دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد
گرایش ریاضی محض(منطق ریاضی)

مباحثی در حساب کاردینال ها

نگارش
زکیه ذاکری

استادان راهنما
دکتر مسعود پور مهدیان و دکتر محمد گلشنی

استاد مشاور
دکتر نازنین روشندل توانا

تیر ماه ۱۳۹۸

بسم الله الرحمن الرحیم

صفحه فرم ارزیابی و تصویب پایان نامه- فرم تأیید اعضاء کمیته دفاع

در این صفحه فرم دفاع یا تایید و تصویب پایان نامه موسوم به فرم کمیته دفاع- موجود در پرونده آموزشی- را قرار دهید.

نکات مهم:

- نگارش پایان نامه/رساله باید به زبان فارسی و بر اساس آخرین نسخه دستورالعمل و راهنمای تدوین پایان نامه های دانشگاه صنعتی امیرکبیر باشد.(دستورالعمل و راهنمای حاضر)
- رنگ جلد پایان نامه/رساله چاپی کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکترا باید به ترتیب مشکی، طوسی و سفید رنگ باشد.
- چاپ و صحافی پایان نامه/رساله بصورت پشت و رو(دورو) بلامانع است و انجام آن توصیه می شود.

به نام خدا

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)

تعهدنامه اصالت اثر

تاریخ: تیر ماه ۱۳۹۸

اینجانب زکیه ذاکری متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب تحت نظارت و راهنمایی اساتید دانشگاه صنعتی امیرکبیر بوده و به دستاوردهای دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است مطابق مقررات و روال متعارف ارجاع و در فهرست منابع و مآخذ ذکر گردیده است. این پایان‌نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم‌سطح یا بالاتر ارائه نگردیده است.

در صورت اثبات تخلف در هر زمان، مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از درجه اعتبار ساقط بوده و دانشگاه حق پیگیری قانونی خواهد داشت.

کلیه نتایج و حقوق حاصل از این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی امیرکبیر می‌باشد. هرگونه استفاده از نتایج علمی و عملی، واگذاری اطلاعات به دیگران یا چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه و اقتباس از این پایان نامه بدون موافقت کتبی دانشگاه صنعتی امیرکبیر ممنوع است. نقل مطالب با ذکر مآخذ بلامانع است.

زکیه ذاکری

امضا

سپاس گزاری

سپاس پروردگاری را که آفرید مرا تا بیاموزم.

بر خویش لازم می‌دانم از استادان راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر مسعود پور مهدیان و دکتر محمد گلشنی که وجودشان همیشه قوتی برای انجام کارهایم بوده است و بدون شک انجام این پایان بدون کمک و راهنمایی های ارزنده ایشان امکان پذیر نبوده، تشکر کنم.

زکیه ذاکری

تیرماه ۱۳۹۸

چکیده

در این پایان نامه به بررسی قضیه ای از شلاح می‌پردازیم که با فرض این که $\aleph_\omega$ حد قوی است یک کران بالا برای $2^{\aleph_\omega}$ بدست می‌دهد. برای این منظور توابع اردینالی و ایده آل ناایستا روی اردینال ها را بررسی کرده و به تئوری pcf شلاح در ارتباط با هم پایانی ممکن فرا ضرب مجموعه ای از کاردینال های منظم می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی:

توابع اردینالی، هم پایانی، حد قوی، ایده آل ناایستا، مجموعه هم پایانی های ممکن

فهرست مطالب

فهرست نمادها

نماد	مفهوم
ZFC	دستگاه اصول موضوعی زرملو-فرائنکل همراه با اصل انتخاب
ZFC^-	دستگاه اصول موضوعی زرملو-فرائنکل همراه با اصل انتخاب به جز اصل مجموعه توانی
CH	فرضیه پیوستار
GCH	فرضیه پیوستار تعمیم یافته
REG	کلاس تمام کاردینال های منظم
CN	کلاس تمام کاردینال ها
ON	کلاس تمام اردینال ها
$P(X)$	مجموعه توانی X
$\forall$	سور عمومی
$\exists$	سور وجودی
$\sim$	نقیض
$\emptyset$	مجموعه تهی
sup	کوچکترین کران بالا
max	عضو بیشترین
min	عضو کمترین
$\lvert X\rvert$	اندازه X
$\cap$	اشتراک
$\cup$	اجتماع
$\in$	تعلق داشتن
$\subseteq$	زیرمجموعه بودن
$\models$	صدق
$\Rightarrow$	نتیجه می‌دهد
$\Leftrightarrow$	اگر و تنها اگر

$:=$	تعریف
$A\backslash B$	A به جز B $(A-B)$
$A \upharpoonright B$	A تحدید شده به B
$\langle A \rangle$	تولید شده توسط A
$[A]^n$	مجموعه تمام زیر مجموعه های n عضوی A
A^c	متمم مجموعه A
$f \circ g$	ترکیب توابع f و g
$f^{-1}\{x\}$	مجموعه تمام اعضایی از دامنه f که تحت f به x تصویر می‌شوند.
$f[X]$	مجموعه تمام $f(x)$ هایی که x عضو مجموعه X است.
$\prec$	زیر مدل مقدماتی بودن
$\parallel L \parallel$	ماکسیمم $\aleph_0$ و $\|L\|$
$tc(X)$	بستار متعدی مجموعه X
$ot(X)$	مرتبه ترتیبی مجموعه X
$=_I$	رابطه تساوی نسبت به ایده آل I
$\leq_I$	رابطه کمتر مساوی نسبت به ایده آل I
$<_I$	رابطه کوچکتری نسبت به ایده آل I
I^+	زیر مجموعه هایی از A که عضو ایده آل I نیستند. (I ایده آلی روی مجموعه A است.)
$I[B]$	تحدید ایده آل I به $A-B$ (I ایده آلی روی مجموعه A است.)
$\aleph_0$	الف صفر: کاردینال اعداد طبیعی
$\aleph_{n+1}$	کاردینال بعد از کاردینال $\aleph_n$
$\aleph_\omega$	الف امگا: اجتماع تمام $\aleph_n$ هایی که $n<\omega$
ω	امگا: همان $\aleph_0$
ω_n	همان $\aleph_n$
$lim(\alpha)$	α یک اردینال حدی است.
α^+	کاردینال بعد از α
cf	هم پایانی
$maxcof$	بزرگترین عضو از مجموعه هم پایانی های ممکن
pcf	مجموعه هم پایانی های ممکن

