مارتینگیل [۱]

امید اعتصامی
پژوهشگاه دانشهای بنیادی، پژوهشکده ریاضیات

۱ انگیزه

مارتینگیل مدلی است برای بازی‌های منصفانه‌ی تصادفی که در آن اطلاع در مورد رویدادهای گذشته‌ی بازی به تخمین متوسط برد در گام بعدی کمک نمی‌کند.

تحلیل دنباله‌ای از متغیرهای وابسته (غیر مستقل) عمدتا پیچیده است، اما اگر این متغیرها خاصیت مارتینگیل را داشته باشند امکان دارد تحلیل بسیار ساده‌تر شود.

۲ تعریف

دنباله‌ی

$$\langle Z_n \rangle = Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$$

از متغیرهای تصادفی را مارتینگیل می‌نامیم اگر برای هر $n \geq 0$

$$\mathbb{E}(Z_{n+1}|Z_0, \ldots, Z_n) = Z_n$$

و ضمنا $\mathbb{E}|Z_n|$ متناهی باشد.

به عنوان مثال باید داشته باشیم $\mathbb{E}(Z_1 = Z_0)$. مثلا اگر $Z_0, Z_1 \in \{0, 1, 2\}$ و $p_{ab} = \Pr(Z_0 = a, Z_1 = b)$، آنگاه باید داشته باشیم

$$p_{01} = p_{02} = p_{20} = p_{22} = 0, \quad p_{10} = p_{12}.$$

شرط لازم برای این که $\langle Z_n \rangle$ مارتینگیل باشد این است که به ازای هر $n \geq 0$ داشته باشیم $\mathbb{E}(Z_{n+1}|Z_n) = Z_n$. اما این شرط کافی نیست.

۳ تاریخچه

مارتینگیل در ابتدا به نوعی استراتژی شرط‌بندی اطلاق می‌شد. فرض کنید ماشینی وجود دارد که اگر k تومان در آن بگذارید به احتمال $1/2$ به شما $2k$ تومان پس می‌دهد و به احتمال $1/2$ پول شما را می‌خورد. استراتژی مارتینگیل این است که ابتدا ۱ تومان بگذارید؛ اگر نبردید ۲ تومان بگذارید؛ اگر نبردید ۴ تومان بگذارید؛ ... تا این که 2^k تومان بگذارید و 2^{k+1} تومان ببرید؛ آن‌گاه بیشتر پول نگذارید. با این استراتژی به احتمال ۱ پیروز می‌شوید، اما امید ریاضی مجموع مقدار پولی که باید در ماشین بگذارید بی‌نهایت است. طبق زندگی‌نامه کازانوا [۲]، او با همین استراتژی تمامی دارایی‌های خود را باخت. البته این استراتژی را در اکثر قمارخانه‌ها نمی‌توان اجرا کرد چون محدودیت بالا برای مبلغ شرط وجود دارد. اگر Z_n سود خالص شما در این استراتژی در زمان nام باشد، آنگاه دنباله $\langle Z_n \rangle$ طبق تعریف بالا مارتینگیل است. مارتینگیل توسط لوی[۳] و ویل[۵] تعریف شد و در کتاب «فرایندهای تصادفی» دوب[۲] بسط داده شد.

۴ مثال: آوند پولیا

برای فرایند آوند پولیا[۳] [۴]، ابتدا آوندی را در نظر بگیرید که در آن ۱ توپ قرمز و ۱ توپ سیاه وجود دارد. سپس این کار را تکرار کنید: یک توپ تصادفی از آوند در بیاورید، و خود آن توپ را به اضافه‌ی توپ دیگری با رنگ مشابه در آوند بگذارید. حالت هر مرحله از این فرایند را می‌توان با زوج

[۱] martingale
[۲] Casanova
[۳] Polya's Urn

(r,b) نمایش داد که در آن r تعداد توپهای قرمز درون آوند و b تعداد توپهای سیاه است. در مرحله‌ی nام از فرایند $n+2$ توپ داریم و در یکی از $n+1$ حالت $(1,n)$،$(2,n-1)$،...،$(n,1)$ هستیم.

