پدیده‌های مخالف شهود در احتمالات

امید اعتصامی

پژوهشگاه دانشهای بنیادی، پژوهشکده ریاضیات

۱ انگیزه

در احتمالات پدیده‌هایی پیدا می‌شوند که رفتاری کمی مخالف آنچه شهود ما در ابتدا به ما می‌گوید دارند. ما سه نمونه از چنین پدیده‌هایی را در زیر آورده‌ایم.

۲ بازی‌هایی که وقتی طولانی‌تر می‌شوند به نفع قوی‌تر نیستند

تمرین ۱ طبق خرد عمومی بازی‌های طولانی‌تر به نفع بازیکن قوی‌تر است چون در این بازی‌ها شواهد بیشتری در رابطه با قدرت نسبی بازیکنان وجود دارد.

با این وجود یک بازی n-مرحله‌ای در نظر بگیرید که در آن آذر $A_1 + \ldots + A_n$ امتیاز و بابک $B_1 + \ldots + B_n$ امتیاز بدست می‌آورند. فرض کنید A_1، ...، A_n و B_1، ...، B_n متغیرهای تصادفی مستقلی هستند که A_iها توزیع یکسانی دارند و B_iها توزیع یکسانی دارند. فرض کنید آذر با احتمال P_n می‌برد (یعنی $A_1 + \ldots + A_n > B_1 + \ldots + B_n$).

آ) نشان دهید که $P_n \geq P_1^n$. همچنین نشان دهید به ازای هر n و به ازای هر مقدار $p \in [0, 1]$، می‌توان توزیع A_iها و B_iها را طوری طراحی کرد که داشته باشیم $P_1 = p$ و $P_n = p^n$. به عنوان مثال می‌توان داشت $P_1 = 0.99$ در حالیکه $P_{1000} < 0.001$.

ب) فرض کنید که A_i و B_i دارای توزیع زیر هستند:

$$A_i = \begin{cases} 0 & 1 - q_1 - q_3 - q_5 - \ldots \text{ با احتمال} \\ m_1 & q_1 \text{ با احتمال} \\ m_3 & q_3 \text{ با احتمال} \\ m_5 & q_5 \text{ با احتمال} \\ \vdots \end{cases} \quad , \quad B_i = \begin{cases} 0 & 1 - q_0 - q_2 - q_4 - \ldots \text{ با احتمال} \\ m_0 & q_0 \text{ با احتمال} \\ m_2 & q_2 \text{ با احتمال} \\ m_4 & q_4 \text{ با احتمال} \\ \vdots \end{cases}$$

تعریف کنید $m_k = 2^{k^3}$، $n_k = 2^{k^2+k}$، $q_k = 2^{-k^2}/D$ که در آن $D = \sum_{k\geq 0} 2^{-k^2}$. نشان دهید P_{n_k} به ازای kهای بزرگ زوج به صفر و به ازای kهای بزرگ فرد به یک میل می‌کند. (بنابراین همانطور که می‌بینید در این بازی نمی‌توان گفت طولانی‌تر شدن بازی به نفع بازیکن قوی‌تر است.)

جواب:

آ) متغیرهای $A_1 - B_1$، ...، $A_n - B_n$ از هم مستقلند، بنابراین

$$P_n \geq \Pr(A_1 - B_1 > 0, \ldots, A_n - B_n > 0) = \prod_{i=1}^{n} \Pr(A_i - B_i > 0) = P_1^n.$$

برای نشان دادن حکم دوم، تعریف کنید $A_i = 1$. همچنین تعریف کنید $B_i = 0$ با احتمال p و $B_i = n + 1$ با احتمال $1 - p$. آن‌گاه داریم $P_1 = p$ و $P_n = p^n$.

ب) فرض کنید k زوج است. آن‌گاه به احتمال $1 - (1 - q_k)^{n_k} = 1 - o_k(1)$ یکی از B_iها برابر m_k است. هم‌چنین به احتمال $(1 - q_{k+1} - q_{k+3} - \ldots)^{n_k} = 1 - O(n_k q_{k+1}) = 1 - o_k(1)$ تمام A_iها کمتر مساوی m_{k-1} هستند. چون $m_k > m_{k-1} n_k$ با احتمال $1 - o_k(1)$ داریم $\sum_{i=1}^n B_i > \sum_{i=1}^n A_i$. حالت k فرد هم مشابه است.