NS_η	ایده آل تمام زیر مجموعه های ناایستای η

فصل اول

مقدمه

نظریه مجموعه‌ها شاخه‌ای از منطق ریاضی است که به مطالعه مجموعه ها می‌پردازد. مجموعه‌ها، گردایه‌ای از اشیاء هستند. هر چند هر نوعی از اشیاء می‌توانند یک مجموعه را تشکیل دهند، اما نظریه مجموعه‌ها اغلب در مورد اشیاء مرتبط با ریاضی به کار می‌رود. زبان نظریه مجموعه‌ها را می‌توان در تعریف تقریباً همه اشیا ریاضی به کار برد. مطالعه جدید بر روی نظریه مجموعه‌ها توسط گئورگ کانتور [۱] و ریچارد ددکیند [۲] در دهه ۷۰ قرن ۱۹ میلادی شروع شد. بعد از کشف تناقض های نظریه طبیعی مجموعه ها، دستگاه های اصل موضوعی بی‌شماری در اوایل قرن ۲۰ مطرح شدند که معروف ترین آن ها اصول موضوعه زرملو-فرائنکل [۳] و اصل موضوعه انتخاب [۴] هستند. نظریه مجموعه‌ها عموماً به عنوان سیستم بنیادین ریاضیات در شکل نظریه مجموعه های زرملو-فرائنکل همراه با اصل موضوعه انتخاب به کار می‌رود. ورای نقش بنیادینش، نظریه مجموعه‌ها در جایگاه خود یکی از شاخه‌های ریاضی با جامعه پژوهش فعالی محسوب می‌شود. پژوهش‌های معاصر در نظریه مجموعه‌ها موضوع های متنوعی را شامل می‌شود که از ساختار خط اعداد حقیقی تا مطالعه سازگاری اعداد بزرگ متغیر است.

فرضیه پیوستار [۵] در ریاضیات فرضی است درباره اندازه مجموعه های بی نهایت و آن را با CH نشان میدهیم که میگوید:

$$۲^{\aleph_۰} = \aleph_۱$$

به همین ترتیب فرضیه پیوستار تعمیم یافته که آن را با GCH نشان می‌دهیم می‌گوید:

$$\forall \kappa; ۲^{\kappa} = \kappa^{+}$$

در سال ۱۹۰۰ در انجمن بین‌المللی ریاضی دانان در پاریس دیوید هیلبرت [۶] ۲۳ مسئله ریاضی ارئه کرد که اولین آنها مسئله فرض پیوستار بود و تا سال ۱۹۳۸ هیچگونه پیشرفتی در حل این مسئله وجود نداشت تا اینکه در این سال کورت گودل [۷] با ساختن مدلی سازگاری $ZFC + GCH$ را اثبات کرد. هم چنین در سال ۱۹۶۳ پاول کوهن [۸] سازگاری $ZFC + \sim CH$ را اثبات کرد.

[1] Georg Cantor
[2] Richard Dedekind
[3] Zermelo–Fraenkel
[4] Axiom of choice
[5] Continuum hypothesis
[6] David Hilbert
[7] Kurt Gödel
[8] Paul Cohen

در سال ۱۹۷۰ ایستون [۹] قضیه مهمی اثبات کرد به این صورت که اگر کلاس تمام کاردینال های منظم[۱۰] را با REG و کلاس تمام کاردینال ها را با CN نمایش دهیم و فرض کنیم F تابعی از REG به CN باشد به طوری که دارای شرایط زیر است:

$$\kappa < \lambda \Rightarrow F(\kappa) \leq F(\lambda)$$

و

$$cf(F(\kappa)) > \kappa$$

در این صورت یک مدل از ZFC مانند M وجود دارد که

$$M \models \forall \kappa; ۲^{\kappa} = F(\kappa)$$

بعد از آن این سوال پیش آمد که آیا قضیه ایستون برای کاردینال های تکین[۱۱] هم برقرار است؟ در همین راستا چند قضیه مهم به اثبات رسید. در سال ۱۹۷۴ سیلور [۱۲] قضیه ای اثبات کرد به این صورت که اگر κ یک کاردینال تکین با هم پایانی ناشمارا[۱۳] باشد و فرضیه پیوستار تعمیم یافته برای کاردینال های کمتر از κ برقرار باشد در این صورت:

$$۲^{\kappa} = \kappa^{+}$$

هم چنین در سال ۱۹۷۸ گالوین [۱۴] و هاینال [۱۵] تعمیمی از قضیه سیلور ارائه دادند به این صورت که اگر $\kappa = \aleph_{\alpha}$ یک کاردینال تکین با هم پایانی ناشمارا باشد و $\kappa \neq \aleph_{\kappa}$ و هم چنین حد قوی[۱۶] باشد در این صورت:

$$۲^{\kappa} < \aleph_{(۲^{|\alpha|})^{+}}$$

[9] Easton

[10] Regular Cardinals

[11] Singular

[12] Silver

[13] Uncountable cofinality

[14] Galvin

[15] Hajnal

[16] Strong Limit

حدود دهه ۱۹۸۰ تا ۱۹۹۰ شلاح [17] تئوری جدیدی به نام هم پایانی های ممکن[18] یا به اختصار pcf ارائه داد و دو قضیه مهم را اثبات کرد. اول اینکه اگر $\kappa = \aleph_\alpha$ یک کاردینال تکین و حد قوی باشد و $\kappa \neq \aleph_\kappa$ در این صورت:

$$۲^\kappa < \aleph_{(۲|\alpha|)^+}$$

هم چنین اثبات کرد که تحت فرض های بالا داریم:

$$۲^\kappa < \aleph_{|\alpha|^{+۴}}$$

در حالت خیلی خاص قضیه شلاح اگر κ را برابر $\aleph_\omega$ در نظر بگیریم به قضیه زیر میرسیم که در این پایان نامه مورد بررسی قرار گرفته است:

قضیه: اگر $\aleph_\omega$ حد قوی باشد در این صورت $۲^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_۴}$

در این پایان نامه این قضیه خود به دو قضیه اول و دوم تقسیم می‌شود. در فصل دوم ابتدا به مفاهیم و تعاریف پایه ای مورد نیاز می‌پردازیم و سپس مقدمه ای بر اثبات می‌آوریم. در فصل سوم قضیه اول را مورد بررسی قرار می‌دهیم، در فصل چهارم ساختاری برای pcf یک مجموعه ارائه می‌دهیم و در نهایت در فصل پنجم قضیه دوم را بررسی می‌کنیم که در نهایت اثبات کل قضیه را نتیجه می‌دهد.

[17] Shelah

[18] Possible cofinalities

فصل دوم

تعاریف و قضایای مود نیاز و مقدمه ای بر اثبات

در این فصل به بررسی مفاهیم و تعاریف مورد نیاز در این پایان نامه می‌پردازیم و سپس قضایای مورد نیاز و مورد استفاده در برهان ها را بیان می‌کنیم و در انتها مقدمه ای بر اثبات قضیه اصلی می‌آوریم.

۲-۱ مفاهیم نظریه مجموعه ها

در این بخش به مفاهیم و قضایای مورد نیاز در حوزه نظریه مجموعه ها می‌پردازیم.

تعریف ۲-۱-۱. تئوری مجموعه ها زرملو-فرائنکل شامل اصول زیر است:

۱) اصل گسترش[۱] : اگر X و Y اعضای یکسان داشته باشند آنگاه $X = Y$

۲) اصل زوجیت[۲] : به ازای هر a و b مجموعه ای وجود دارد که دقیقا شامل a و b است.

۳) طرحواره اصل جداسازی[۳] : اگر P یک خاصیت و X یک مجموعه باشد در این صورت مجموعه ای وجود دارد که شامل اعضایی از X است که خاصیت P را دارند.

۴) اصل اجتماع[۴] : به ازای هر مجموعه مانند X مجموعه اجتماع تمام اعضای X وجود دارد و با $\bigcup X$ نشان داده می‌شود.

۵) اصل مجموعه توانی[۵] : به ازای هر مجموعه مانند X مجموعه $P(X)$ وجود دارد که شامل تمامی زیر مجموعه های X است.

۶) اصل بی نهایت[۶] : مجموعه ای نامتناهی وجود دارد.

۷) طرحواره اصل جای گذاری[۷] : برای هر تابع F و هر مجموعه X مجموعه $F(X) = \{F(x) | x \in X\}$ وجود دارد.

۸) اصل نظم[۸] : هر مجموعه ناتهی ای دارای عضو مینیمال نسبت به رابطه شمول است.

[1] Axiom of Extensionality
[2] Axiom of Pairing
[3] Axiom Schema of Separation
[4] Axiom of union
[5] Axiom of Power Set
[6] Axiom of Infinity
[7] Axiom Schema of Replacement
[8] Axiom of Regularity

این تئوری را به اختصار با ZF نشان می‌دهیم و اگر اصل انتخاب را به این تئوری اضافه کنیم به آن ZFC گوییم.

تعریف ۲-۱-۲. یک فیلتر[9] روی مجموعه ناتهی S عبارت است از گردایه F از زیر مجموعه های S به طوری که دارای شرایط زیر باشد:

۱) گردایه F شامل مجموعه S باشد و شامل $\emptyset$ نباشد.

۲) اگر F شامل مجموعه های X و Y باشد در این صورت شامل اشتراک آن ها نیز هست.

۳) اگر $X, Y \subset S$ و F شامل X باشد و $X \subset Y$ در این صورت F شامل Y نیز هست.

نکته ۲-۱-۳. برای مجموعه ناتهی S داریم:

۱) اگر F یک خانواده ناتهی از فیلتر های روی S باشد در این صورت $\bigcap F$ نیز یک فیلتر روی S است.

۲) اگر C یک زنجیر[10] از فیلتر های روی S باشد در این صورت $\bigcup C$ نیز یک فیلتر روی S است.

۳) اگر $G \subset P(S)$ دارای خاصیت اشتراک متناهی[11] باشد (یعنی اشتراک تعداد متناهی از اعضای آن ناتهی باشد) در این صورت فیلتر F روی S موجود است که $G \subset F$.

تعریف ۲-۱-۴. فیلتر U روی مجموعه ناتهی S یک ابر فیلتر[12] است هرگاه به ازای هر $X \subset S$ داشته باشیم $X \in U$ یا $S - X \in U$. هم چنین فیلتر F روی S ماکسیمال است هرگاه هیچ فیلتر F' نباشد که $F \subset F'$ و $F \neq F'$.

نکته ۲-۱-۵. هر فیلتر یک ابر فیلتر است هرگاه یک فیلتر ماکسیمال باشد و هم چنین هر فیلتری قابل گسترش به یک ابر فیلتر است.

تعریف ۲-۱-۶. فرض کنیم X مجموعه ای از اردینال ها باشد و اردینال حدی $\alpha > 0$ طوری باشد که $\sup(X \cap \alpha) = \alpha$ در این صورت α یک نقطه حدی برای مجموعه X است. حال فرض کنیم κ یک

[9] Filter
[10] Chain
[11] Finite intersection property
[12] Ultrafilter

کاردینال منظم و ناشمارا باشد. در این صورت $C \subset \kappa$ یک مجموعه بسته و بی کران [۱۳] است هرگاه در κ بی کران باشد و شامل تمام نقاط حدی اش باشد که از κ کمتر است.