می‌توان (مثلا با استقرا) نشان داد که هر یک از این $n+1$ حالت دارای احتمال مساوی هستند. همچنین در هر مرحله بنابر تقارن احتمال اینکه توپ انتخاب شده قرمز باشد برابر $1/2$ است، پس شاید به نظر رسد این فرایند ساده و یکنواخت است. اما وقتی تعادل بین توپ‌ها به هم می‌خورد این عدم تعادل خود باعث عدم تعادل در مراحل بعدی می‌شود، و اتفاقات پیش‌بینی نشدنی روی می‌دهد مثلا احتمال این‌که در تمام مراحل (به جز مرحله‌ی صفرم) $r>b$ باشد برابر است با $\ln 2$.

می‌توان به این فرایند مارتینگیل نسبت داد: فرض کنید X_n برابر ۱ باشد اگر توپ nام انتخاب شده قرمز باشد و در غیر این صورت برابر ۰ باشد. آنگاه می‌توان نشان داد

$$Z_n = (1 + X_1 + \ldots + X_n)/(n+2)$$

مارتینگیل است. برای دیدن اینکه Z_n مارتینگیل است، فرض کنید $Z_n = r/(b+r)$. آنگاه

$$\mathbb{E}(Z_{n+1}|Z_0,\ldots,Z_n) = \frac{r}{r+b}\cdot\frac{r+1}{r+b+1} + \frac{b}{r+b}\cdot\frac{r}{r+b+1} = \frac{r+b}{r}.$$

۵ دنباله‌ی مارتینگیل نسبت به دنباله‌ی دیگر

در مثال آوند پولیا ما از دنباله‌ی $\langle X_n\rangle$ دنباله‌ی $\langle Z_n\rangle$ را ساختیم. به طور کلی $\langle Z_n\rangle$ را مارتینگیل نسبت به دنباله‌ی $\langle X_n\rangle$ می‌گوییم هر گاه Z_n تابعی از $(X_0,\ldots,X_n)$ باشد و

$$\mathbb{E}(Z_{n+1}|X_0,\ldots,X_n) = Z_n.$$

اگر دنباله‌ای نسبت به دنباله‌ی دیگری مارتینگیل باشد آنگاه خود مارتینگیل است یعنی نسبت به خودش هم مارتینگیل است.

۶ دنباله‌ی منصفانه

مفهومی متناظر با مارتینگیل مفهوم دنباله‌ی منصفانه [۴] می‌باشد. $\langle Y_n\rangle$ را دنباله‌ی منصفانه نسبت به دنباله‌ی $\langle X_n\rangle$ می‌گوییم هر گاه Y_n تابعی از $(X_0,\ldots,X_n)$ باشد و

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}|X_0,\ldots,X_n) = 0.$$

یک دنباله را منصفانه می‌گوییم اگر نسبت به خودش منصفانه باشد.

اگر $\langle Z_n\rangle$ مارتینگیل باشد آنگاه $\langle Y_n\rangle$ به ازای

$$Y_0 = Z_0, \quad Y_{n+1} = Z_{n+1} - Z_n$$

دنباله‌ی منصفانه است، و اگر $\langle Y_n\rangle$ دنباله‌ی منصفانه باشد آنگاه $\langle Z_n\rangle$ به ازای

$$Z_n = Y_0 + \ldots + Y_n$$

مارتینگیل است.

ساخت دنباله‌ی منصفانه نسبتا ساده است: هر دنباله‌ی مستقل از متغیرها دارای میانگین صفر دنباله‌ای منصفانه است، و اگر $\langle Y_n\rangle$ دنباله‌ای منصفانه باشد آنگاه به ازای هر تابع f_n دنباله‌ی $\langle Y'_n\rangle$ وقتی $Y'_n = f_n(X_0,\ldots,X_{n-1})$ دنباله‌ای منصفانه است. (فقط f_n باید به اندازه‌ی کافی کوچک باشد تا $\mathbb{E}(|Y_n|)$ متناهی باشد.)

[۴] fair sequence

۷ قاعده‌ی توقف

یک قاعده‌ی توقف[۵] برای دنباله‌ی X_0، X_1، ... یک متغیر تصادفی N دارای مقدار صحیح نامنفی یا بینهایت می‌باشد به طوری که پیشامد $N \le n$ تنها تابعی از $(X_0, \ldots, X_n)$ باشد. اگر $\langle Z_n \rangle$ نسبت به $\langle X_n \rangle$ مارتینگیل باشد، آنگاه متوقف شده‌ی $\langle Z_n \rangle$ عبارت است از دنباله‌ی $\langle Z'_n \rangle$ که

$$Z'_n = \begin{cases} Z_n, & \text{اگر } n \le N \\ Z_N, & \text{اگر } n > N \end{cases}$$

خود مارتینگیل است.