□

این بخش برگرفته از مقاله‌ی [۱] می‌باشد.

۳ متغیرهای k-تایی مستقل عجیب

۱.۳ مقدمات

n متغیر تصادفی را k-تایی مستقل[۱] می‌نامیم اگر هر k تای آن‌ها از هم مستقل باشند. اگر $k = 2$، آن‌ها را دو به دو مستقل می‌نامیم.

متغیر تصادفی X را یکنواخت می‌نامیم اگر به ازای هر x که $\Pr(X = x) > 0$ مقدار $\Pr(X = x)$ به x بستگی نداشته باشد. متغیر تصادفی X را دودویی می‌نامیم اگر X تنها دو مقدار ۰ و ۱ را بپذیرد.

تمرین ۲ آ) اگر n متغیر $(k + 1)$-تایی مستقل باشند k-تایی هم مستقل‌اند؟

ب) برای $1 \leq k < n$، بیابید n متغیر تصادفی را که k-تایی مستقل باشند ولی $(k + 1)$-تایی مستقل نباشند.

جواب:

آ) بله.

ب) X_1،...،X_{n-1} را متغیرهای مستقل یکنواخت دودویی در نظر بگیرید. X_n را برابر با $X_1 \oplus \ldots \oplus X_k$ قرار می‌دهیم. (در این‌جا $\oplus$ به معنای یای انحصاری[۲] می‌باشد.)

□

تمرین ۳ نشان دهید اگر X_1، ...، X_k مستقل باشند آن‌گاه $\mathbb{E}X_1 \ldots X_k = (\mathbb{E}X_1) \ldots (\mathbb{E}X_k)$.

جواب:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X_1 \ldots X_k &= \sum_{x_1,\ldots,x_k} \Pr(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k) x_1 \ldots x_k \\
&= \sum_{x_1,\ldots,x_k} \Pr(X_1 = x_1) \ldots \Pr(X_k = x_k) x_1 \ldots x_k \\
&= (\sum_{x_1} \Pr(X_1 = x_1) x_1) \ldots (\sum_{x_k} \Pr(X_k = x_k) x_k).
\end{aligned}$$

□

اگر A یک پیشامد باشد آن‌گاه $[A]$ متغیر تصادفی است که هنگام وقوع A برابر ۱ و در غیر این صورت برابر ۰ می‌باشد. پیشامدهای A_1، ...،A_k را مستقل می‌نامیم هرگاه متغیرهای تصادفی $[A_1]$،...،$[A_k]$ از هم مستقل باشند.

تمرین ۴ نشان دهید پیشامدهای A_1، ...،A_k مستقل هستند اگر و فقط اگر به ازای هر $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$ داشته باشیم

$$\Pr(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} \Pr(A_j).$$

[۱] k-wise independent

[۲] xor

جواب: ابتدا توجه کنید که برای یک پیشامد A احتمال $\Pr(A)$ برابر $\mathbb{E}[A]$ می‌باشد. طرف "فقط اگر" مساله با توجه به تمرین ۲ بخش (آ) ساده است. برای طرف "اگر" مساله کافی است توجه کنیم به ازای $x_1, \ldots, x_k \in \{0,1\}$ داریم

$$\begin{aligned}
\Pr([A_1] = x_1, \ldots, [A_k] = x_k) &= \mathbb{E} \prod_{j=1}^{k} (x_j + (-1)^{x_j} [A_j]) \\
&= \sum_J (\prod_{j \notin J} x_j)(\prod_{j \in J} (-1)^{x_j}) \mathbb{E}(\prod_{j \in J} [A_j]) \\
&= \sum_J (\prod_{j \notin J} x_j)(\prod_{j \in J} (-1)^{x_j}) \prod_{j \in J} \mathbb{E}[A_j] \\
&= \prod_{j=1}^{k} (x_j + (-1)^{x_j} \mathbb{E}[A_j]) \\
&= \prod_{j=1}^{k} \Pr([A_j] = x_j).
\end{aligned}$$

□

۲.۳ ساختار عجیب

ما در زیربخش قبل مثالی از متغیرهای دودویی X_1، ...، X_n به طور k-تایی مستقل نشان دادیم که $(k+1)$-تایی مستقل نبودند. اما در این بخش می‌خواهیم نشان دهیم که میتوانی مثالی داشت که علاوه بر خاصیت بالا توزیع مشترک X_1، ...، X_n نسبت به اندیس متغیرها متقارن باشد، یا به عبارت معادل دیگر $\Pr(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$ تنها به $x_1 + \ldots + x_n$ ربط داشته باشد. چون می‌خواهیم متغیرها $(k+1)$-تایی مستقل نباشند، باید داشته باشیم $\Pr(X_1) = \ldots = \Pr(X_n) > 0$، و چون متغیرها مستقل از هم‌اند $\Pr(X_1 + \ldots + X_k \geq k) > 0$. در مثال زیر خواهید دید که به طرز عجیبی می توان داشت $\Pr(X_1 + \ldots + X_k \geq k+1) = 0$.