مجموعه $S \subset \kappa$ یک مجموعه ایستا[۱۴] است هرگاه به ازای هر مجموعه بسته و بی کران $C \subset \kappa$ داشته باشیم $S \cap C \neq \emptyset$. هم چنین یک مجموعه را ناایستا[۱۵] گوییم هرگاه ایستا نباشد.

نکته ۲-۱-۷. اشتراک تعداد متناهی از مجموعه های بسته و بی کران مجموعه ای بسته و بی کران است.

تعریف ۲-۱-۸. یک تابع اردینالی[۱۶] روی مجموعه A تابعی از یک اردینال به توی A است. تابع اردینالی f روی مجموعه S یک تابع بازگشتی[۱۷] است هرگاه برای هر $\alpha \in S$ که $\alpha > 0$ داشته باشیم $f(\alpha) < \alpha$.

لم ۲-۱-۹. [۱۸] لم فودور: فرض کنیم f یک تابع بازگشتی روی مجموعه ایستا $S \subset \kappa$ باشد. در این صورت مجموعه ایستا $T \subset S$ و $\gamma < \kappa$ موجود است به طوری که برای هر $\alpha \in T$ داریم $f(\alpha) = \gamma$.

تعریف ۲-۱-۱۰. تابع $\beth_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\beth_0(\kappa) = \kappa, \beth_1(\kappa) = 2^\kappa, \beth_2(\kappa) = 2^{2^\kappa}, \ldots, \beth_n(\kappa) = 2^{\beth_{n-1}(\kappa)}$$

اکنون منظور از نماد $\kappa \to \lambda^n_\theta$ این است که به ازای هر تابع $f : [\kappa]^n \to \theta$ وجود دارد $H \subseteq \kappa$ به طوری که $|H| = \lambda$ و H یک مجموعه همگن[۱۹] است یعنی تابع $f \restriction [H]^n$ یک تابع ثابت است.

قضیه ۲-۱-۱۱. قضیه اردوش-رادو [۲۰] : داریم:

$$(\beth_n(\kappa))^+ \to (\kappa^+)^{n+1}_\kappa$$

تعریف ۲-۱-۱۲. هم پایانی اردینال α عبارت است از کوچکترین اردینال β به طوری که دنباله ای صعودی به طول β مانند $\{\alpha_\xi | \xi < \beta\}$ وجود داشته باشد که $\lim_{\xi \to \beta} \alpha_\xi = \alpha$ هم پایانی یک اردینال

[13] Close and unbounded(club)
[14] Stationary
[15] Nonstationary
[16] Ordinal function
[17] Regressive
[18] Fodor's lemma
[19] Homogeneos
[20] Erdős-Rado

حدی است و برای هر اردینال α داریم $cf\alpha \leq \alpha$ حال اگر برای کاردینال α داشته باشیم $cf\alpha = \alpha$ گوییم α یک کاردینال منظم است و اگر $cf\alpha < \alpha$ گوییم α یک کاردینال تکین است.

۲-۲ مفاهیم نظریه مدل ها

در این بخش به مفاهیم و قضایای مورد نیاز در حوزه نظریه مدل ها می‌پردازیم.

تعریف ۲-۲-۱. یک ساختار[۲۱] $\mathcal{M}$ برای زبان L عبارت است از یک مجموعه ناتهی مانند M که به ازای هر نماد تابع، رابطه و ثابت در زبان L یک تعبیر در M داشته باشد. برای دو ساختار $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ تابع یک به یک $f : M \to N$ را یک نشاندن[۲۲] گوییم هرگاه تمام فرمول های بدون سور را در ساختار های $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ حفظ کند و اگر فرمل های دارای سور را نیز حفظ کند به آن نشاندن مقدماتی[۲۳] گوییم. هم چنین گوییم $\mathcal{M}$ یک زیر ساخت[۲۴] $\mathcal{N}$ است هرگاه $M \subseteq N$ و تابع شمول $i : M \to N$ یک نشاندن باشد. اگر i یک نشاندن مقدماتی باشد $\mathcal{M}$ نیز یک زیر ساخت مقدماتی[۲۵] از $\mathcal{N}$ است.

تعریف ۲-۲-۲. برای زبان داده شده L تعریف می‌کنیم:

$$\parallel L \parallel := \max\{\aleph_0, |L|\}$$

قضیه ۲-۲-۳. قضیه لون هایم اسکولم [۲۶] کاهشی: اگر تئوری T ارضا پذیر باشد مدلی با اندازه کمتر یا مساوی $\parallel L \parallel$ دارد.

قضیه ۲-۲-۴. قضیه لون هایم اسکولم تارسکی افزایشی: اگر تئوری T ارضا پذیر و دارای مدلی نا متناهی باشد آنگاه برای هر کاردینال نامتناهی κ که $\parallel L \parallel \leq \kappa$ مدلی از سایز κ دارد.

تعریف ۲-۲-۵. برای هر کاردینال θ تعریف می‌کنیم:

$$H(\theta) = \{X \mid |tc(X)| < \theta\}$$

[21] Structure
[22] Embedding
[23] Elementary elembedding
[24] Substructure
[25] Elementary substructure
[26] Lowenheim skolem

این مجموعه برای کاردینال های منظم و ناشمارا مدلی از ZFC به جز اصل مجموعه توانی است (که آن را با ZFC^- نشان می‌دهیم) و در واقع داریم:

$$\theta \in REG, \theta > \omega \Rightarrow H(\theta) \models ZFC^-$$

۲-۳ مقدمه ای بر اثبات

قضیه اصلی مورد بحث در این پایان نامه قضیه ای از شلاح است که در آن با فرض اینکه $\aleph_\omega$ حد قوی است یک کران بالا برای $2^{\aleph_\omega}$ پیدا می‌کند و در واقع طبق این قضیه داریم:

$$\forall n < \omega; 2^{\aleph_n} < \aleph_\omega \Rightarrow 2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}$$

