با استفاده از بسط سری تیلور $\ln\sigma^{-1}$ قابل حصول است . همچنین :

$$\begin{aligned}
\Phi(A) &= -A\ln\sigma + (\ln\rho)A \\
&= (\ln L)(A) + (\ln\rho)(A) \\
&= [\ln L + \ln R](A) \\
&= \ln(LR)(A)
\end{aligned}$$

اکنون از این توابع برای باز نمایش رابطه ی آنتروپی نسبی کمک می گیریم :

$$\begin{aligned}
D(\sigma||\rho) &= \text{tr}[\sigma^{\frac{1}{2}}[\sigma^{\frac{1}{2}}\ln\sigma - \ln\rho\sigma^{\frac{1}{2}}]] \\
&= \text{tr}[\sigma^{\frac{1}{2}}(-\Phi(\sigma^{\frac{1}{2}}))] \\
&= \langle\sigma^{\frac{1}{2}}, -\Phi(\sigma^{\frac{1}{2}})\rangle \\
&= -\langle\sigma^{\frac{1}{2}}, \ln(LR)(\sigma^{\frac{1}{2}})\rangle \\
&\geq -\ln(\langle\sigma^{\frac{1}{2}}, LR(\sigma^{\frac{1}{2}})\rangle \quad \text{نامساوی پیرل} \\
&= -\ln(\langle\sigma^{\frac{1}{2}}, \rho\sigma^{\frac{-1}{2}}\rangle) = -\ln(\text{tr}(\sigma^{\frac{1}{2}}\rho\sigma^{\frac{-1}{2}}) \\
&= -\ln(\text{tr}(\rho\sigma^{\frac{1}{2}}\sigma^{\frac{-1}{2}})) = -\ln(\text{tr}(\rho)) \quad \text{خاصبت جابجایی} \\
&= -\ln(1) = 0
\end{aligned}$$

پس نامنفی بودن آنتروپی نسبی اثبات شد .

تمرین : با نوشتن ρ و σ به صورت تجزیه اشمیت و قرار دادن آنها در تعریف رابطه ی آنتروپی نسبی و با توجه به اینکه آنتروپی نسبی در حالت کلاسیک نامنفی است ، نشان دهید که آنتروپی نسبی کوانتومی نیز نامنفی است.

اکنون می خواهیم دیگر خواص آنتروپی نسبی را بررسی کنیم . در حالت کلاسیک می دانیم که :

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) &= \sum_x P_X(x)\log(\frac{1}{P_X(x)}) + \sum_y P_Y(y)\log(\frac{1}{P_Y(y)}) \\
&- \sum_{x,y} P_{X,Y}(x,y)\log(\frac{1}{P_{X,Y}(x,y)}) \\
&= D(P(x,y)||P(X)P(Y))
\end{aligned}
$$

مشابها در حالت کوانتومی نیز رابطه ی زیر برقرار است :

$$I(A;B) = D(\rho_{AB}||\rho_A \otimes \rho_B)$$

درستی این رابطه را با بازنویسی تعریف آنتروپی نسبی می توان پیگیری نمود :

$$D(\rho_{AB}||\rho_A \otimes \rho_B) = \text{tr}(\rho_{AB}\log(\rho_{AB}) - \rho_{AB}\log(\rho_A \otimes \rho_b))$$

اما :

$$\log(\rho_A \otimes \rho_B) = \log(I \otimes \rho_B)(\rho_A \otimes I) = \log(I \otimes \rho_B) + \log(\rho_A \otimes I)$$

همچنین به عنوان تمرین و با استفاده از بسط تیلور می توانید نشان دهید که $\log(I \otimes \rho_B) = I \otimes \log \rho_B$ است و بنابراین

$$
\begin{aligned}
D(\rho_{AB}||\rho_A \otimes \rho_B) &= \text{tr}(\rho_{AB}\log(\rho_{AB})) - \text{tr}(\rho_{AB}\log(\rho_A \otimes \rho_b))) \\
&= -H(AB) - \text{tr}(\rho_{AB}(I \otimes \log(\rho_B))) \\
&- \text{tr}(\rho_{AB}(\log(\rho_A) \otimes I)) \\
&= -H(AB) + H(B) + H(A) \\
&= I(A;B)
\end{aligned}
$$

در محاسبات بالا از این واقعیت استفاده کردیم که $\text{tr}(\rho_{AB}(I \otimes \log(\rho_B)))$ برابر با $\text{tr}(\rho_B \log \rho_B)$ است.جهت تحقیق آن ابتدا می توانید ابتدا حالت $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ را بررسی کنید و سپس تعمیم کلی ان توسط تجزیه اشمیت را بنویسید و از این نکته نیز استفاده کنید که $\text{tr} = \text{tr}_A \otimes \text{tr}_B$.