تمرین ۵ (سخت) به ازای هر n و $1 \leq k < n$، متغیرهای تصادفی دودویی X_1، ...، X_n را طوری تعریف کنید که

$$\Pr(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$$

به ازای هر بردار بیتی $x = (x_1, \ldots, x_n)$ تنها به $x_1 + \ldots + x_n$ ربط داشته باشد (یعنی متغیرها متقارن باشند)، و X_1، ...، X_n k-تایی مستقل باشند اما $(k+1)$-تایی مستقل نباشند.

جواب: فرض کنید p_0، ...، p_k مقادیر نامنفی با مجموع ۱ باشند. (در ادامه این مقادیر را دقیق‌تر معین می‌کنیم.) X_1، ...، X_n را این گونه تولید می‌کنیم که ابتدا $0 \leq i \leq k$ را با احتمال p_i انتخاب می‌کنیم، سپس به طور یکنواخت تصادفی i متغیر از n متغیر را برابر ۱ و بقیه را برابر ۰ قرار می‌دهیم. نشان می‌دهیم که می‌توانیم به ازای هر $0 \leq i \leq k$ و هر $1 \leq j_1 < \ldots < j_i \leq n$ داشته باشیم

$$\mathbb{E} X_{j_1} \cdots X_{j_i} = 1/n^i.$$

در این صورت طبق تمرین ۴، متغیرها k-تایی مستقلند. از طرف دیگر چون هیچ‌گاه $k+1$ متغیر هم‌زمان ۱ نمی‌شوند متغیرها $(k+1)$-تایی مستقل نیستند.

آن‌چه باقیمانده تعیین p_iهاست. کافی است به ازای هر i که $0 \leq i \leq k$ داشته باشیم

$$\mathbb{E} X_1 \cdots X_i = \sum_{t=0}^{k} \frac{\binom{n-i}{t-i}}{\binom{n}{t}} p_t = 1/n^i.$$

این دستگاه معادله‌ای با $k+1$ مجهول p_0، ...، p_k است که چون مثلثی است دارای جواب یکتایی می‌باشد. تنها باید نشان دهیم که p_iها همگی نامنفی هستند:

$$\begin{aligned} p_i &= \binom{n}{i}[\frac{1}{n^i} - \sum_{t=i+1}^{k} \frac{\binom{n-i}{t-i}}{\binom{n}{t}} p_t] \\ &\geq \binom{n}{i}[\frac{1}{n^i} - \sum_{t=i+1}^{k} \frac{\binom{n-i-1}{t-i-1}}{\binom{n}{t}} np_t] \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

ساختار بالا از مقاله‌ی [۲] برگرفته شده است.

۴ تاس‌های غیر تراگذر

در این بخش با تاس‌های غیرتراگذر[۳] آشنا می‌شویم:

تمرین ۶

آ) وجه‌های روی ۳ تاس ۶-وجهی را طوری با اعداد ۱ تا ۶ شماره‌گذاری کنید که اگر X_1،X_2،X_3 مقادیر به دست آمده پس از ریختن مستقل این ۳ تاس باشد، داشته باشیم

$$\min(\Pr(X_1 > X_2), \Pr(X_2 > X_3), \Pr(X_3 > X_1)) \geq 7/12.$$

ب) اگر F_m عدد فیبوناچی m-ام باشد وجه‌های ۳ تاس F_m-وجهی را طوری شماره گذاری کنید که داشته باشیم

$$\Pr(X_1 > X_2) = \Pr(X_2 > X_3) = F_{m-1}/F_m, \quad \Pr(X_3 > X_1) = F_{m-1}/F_m \pm 1/{F_m}^2.$$

جواب:

آ) تعداد شماره‌گذاری‌های تاس ۶-وجهی با اعداد ۱ تا ۶ برابر است با $462 = \binom{6+5}{6}$. بنابراین بررسی تمام 462^3 حالت با کامپیوتر قابل انجام است. جواب یکتا برای ۳ تاس عبارت است از $X_1 \in \{3,3,3,3,3,6\}$، $X_2 \in \{2,2,2,5,5,5\}$، و $X_3 \in \{1,4,4,4,4,4\}$.