فرض کنیم A یک مجموعه نامتناهی باشد. یک تابع اردینالی روی مجموعه A تابعی از A به توی یک اردینال است. فرض کنیم D یک ابر فیلتر روی مجموعه A باشد. اکنون رابطه $\leq_D$ را روی توابع اردینالی روی A به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f \leq_D g \Leftrightarrow \{a \in A | f(a) \leq g(a)\} \in D$$

هم چنین تعریف می‌کنیم:

$$\prod \aleph_n = \{f : \omega \rightarrow \bigcup \aleph_n | f(n) \in \omega_n\}$$

اکنون به ازای هر ابر فیلتر D روی مجموعه A مجموعه $\prod \aleph_n / D$ یک مجموعه مرتب خطی است که دارای هم پایانی $cof(\prod \aleph_n / D)$ است. اکنون مجموعه تمام مقادیر $cof(\prod \aleph_n / D)$ برای تمام ابر فیلتر های ممکن روی مجموعه A را در نظر می‌گیریم و بزرگترین عضو آن را با $\max cof \prod \aleph_n$ نمایش می‌دهیم. حال قضیه مورد بحث را به دو قضیه زیر تقسیم می‌کنیم و در فصل های بعد به بررسی آن ها می‌پردازیم.

قضیه اول: اگر $\aleph_\omega$ حد قوی باشد در این صورت داریم:

$$۲^{\aleph_\omega} = \max cof \prod \aleph_n$$

قضیه دوم: اگر $\aleph_\omega$ حد قوی باشد در این صورت داریم:

$$\max cof \prod \aleph_n < \aleph_{\omega_۴}$$

فصل سوم

اثبات قضیه اول

در این فصل ابتدا تعاریف مورد نیاز را ارائه می‌کنیم سپس ایده آل های نا ایستا را بررسی کرده و در نهایت با تعریف مجموعه $pcfA$ به اثبات قضیه اول می‌پردازیم.

۱-۳ توابع اردینالی تحت ایده آل ها

در این بخش ابتدا به تعاریف موردنیاز می پردازیم و سپس چند قضیه بنیادی که برای اثبات قضیه اصلی نیاز است را اثبات می‌کنیم.

۱-۱-۳ وجود کوچکترین کران بالا

در این بخش برای یک ایده آل[1] I روی یک مجموعه A یک رابطه ترتیبی $\leq_I$ روی توابع اردینالی روی A تعریف کرده و وجود کوچکترین کران بالا را برای یک دنباله از چنین توابعی بررسی می‌کنیم.

تعریف ۳-۱-۱. فرض کنیم A یک مجموعه نامتناهی باشد. یک ایده آل روی A زیر مجموعه ای از $P(A)$ است که تحت زیر مجموعه بودن و اجتماع متناهی بسته باشد. اگر I یک ایده آل روی A باشد، قرار می‌دهیم:

$$I^+ = \{X \subseteq A | X \notin I\}$$

روابط ترتیب جزئی زیر را روی مجموعه تمام توابع اردینالی روی مجموعه A تعریف میکنیم:

$$f =_I g \Leftrightarrow \{a \in A | f(a) \neq g(a)\} \in I$$

$$f \leqslant_I g \Leftrightarrow \{a \in A | f(a) > g(a)\} \in I$$

$$f \lneqq_I g \Leftrightarrow f \leqslant_I g, \{a \in A | f(a) < g(a)\} \in I^+$$

$$f <_I g \Leftrightarrow \{a \in A | f(a) \geqslant g(a)\} \in I$$

فرض کنیم S مجموعه ای از توابع اردینالی روی A باشد. دراین صورت g یک کران بالا برای مجموعه S نسبت به رابطه $\leqslant_I$ است هرگاه:

$$\forall f \in S; f \leqslant_I g$$

[1] Ideal

و g کوچکترین کران بالای S است هرگاه کران بالای S باشد و به ازای هر کران بالای S مانند h داشته باشیم: $g \leqslant_I h$

لم **۳-۱-۲.** فرض کنیم λ یک کاردینال منظم باشد و $\lambda > ۲^{|A|}$ دراین صورت هر دنباله صعودی مانند $F = \{f_a | \alpha < \lambda\}$ نسبت به رابطه $\leqslant_I$ کوچکترین کران بالا دارد.

برهان. فرض کنیم $G = \{g_\xi | \xi < \theta\}$ ماکسیمال دنباله نزولی از کران بالاهای F باشد. نشان می‌دهیم G کوچکترین عضو دارد.

ادعا: $\theta \leqslant ۲^{|A|}$

برهان: به برهان خلف فرض کنیم برقرار نباشد تعریف می‌کنیم $F : [(۲^{|A|})^+]^۲ \longrightarrow |A|$ به طوری که برای هر $\xi < \eta$ داشته باشیم: $F(\xi, \eta) = a$ که در آن $g_\xi(a) > g_\eta(a)$ دراین صورت طبق قضیه اردوش-رادو اگر قرار دهیم $n = ۱, k = |A|$ داریم:

$$\exists X \subseteq \left(۲^{|A|}\right)^+ ; |X| = |A|^+, \exists a \in A \forall (\xi, \eta) \in [X]^۲ ; F(\xi, \eta) = a$$

اکنون فرض کنیم $\xi_۰ < \xi_۱ < \xi_۲ < \dots$ دنباله ای صعودی از اردینال ها در X باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$g_{\xi_۰}(a) > g_{\xi_۱}(a) > g_{\xi_۲}(a) > \dots$$

یعنی دنباله ای از اردینال ها پیدا شد که اکیدا نزولی است که تناقض است. پس فرض خلف باطل و ادعا برقرار است.

اکنون کافیست نشان دهیم برای هر اردینال حدی مانند η که $\eta < \theta$ مجموعه $\{g_\xi | \xi < \eta\}$ کران پایینی مانند g دارد و در این صورت نتیجه می‌شود θ یک اردینال تالی مانند $\theta = \theta_۰ + ۱$ است و در نتیجه $g_{\theta_۰}$ کوچکترین کران بالای F خواهد بود.