به عنوان مثال اگر قماربازی بخواهد دقیقا زمانی دست از شرط‌بندی بکشد که جلو افتاده است، قاعده‌ی توقف N عبارت است از کوچکترین n به طوری که $Z_n > 0$.

قضیه ۱ اگر قاعده‌ی توقف N دارای کران بالا باشد آنگاه امید ریاضی مارتینگیل با توقف در زمان N تغییر نمی‌کند.

اثبات: اگر $N \le m$، آنگاه

$$\mathbb{E}Z_N = \mathbb{E}Z'_m = \mathbb{E}Z'_0 = \mathbb{E}Z_0.$$

□

۸ کاربرد قاعده‌ی توقف در یک بازی

برای بازی Ace Now باید یک دست ورق بازی را بُر بزنید و به پشت بخوابانید، آنگاه ورق‌ها را یکی یکی رو کنید: قبل از دیدن ورق nام باید یا بگویید «توقف» یا بگویید «ادامه». (ولی وقتی $n = 52$ تنها می‌توانید بگویید «توقف».) وقتی گفتید «توقف»، اگر کارت بعدی آس باشد ۱۲۰ تومان می‌برید و اگر نباشد ۱۰ تومان می‌بازید. بهترین استراتژی برای این بازی چیست؟ آیا بهتر است کمی صبر کنیم تا شانسمان برای برد بهتر باشد؟ بدترین استراتژی چیست؟

جواب این است که همه‌ی استراتژی‌ها همسانند. اگر Z_n کسر کارت‌های آس در بین ورق‌های رو نشده قبل از دیدن ورق nام باشد، آنگاه Z_n مارتینگیل است. طبق قضیه‌ی قاعده‌ی توقف، امید ریاضی این کسر هنگامی که می‌گوییم «توقف» همان $1/13$ است.

۹ قضیه‌ی رای‌گیری برتراند

قضیه‌ی زیر تعمیم مساله رای‌گیری برتراند[۱] می‌باشد.

قضیه ۲ فرض کنید کاندیدای A و B در رای‌گیری به ترتیب a و b رای آورده‌اند به طوری که $a > kb$ که در آن k عدد صحیح مثبتی می‌باشد. فرض کنید رای‌ها را به طور کاملا تصادفی یکی یکی می‌خوانیم. احتمال این که در طول خواندن رای‌ها تعداد آرای خوانده شده‌ی A همواره بیش از k برابر تعداد آرای خوانده شده‌ی B باشد برابر است با $\frac{a-bk}{a+b}$.

اثبات: متغیر X_n را برابر ۱ تعریف کنید اگر رای nام خوانده شده برای A باشد و در غیر این صورت قرار دهید $X_n = 0$. به ازای $0 \le n \le a+b-1$، تعریف کنید

$$Z_n = \frac{X_1 + \ldots + X_{a+b-n}}{a+b-n}.$$

Z_0، ...، Z_{a+b-1} مارتینگیل خواهد بود. (توجه کنید که این مارتینگیل را در جهت عکس تعریف کردیم.) مارتینگیل را در N توقف کنید که N بزرگترین nای است که $Z_n = k$ (و اگر چنین nای وجود ندارد قرار دهید $N = a+b-1$). اگر در طول خواندن رای‌ها تعداد آرای خوانده شده‌ی A همواره بیش از k برابر تعداد آرای خوانده شده‌ی B باشد، آنگاه $Z_N = Z_{a+b-1} = 1$ و در غیر این صورت $Z_N = k/(k+1)$. بنابراین اگر p احتمال مورد نظر باشد، داریم

$$\frac{a}{a+b} = \mathbb{E}Z_0 = \mathbb{E}Z_N = p + (1-p)\frac{k}{k+1}.$$

[۵] stopping rule

□

برای اینکه تعداد آرای خوانده شده‌ی A همواره بیش از k برابر تعداد آرای خوانده شده‌ی B باشد، باید اولین رای برای A باشد (که این با احتمال $a/(a+b)$ اتفاق می‌افتد) و اگر رای اول را نادیده بگیریم، تعداد آرای خوانده شده‌ی A همواره بیشتر یا مساوی k برابر تعداد آرای خوانده شده‌ی B باشد. می‌توان با این استدلال و با استفاده از قضیه‌ی بالا نشان داد:

قضیه ۳ فرض کنید کاندیدای A و B در رای‌گیری به ترتیب a و b رای آورده‌اند به طوری که $a \geq kb$ که در آن k عدد صحیح مثبتی می‌باشد. فرض کنید رای‌ها را به طور کاملا تصادفی یکی یکی می‌خوانیم. احتمال این که در طول خواندن رای‌ها تعداد آرای خوانده شده‌ی A همواره بیشتر یا مساوی k برابر تعداد آرای خوانده شده‌ی B باشد برابر است با $\frac{a+1-bk}{a+1}$.