ب) قرار دهید $X_1 \in \{F_{m-2} \times 1, F_{m-1} \times 4\}$، $X_2 \in \{F_m \times 3\}$، $X_3 \in \{F_{m-1} \times 2, F_{m-2} \times 5\}$. خواهیم داشت $\Pr(X_3 > X_1) = F_{m-2}F_{m+1}/F_m^2$. همچنین $F_{m-2}F_{m+1} = F_{m-1}F_m - (-1)^m$ چون

$$F_{m-2}F_{m+1} - F_{m-1}F_m = (F_m - F_{m-1})F_{m+1} - F_{m-1}(F_{m+2} - F_{m+1}) = -(F_{m-1}F_{m+2} - F_mF_{m+1}).$$

□

تمرین ۷ (سخت) فرض کنید n تاس مختلف با تعداد وجه دلخواه داریم که بر روی هر وجه عدد دلخواهی نوشته شده است. فرض کنید X_1،...،X_n مقادیر به دست آمده پس از ریختن مستقل این n تاس باشد. تعریف کنید

$$p = \min(\Pr(X_1 > X_2), \dots, \Pr(X_{n-1} > X_n), \Pr(X_n > X_1)).$$

نشان دهید که برای هر n تاس داریم

$$p \leq 1 - 1/(4\cos^2 \frac{\pi}{n+2}).$$

[۳] nontransitive dice

همچنین می‌توان n تاس هر کدام با N وجه را طوری طراحی کرد که

$$p = 1 - 1/(4\cos^2 \frac{\pi}{n+2}) - O(1/N).$$

همانطور که می‌بینید حد p وقتی $n \to \infty$ برابر $3/4$ خواهد بود. وقتی $n = 3$ کران بالا $p \leq 1/\phi$ خواهد بود که ϕ نسبت طلایی است. این نشان می‌دهد که تاس‌های فیبوناچی تمرین ۶ بهینه هستند.

جواب: ابتدا کران بالا را اثبات می‌کنیم. می‌توان فرض کرد هیچ عدد xای در دو وجه ظاهر نشده است. اگر ظاهر شده بود، می‌توان آن را در یکی از وجه‌ها تبدیل به $x + \epsilon$ و در وجه دیگر تبدیل به $x - \epsilon$ کرد: با فرض کوچک بودن ϵ هیچ یک از احتمالات $\Pr(X_k > X_{(k \bmod n)+1})$ کاهش نمی‌یابد.

می‌گوییم دنباله‌ی به طول $n(m-1) + (n - l + 1)$

$$x_1^{(n)}, \ldots, x_1^{(1)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_2^{(1)}, \ldots, x_{m-1}^{(n)}, \ldots, x_{m-1}^{(1)}, x_m^{(n)}, \ldots, x_m^{(l)}$$

نمایانگر n تاس مورد نظر است اگر وقتی مقادیر روی تمام وجه‌ها را به ترتیب صعودی مرتب کنیم، ابتدا کسر $x_1^{(n)}$ اول وجه‌های تاس n ام آمده باشد، سپس کسر $x_1^{(n-1)}$ اول وجه‌های تاس $(n-1)$ام آمده باشد، ...، سپس کسر $x_1^{(1)}$ اول وجه‌های تاس اول آمده باشد، سپس کسر $x_2^{(n)}$ بعدی وجه‌های تاس nام آمده باشد، ...، و در نهایت کسر $x_m^{(l)}$ آخر وجه‌های تاس l ام آمده باشد.