ادعا: فرض کنیم η اردینالی حدی است و $\eta \leq \theta$. دراین صورت مجموعه $\{g_\xi | \xi < \eta\}$ یک کران پایین مانند g دارد.

برهان: برای هر $a \in A$ تعریف می‌کنیم:

$$S_a = \{g_\xi(a) | \xi < \eta\}$$

و

$$H = \prod_{a \in A} S_a = \{h : A \to \bigcup_{a \in A} S_a | \forall a \in A; h(a) \in S_a\}$$

در این صورت داریم:

$$|H| \leq \eta^{|A|} \leq (۲^{|A|})^{|A|} = ۲^{|A|} < \lambda$$

اکنون به ازای هر $h \in H$ اگر h یک کران بالای F نباشد $\alpha_h < \lambda$ را طوری انتخاب می‌کنیم بطوری که $h \not\leq_I f_{\alpha_h}$. اکنون قرار می‌دهیم $\alpha = \sup\{\alpha_h | h \in H\}$ و تابع $g : A \to \bigcup_{a \in A} S_a$ را به این صورت تعریف میکنیم که $g(a)$ برابر کوچکتوین عضو از S_a باشد که از $f_\alpha(a)$ بزرگتر یا مساوی است. حال طبق تعریف $g \leq_I f_\alpha \leq_I f_{\alpha_g}$ پس g کران بالای F است. از طرفی طبق تعریف برای $\xi < \eta$ و برای تمام $a \in A$ داریم $g_\xi(a) \in S_a$ و از طرفی چون $g_\xi \leq_I f_\alpha$ پس $\{a \in A | f_\alpha(a) > g_\xi(a)\} \in I$ و $\{a \in A | g(a) > g_\xi(a)\} \subseteq \{a \in A | f_\alpha(a) \geq g_\xi(a)\}$ و در نتیجه $g \leq_I g_\xi$ پس g یک کران پایین برای مجموعه $\{g_\xi | \xi < \eta\}$ می‌باشد. □

قضیه **۳-۱-۳.** فرض کنیم g کوچکترین کران بالا دنباله $\{f_\alpha | \alpha < \lambda\}$ باشد. در این صورت g دارای خاصیت زیر است:

$$h <_I g \Rightarrow \exists \alpha < \lambda; h <_I f_\alpha$$

در این صورت می‌گوییم دنباله $\{f_\alpha | \alpha < \lambda\}$ در g هم پایان است.

برهان. فرض کنیم h دلخواه به گونه ای انتخاب شود که $h <_I g$. برای هر $\alpha < \lambda$ قرار می‌دهیم:

$$X_\alpha := \{a \in A | h(a) < f_\alpha(a)\}$$

اکنون داریم $|\{X_\alpha | \alpha < \lambda\}| = ۲^{|A|} < \lambda$ پس مجموعه های X و $K \subseteq \lambda$ وجود دارند به طوری که:

$$|K| = \lambda, \forall \alpha \in K; X_\alpha = X$$

اکنون کافیست ثابت کنیم $A \backslash X \in I$. به برهان خلف فرض کنیم نباشد و فرض کنیم g' تابعی باشد که

روی X با g و روی $A\backslash X$ با h برابر باشد. در این صورت اولا $g' \lneqq_I g$ زیرا:

$$\{a\in A|g'(a)>g(a)\}=\{a\in X|g(a)>g(a)\}\cup\{a\in A\backslash X|h(a)>g(a)$$

$$=\emptyset\cup\{a\in A\backslash X|h(a)>g(a)\}$$

$$=\{a\in A\backslash X|h(a)>g(a)\}\subseteq\{a\in A|h(a)>g(a)\}\in I(h<_I g)$$

$$\Rightarrow\{a\in A\backslash X|h(a)>g(a)\}\in I$$

$$\Rightarrow\{a\in A|g'(a)>g(a)\}\in I\Rightarrow g'\leq_I g$$

و بعلاوه:

$$\{a\in A|g'(a)<g(a)\}=\{a\in X|g(a)<g(a)\}\cup\{a\in A\backslash X|h(a)<g(a)\}$$

$$=\emptyset\cup\{a\in A\backslash X|h(a)<g(a)\}$$

$$=\{a\in A\backslash X|h(a)<g(a)\}\subseteq A\backslash X\in I^+$$

$$\Rightarrow\{a\in A\backslash X|h(a)<g(a)\}\in I^+$$

$$\Rightarrow\{a\in A|g'(a)<g(a)\}\in I^+$$

بنابراین $g' \lneqq_I g$

ثانیا $\forall\alpha<\lambda; f_\alpha\leqslant_I g'$ برای اثبات f_α را دلخواه و از این به بعد ثابت در نظر می‌گیریم. همچنین چون K بی کران است کافیست α را در K در نظر بگیریم. در این صورت داریم:

$$\{a\in A|f_\alpha(a)>g'(a)\}=\{a\in X|f_\alpha(a)>g(a)\}\cup\{a\in A\backslash X|f_\alpha(a)>h(a)\}$$

$$=\{a\in X|f_\alpha(a)>g(a)\}\cup\{a\in A\backslash X_\alpha|f_\alpha(a)>h(a)\}$$

$$= \{a \in X | f_\alpha(a) > g(a)\} \cup \emptyset$$

$$= \{a \in X | f_\alpha(a) > g(a)\} \subseteq \{a \in A | f_\alpha(a) > g(a)\} \in I(f_\alpha \leq_I g)$$

$$\Rightarrow \{a \in X | f_\alpha(a) > g(a)\} \in I$$

$$\Rightarrow \{a \in A | f_\alpha(a) > g'(a)\} \in I$$

$$\Rightarrow f_\alpha \leq_I g'$$

که این یعنی g' کران بالای $\{f_\alpha | \alpha < \lambda\}$ است. پس ثابت کردیم که g' یک کران بالای $\{f_\alpha | \alpha < \lambda\}$ است و $g \lneqq_I g'$ که با کوچکترین کران بالای g بودن در تناقض است. پس فرض خلف باطل و قضیه تمام است. □

۳-۱-۲ ایده آل های تحدید شده

در این بخش ابتدا ایده آل های تحدید شده را تعریف کرده و سپس لم جداسازی[۲] را بیان می‌کنیم.