۱۰ تناظر بین آوند پولیا و جایگشتها

جایگشت تصادفی $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ از ۱ تا $n+1$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که می‌خواهیم a_1، ...، a_{n+1} را مرتب کنیم و از روش مرتب‌سازی درجی استفاده می‌کنیم. اگر قبل از این که عنصر a_i درج شود $b-1$ عنصر سمت راست a_1 باشند و $r-1$ عنصر سمت چپ a_1 باشند، به احتمال $b/(b+r)$ عنصر a_i سمت راست a_1 و به احتمال $r/(r+b)$ سمت چپ a_1 درج می‌شود. پس اندیس موقعیت a_1 در حین مرتب‌سازی با تعداد توپهای قرمز در آوند پولیا در تناظر است.

به عنوان تمرین می‌توانید فکر کنید که چگونه این تناظر نشان می‌دهد که وقتی $n = b + r + 2$، همانطور که قبلا گفتیم در آوند پولیا تمام $n+1$ حالت $(1, n)$،$(2, n-1)$،...،$(n, 1)$ دارای احتمال مساوی هستند.

۱۱ بررسی بیشتر آوند پولیا

در فرایند آوند پولیا تمامی مسیرهای رسیدن از حالت (r, b) به حالت (r', b') را در نظر بگیرید. با فرض این که از حالت (b, r) شروع می‌کنیم، احتمال اتفاق هر یک از این مسیرها برابر هم و مساوی

$$\frac{(\prod_{k=r}^{r'-1} k)(\prod_{k=b}^{b'-1} k)}{\prod_{k=b+r}^{b+r-1} k}$$

است. می‌توان از این خاصیت برای اثبات قضیه‌ی زیر استفاده کرد.

قضیه ۴ در فرایند آوند پولیا احتمال اینکه زمانی تعداد توپهای قرمز بیش از تعداد توپهای سیاه بشود برابر $\ln 2$ است.

اثبات: فرض کنید p_k احتمال این باشد که به حالت $(k+1, k)$ برسیم ولی به هیچ یک از حالات $(j+1, j)$ به ازای $j < k$ نرسیم. احتمال مورد نظر قضیه $p_1 + p_2 + \ldots$ می‌باشد. پیشامد E_{rb} را این تعریف کنید که به حالت (r, b) برسیم و E'_k را این تعریف کنید که تا زمانی‌که $b + r \leq 2k$ داشته باشیم $r \leq b$. داریم

$$p_k = \Pr(E_{kk}) \Pr(E'_k | E_{kk}) \Pr(E_{(k+1)k} | E_{kk}).$$

چون تمام $2k-1$ حالت $(1, 2k-1)$،$(2, 2k-2)$،...،$(2k-1, 1)$ دارای احتمال مساوی هستند، $\Pr(E_{kk}) = 1/(2k-1)$. چون تمام مسیرها از $(1, 1)$ تا (k, k) در فرآیند آوند پولیا هم‌احتمال هستند، طبق قضیه‌ی ۳ داریم $\Pr(E'_k | E_{kk}) = 1/k$. هم‌چنین داریم $\Pr(E_{(k+1)k} | E_{kk}) = 1/2.$ بنابراین

$$\sum_{k \geq 1} p_k = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2k-1} \cdot \frac{1}{2k} = \sum_{k \geq 1} (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) = \ln 2$$

چون

$$\ln(1 + x) = \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} / i.$$

□

مراجع

[1] Joseph Bertrand (1887), Solution d'un problème, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 105, 369.

[2] Joseph L. Doob (1953), Stochastic Processes, New York: Wiley.

[3] Paul Lévy (1934), L'addition de variables aléatoires enchainees et la loi de Gauss, Bull. Soc. Math. France C. R. des Seances 62, 42–43.

[4] Florian Eggenberger, George Pólya (1923), Über die Statistik verketteter Vorgänge, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 3, 279-289.

[5] Jean Ville (1939), Étude critique de la notion de collectif, Monographies des Probabilités (in French) 3, Paris: Gauthier-Villars.