اعضای این دنباله باید نامنفی باشند اما اجازه می‌دهیم صفر باشند تا حتما چنین دنباله‌ای وجود داشته باشد. حال نشان می‌دهیم می‌توان فرض کرد اعضای دنباله مثبت هستند: فرض کنید $x_j^{(i)} = 0$ آن گاه مسلما $x_{j-1}^{(i)}$ یا $x_{j+1}^{(i)}$ در دنباله حضور دارند. حالتی را در نظر بگیرید که $x_{j+1}^{(i)}$ در دنباله حضور دارد. (حالت دیگر مشابه است.) اگر $x_j^{(i)}$ عضو ابتدایی دنباله باشد به وضوح می‌توان طول دنباله را یکی کم کرد. (البته آن گاه دنباله دیگر از $x_1^{(n)}$ شروع نمی‌شود اما کافیست تاس $n-1$ را تاس n، تاس $n-2$ را تاس $n-1$، ...بنامیم.) در غیر این صورت می‌توان $x_j^{(i-1)}$، ...، $x_j^{(1)}$ و (در صورت وجود) $x_{j-1}^{(n)}$،...،$x_{j-1}^{(i+1)}$ را از دنباله حذف کرد، و مقدار آن‌ها را به همان ترتیب به $x_{j+1}^{(i-1)}$، ...، $x_{j+1}^{(1)}$ و $x_j^{(n)}$،...،$x_j^{(i+1)}$ اضافه کرد بدون این که هیچ یک از احتمالات $\Pr(X_k > X_{(k \bmod n)+1})$ کاهش یابد. در این صورت هم طول دنباله کم شد. چون طول دنباله تا ابد نمی‌تواند کم شود بنابراین تمام اعضای دنباله مثبت هستند.

حال برای اثبات کران بالا برای p ما مساله را کمی کلی‌تر حل می‌کنیم: دیگر فرض نمی‌کنیم که $x_j^{(i)}$ مضربی از معکوس تعداد وجه‌های تاس iام است. تنها فرض می‌کنیم که x_j^iها نامنفی هستند و جمع آن‌ها به ازای هر i برابر ۱ است، و $\Pr(X_k > X_{k+1})$ را برابر

$$\sum_{j,j':j \leq j'} x_j^{(k+1)} x_{j'}^{(k)}$$

و $\Pr(X_n > X_1)$ را برابر

$$\sum_{j,j':j < j'} x_j^{(1)} x_{j'}^{(n)}$$

تعریف می‌کنیم.

حال نشان می‌دهیم می‌توان فرض کرد طول دنباله حداکثر $2n-1$ است. اگر طول دنباله حداقل $2n$ باشد، $2n$ عضو اول دنباله را (بدون افزایش $\Pr(X_k > X_{(k \bmod n)+1})$) طوری تغییر می‌دهیم که یکی از اعضا صفر شود. آن‌گاه مشابه استدلال بالا می‌توان طول دنباله را کم کرد. پس کافیست نشان دهیم چگونه می‌توان یکی از $2n$ عضو اول را صفر کرد. فرض کنید $x_1^{(i)}$ را با نرخ y_i افزایش و $x_2^{(i)}$ را با همین نرخ کاهش می‌دهیم. برای این‌که $\Pr(X_i > X_{i+1})$ به ازای $1 \leq i < n$ و $\Pr(X_n > X_1)$ کاهش نیابد کافی است داشته باشیم

$$y_{i+1} x_1^{(i)} - y_i x_2^{(i+1)} \geq 0, \quad -y_n x_1^{(1)} + y_1 x_2^{(n)} \geq 0.$$

قرار دهید $\alpha = \prod_{i=2}^{n-1} x_2^{(i)}/x_1^{(i)}$. آن گاه به ازای $\alpha \leq 1$ می‌توان y_iها را همگی مثبت قرار داد به طوری که $y_i = 1$. در ضمن با اضافه شدن به $x_1^{(i)}$ها و کاسته شدن از $x_2^{(i)}$ها مقدار α همچنان کم‌تر یا مساوی ۱ باقی می‌ماند. پس در نهایت یکی از $x_2^{(i)}$ها صفر می‌شود. اگر $\alpha > 1$، به طور مشابه y_iها را منفی قرار دهید تا در نهایت یکی از $x_1^{(i)}$ها صفر شود.