به همین ترتیب در حالت کلاسیک داشتیم که :

$$-H(X|Y) = D(P(x,y)||p(y))$$

و مشابها در حالت کوانتومی آن رابطه ی زیر برقرار است :

$$-H(A|B) = D(\rho_{AB}||I_A \otimes \rho_B)$$

خاصیت دوم:

خاصیت دیگر آنتروپی نسبی این است که تحت عملگر یکانی ناوردا است یعنی :

$$D(\rho||\sigma) = D(U\rho U^\dagger||U\sigma U^\dagger)$$

تمرین: خاصیت بالا را اثبات کنید

خاصیت سوم:

یکی دیگر از خواص آنتروپی نسبی جمع پذیری آن است .بدین معنا که :

$$D(\rho_1 \otimes \rho_2||\sigma_1 \otimes \sigma_2) = D(\rho_1||\sigma_1) + D(\rho_2||\sigma_2)$$

یکی از نتایج این خاصیت این است که :

$$D(\rho^{\otimes n}||\sigma^{\otimes n}) = nD(\rho||\sigma)$$

خاصیت چهارم:

خاصیت مهم وجالب دیگر انتروپی نسبی این است که :

$$D(\rho^{AB}||\sigma^{AB}) \geq D(\rho^A||\sigma^A)$$

قضیه ۱ آنتروپی نسبی دو حالت ρ و σ با اعمال یک نگاشت نویزی یکسان $\mathcal{N}$ به هر دو حالت کاهش پیدا می کند یعنی :

$$D(\rho||\sigma) \geq D(\mathcal{N}(\rho)||\mathcal{N})(\sigma))$$

اثبات: هر نگاشت نویزی را می توان با اضافه کردن حالت $|0\rangle^E$ به سیستم و اعمال کردن یک تحول یکانی به سیستم وسپس اثر جزئی گرفتن به دست اورد یعنی $\mathcal{N}$ را به صورت $\mathcal{N}(\rho) = tr_E U(\rho \otimes |0\rangle\langle 0|)U^\dagger$ نوشت. حال با این ایده :

$$\begin{aligned}
D(\rho||\sigma) &= D(\rho||\sigma) + D(|0\rangle\langle 0|^E|||0\rangle\langle 0|^E) \\
&= D(\rho \otimes |0\rangle\langle 0|^E||\sigma|0\rangle\langle 0|^E) \\
&= D(U\rho \otimes |0\rangle\langle 0|^E U^\dagger||U\sigma|0\rangle\langle 0|^E U^\dagger) \\
&\geq D(\mathcal{N}(\rho)||\mathcal{N}(\sigma))
\end{aligned}$$

در نامساوی آخر از خاصیت $D(\rho^{AB}||\sigma^{AB}) \geq D(\rho^A||\sigma^A)$ استفاده کردیم

تمرین: نشان دهید که انتروپی نسبی بین دو حالت کوانتومی-کلاسیکی ρ^{XB} و σ^{XB} از رابطه زیر به دست می آید :

$$D(\rho^{XB}||\sigma^{XB}) = \sum_x P_X(x)D(\rho_x||\sigma_x)$$

که در آن :

$$\rho^{XB} := \sum_x P_X|x\rangle\langle x|^X \otimes \rho_x^B$$

قضیه ۲ تابع آنتروپی نسبی به صورت مشترک نسبت به آرگومان های خود محدب است یعنی اگر تعریف کنیم : $\rho = \sum_x P_x(x)\rho_x$ و $\sigma = \sum_x P_X(x)\sigma_x$ آنگاه :

$$D(\rho||\sigma) \leq \sum_x P_X(x)D(\rho_x||\sigma_x)$$

اثبات: از تمرین بالا می دانیم که :

$$\sum_x P_X(x) D(\rho_x || \sigma_x = D(\rho^{XB} || \sigma^{XB})$$

اما از آنجا که بنا به خاصیت آنتروپی نسبی :

$$D(\rho^{XB} || \sigma^{XB}) \geq D(\rho^B || \sigma^B)$$

پس نتیجه میگیریم که :

$$D(\rho || \sigma) \leq \sum_x P_X(x) D(\rho_x || \sigma_x)$$