تعریف **۳-۱-۴**. فرض کنیم S یک مجموعه از توابع اردینالی روی A باشد و g یک کران بالای S نسبت به رابطه $\leq_I$ باشد. در این صورت می‌گوییم S تحت g کران دار است هرگاه کران بالایی از S مانند h موجود باشد به طوری که $h <_I g$. اکنون فرض کنیم $X \subseteq A$ به طوری که $X \notin I$ در این صورت ایده آل تحدید شده به X را که با $I \restriction X$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I \restriction X = \langle I \cup \{A \backslash X\} \rangle = \{B \cup C | B \in I, C \subseteq A \backslash X\}$$

اکنون مفاهیم کوچکتری، هم پایانی، کرانداری و غیره روی X نسبت به این ایده آل در نظر گرفته می‌شود.

نتیجه **۳-۱-۵**. (لم جدا سازی): فرض کنیم I یک ایده آل روی A و λ یک کاردینال منظم باشد که $\lambda > 2^{|A|}$ و همچنین فرض کنیم g کران بالایی برای دنباله صعودی $\{f_\alpha | \alpha < \lambda\}$ نسبت به رابطه $\leq_I$ باشد. در این صورت یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد:

۱) دنباله $\{f_\alpha | \alpha < \lambda\}$ تحت g بسته است.

[2] Splitting lemma

۲) دنباله $\{f_\alpha|\alpha<\lambda\}$ در g هم پایان است.

۳) مجموعه A به صورت $A=X\cup Y$ است به طوری که دنباله $\{f_\alpha|\alpha<\lambda\}$ روی X تحت g بسته است و روی Y در g هم پایان است.

برهان. فرض کنیم دو حالت اول رخ نمی‌دهد. نشان می‌دهیم حالت سوم برقرار است. فرض کنیم f کوچکترین کران بالای دنباله $\{f_\alpha|\alpha<\lambda\}$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$X:=\{a\in A|f(a)<g(a)\}$$

و

$$Y=A\backslash X$$

اکنون چون f کوچکترین کران بالای دنباله $\{f_\alpha|\alpha<\lambda\}$ است پس $X\notin I$ و دنباله $\{f_\alpha|\alpha<\lambda\}$ روی X تحت g بسته است. حال نشان می‌دهیم که این دنباله روی Y در g هم پایان است. فرض کنیم $h<_{I\restriction Y}g$ باید نشان دهیم $\alpha<\lambda$ وجود دارد به طوری که $h<_{I\restriction Y}f_\alpha$ باشد. چون $h<_{I\restriction Y}g$ داریم:

$$\{a\in A|h(a)\geq g(a)\}\in I\restriction Y$$

از طرفی

$$\{a\in A|h(a)\geq g(a)\}=\{a\in X|h(a)\geq g(a)\}\cup\{a\in Y|h(a)\geq g(a)\}$$

هم چنین داریم:

$$\{a\in X|h(a)\geq g(a)\}\subseteq X=A\backslash Y,\{a\in Y|h(a)\geq g(a)\}\in I$$

حال فرض کنیم تابع h' تابعی باشد که روی Y با h و روی X با تابع ثابت صفر برابر باشد. در این صورت:

$$\{a\in A|h'(a)\geq f(a)\}=\{a\in X|\circ=h'(a)\geq f(a)\}\cup\{a\in Y|h(a)=h'(a)\geq f(a)\}$$

$$= \emptyset \cup \{a \in Y | h(a) \geq f(a)\}$$

$$= \{a \in Y | h(a) \geq f(a)\}$$

از طرفی f کوچکترین کران بالا دنباله $\{f_\alpha | \alpha < \lambda\}$ است پس $f <_I g$ و ثابت کردیم $\{a \in Y | h(a) \geq g(a)\} \in I$ پس $\{a \in A | h'(a) \geq f(a)\} \in I$ و در نتیجه $h' <_I f$ اما f کوچکترین کران بالا است پس $\alpha < \lambda$ موجود است که $h' <_I f_\alpha$ یعنی $\{a \in A | h'(a) \geq f_\alpha(a)\} \in I$ نشان می‌دهیم این همان α مورد نظر است یعنی $h <_{I \restriction Y} f_\alpha$. داریم:

$$\{a \in A | h(a) \geq f_\alpha(a)\} = \{a \in X | h(a) \geq f_\alpha(a)\} \cup \{a \in Y | h(a) \geq f_\alpha(a)\}$$

اما $\{a \in X | h(a) \geq f_\alpha(a)\} \subseteq X = A \backslash Y$ و $\{a \in y | h(a) = h'(a) \geq f_\alpha(a)\} \in I$ بنابراین $\{a \in A | h(a) \geq f_\alpha(a)\} \in I \restriction Y$ و در نتیجه $h <_{I \restriction Y} f_\alpha$ □

۳-۱-۳ مقیاس ها و ایده آل های جهت دار

در این بخش ابتدا به تعریف مقیاس[۳] ها، ایده آل های جهت دار[۴] و هم پایانی راستین[۵] می‌پردازیم و سپس لم مهمی را با استفاده از لم جداسازی اثبات می‌کنیم. برای ادامه این بخش حاصل ضرب تحویل یافته[۶] $\prod_{a \in A} \lambda_a / I$ را در نظر می‌گیریم که در آن هر λ_a یک اردینال حدی و I یک ایده آل روی A است.