در حالتی که طول دنباله برابر $2n-1$ می‌باشد، می‌خواهیم

$$1 - \max(x_1^{(n)}, x_1^{(n-1)}(1 - x_1^{(n)}), \ldots, x_1^{(2)}(1 - x_1^{(3)}), 1 - x_1^{(2)})$$

را ماکزیمم کنیم. می‌توان نشان داد کوچکترین مقدار $q \geq 0$ وجود دارد که اگر $q = x_1^{(n)}$ و $x_1^{(i)} = q/(1-x_1^{(i+1)})$ آن‌گاه $1-x_1^{(2)} = q$ (و به علاوه تمام $x_1^{(i)}$ های به دست آمده در بازه‌ی $[0,1)$ هستند.) در این حالت، $1 - q$ کران بالای دقیق برای مساله است. (برای نشان دادن وجود q توجه کنید که اگر $x_1^{(i)}$های به دست آمده در بازه‌ی $[0,1)$ باشند آن‌گاه $x_1^{(i)}$ها همگی بر حسب q صعودی هستند. هم‌چنین توجه کنید که برای $q \leq 1/4$، $x_1^{(i)}$های به دست آمده در بازه‌ی $[0,1)$ هستند چون $x_1^{(i)} \leq x_1^{(i+1)}$. به ازای $q \geq 1/4$ قبل از این‌که $x_1^{(i)}$ به ۱ نزدیک شود $x_1^{(i+1)}$ از ۱ می‌گذرد. به خصوص قبل از این که q به بزرگی $1/2$ برسد $1 - x_1^{(2)}$ از q کوچکتر است. چون به ازای $q = 0$ مقدار $1 - x_1^{(2)}$ از q بزرگتر است، بنابر قضیه‌ی مقدار میانی q مورد نظر وجود دارد.)

حال سعی می‌کنیم مقدار دقیق q را به‌دست آوریم: اگر فرض کنیم $1 - x_1^{(2)}$ بر حسب q به صورت کسر دو چندجمله‌ای به صورت $g_n(q)/h_n(q)$ نوشته شود داریم

$$\frac{g_{n+1}}{h_{n+1}} = 1 - \frac{q}{g_n/h_n} = \frac{g_n - qh_n}{g_n}.$$

بنابراین $h_{n+1} = g_n$ و $g_{n+1} = g_n - qg_{n-1}$. می‌خواهیم کوچکترین جواب مثبت به معادله‌ی $q = g_n/g_{n-1}$ یا به عبارتی ریشه‌ی چندجمله‌ای $f_n(q) = g_n - qg_{n-1}$ را بیابیم. به وضوح $f_{n+1} = f_n - qf_{n-1}$ و $f_n(x^2)$ برابر است با $x^{n+1}U_{n+1}(1/(2x))$ که U_n چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم دارای رابطه‌ی بازگشتی

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n - U_{n-1}(x)$$

است. از

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$$

به‌دست می‌آید که ریشه‌های U_n عبارتند از $\cos(k\pi/(n+1))$ به ازای $k = 1, \ldots, n$. بنابراین $q = (4\cos^2(\pi/(n+2)))^{-1}$.

حال که کران بالا اثبات شد، توضیح می‌دهیم چگونه می‌توان با تاس‌های N-وجهی به این کران نزدیک شد. مقادیر $x_1^{(n)}$،...،$x_1^{(2)}$ را طوری قرار دهید که

$$1 - \max(x_1^{(n)}, x_1^{(n-1)}(1-x_1^{(n)}), \ldots, x_1^{(2)}(1-x_1^{(3)}), 1-x_1^{(2)}) = 1 - q.$$

حال $x_1'^{(i)}$ را برابر $\lfloor Nx_1^{(i)} \rfloor/N$ و $x_2'^{(i)}$ را برابر $1 - x_1'^{(i)}$ قرار دهید. چون $x_j'^{(i)}$ها همگی مضرب $1/N$ هستند می‌توان آنها را به تاس‌های N-وجهی نسبت داد. از طرف دیگر

$$1 - \max(x_1'^{(n)}, x_1'^{(n-1)}(1-x_1'^{(n)}), \ldots, x_1'^{(2)}(1-x_1'^{(3)}), 1-x_1'^{(2)}) = 1 - q - O(1/N).$$

□

n تاس غیرتراگذر در [۴] و [۳] بررسی شده‌اند.

مراجع

[1] Thomas Cover. Do Longer Games Favor the Stronger Player? The American Statistician, 43 (1989), 277-278.

[2] Anindya De, Omid Etesami, Luca Trevisan, Madhur Tulsiani. Improved Pseudorandom Generators for Depth 2 Circuits. APPROX-RANDOM 2010: 504-517.

[3] Stanislaw Trybula. On the paradox of n random variables. Zastosowania Matematyki, 8 (1965), 143-156.

[4] Zalman Usiskin. Max-Min Probabilities in the Voting Paradox. Annals of Mathematical Statistics, 35 (1964), 857-862.