تعریف ۳-۱-۶. فرض کنیم λ یک کاردینال منظم باشد. یک λ - مقیاس نسبت به ایده آل I روی مجموعه $X \subseteq A$ که $X \notin I$ عبارت است از یک دنباله $\{f_\alpha | \alpha < \lambda\} \subseteq \prod_{a \in A} \lambda_a$ که نسبت به رابطه $<_I$ روی X اکیدا صعودی و هم پایان است. یک λ - مقیاس عبارت است از یک λ - مقیاس روی A و هرگاه یک λ - مقیاس موجود باشد گوییم $\prod_{a \in A} \lambda_a / I$ دارای هم پایانی راستین λ است. هم چنین گوییم $\prod_{a \in A} \lambda_a / I$ یا به طور ساده تر I ایده آلی λ - جهت دار است هرگاه هر زیر مجموعه S از سایز

[3] Scale
[4] Directed ideal
[5] True cofinality
[6] Reduced products

کمتر از λ کران دار باشد. برای $B \subset A$ که $A - B \in I^+$ تعریف می‌کنیم:

$$I[B] = I \restriction (A - B) = \langle I \cup \{B\} \rangle = \{X \cup Y | X \in I, Y \subseteq B\}$$

لم **۳-۱-۷**. فرض کنیم λ یک کاردینال منظم باشد که $\lambda > 2^{|A|}$ و فرض کنیم I ایده آلی λ - جهت دار باشد. در این صورت یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد:

۱) ایده آل I یک ایده آل λ^+ - جهت دار است.

۲) یک λ - مقیاس وجود دارد.

۳) مجموعه $B \in I^+$ که $A - B \in I^+$ وجود دارد که I یک λ - مقیاس روی B دارد و $I[B]$ ایده آلی λ^+ - جهت دار است.

برهان. فرض می‌کنیم دو حالت اول رخ ندهد و نشان می‌دهیم حالت سوم برقرار است. پس فرض کنیم I ایده آلی λ - جهت دار باشد اما λ^+ - جهت دار نباشد. پس مجموعه S از اندازه λ موجود است که کران دار نیست. از طرفی چون I یک ایده آل λ - جهت دار است، هر زیر مجموعه S از اندازه کمتر از λ دارای یک کران بالا است. با استقرا روی $\alpha < \lambda$ دنباله صعودی $\{f_\alpha | \alpha < \lambda\}$ را نسبت به رابطه $\leq_I$ به گونه ای می‌سازیم که داشته باشیم:

$$\forall f \in S \exists \alpha < \lambda; f \leq_I f_\alpha$$

برای این منظور فرض کنیم $S = \bigcup_{\alpha<\lambda} S_\alpha$ که برای هر $\alpha < \beta < \lambda$ داریم $S_\alpha \subseteq S_\beta$ و $|S_\alpha| < \lambda$. هم چنین f_0 را یک کران بالای S_0 در نظر می‌گیریم و فرض کنیم $\alpha < \lambda$ و $\{f_\beta | \beta < \alpha\}$ تعریف شده باشند. f_α را یک کران بالای $S_\alpha \cup \langle f_\beta | \beta < \alpha \rangle$ نسبت به رابطه $\leq_I$ در نظر می‌گیریم. حال دنباله $\{f_\alpha | \alpha < \lambda\}$ کران دار نیست و فرض کردیم هیچ λ - مقیاسی وجود ندارد پس این دنباله نباید در S هم پایان باشد و در نتیجه طبق لم جداسازی $Y \in I^+$ وجود دارد که $\{f_\alpha | \alpha < \lambda\}$ یک λ - مقیاس روی Y است. مجموعه G را مجموعه تمام $Y \in I^+$ هایی در نظر می‌گیریم که یک λ - مقیاس روی آن ها وجود داشته باشد و به ازای هر Y فرض کنیم $\{f^Y_\alpha | \alpha < \lambda\}$ یک λ - مقیاس روی Y باشد. اکنون تعریف می‌کنیم:

$$S' := \{f^Y_\alpha | \alpha < \lambda, Y \in G\}$$

داریم $|\lambda| = S'$ و دوباره دنباله اکیدا صعودی $\{f'_\alpha|\alpha < \lambda\}$ را این بار برای S' می‌سازیم طوری که شرط زیر را داشته باشد:

$$\forall f \in S \exists \alpha < \lambda; f \leq_I f'_\alpha$$

پس با توجه به لم جداسازی $A = X \cup B$ که $\{f_\alpha|\alpha < \lambda\}$ روی X کران دار و روی B هم پایان است. پس B یک λ - مقیاس دارد. اکنون کافیست نشان دهیم هر مجموعه از سایز λ روی X کران دار است. به برهان خلف فرض کنیم نباشد و مجموعه ای از سایز λ باشد که روی X کران دار نباشد اکنون مراحل قبل را برای این مجموعه انجام می‌دهیم و مجموعه $Z \subseteq X$ را پیدا می‌کنیم که یک مقیاس دارد اما ما فرض کردیم X کران دار است که تناقض است. پس فرض خلف باطل و هر مجموعه از سایز λ روی X کران دار است که این یعنی $I[B]$ ایده آلی λ^+ - جهت دار است. □

۳-۲ هم پایانی های ناشمارا و ایده آل های ناایستا

در این بخش فرض می‌کنیم I ایده آل تشکیل شده از مجموعه های ناایستا باشد و وجود مقیاس ها را برای حاصل ضرب $\aleph_n$ ها نسبت به این ایده آل بررسی می‌کنیم.

قضیه ۳-۲-۱. فرض کنیم κ یک کاردینال منظم ناشمارا باشد و $\aleph_\eta$ یک کاردینال تکین با هم پایانی κ باشد و $2^\kappa < \aleph_\eta$ و هم چنین فرض کنیم NS_η ایده آل تمام زیر مجموعه های ناایستای η باشد. در این صورت $\prod_{\xi<\eta} \aleph_{\xi+1}/I$ دارای هم پایانی راستین $\aleph_{\eta+1}$ است.

برهان. داریم:

$$cf(\eta) = cf(\aleph_\eta) = \kappa \Rightarrow \exists \{\eta_\xi|\xi < \kappa\}; \sup_{\xi<\kappa} \eta_\xi = \eta$$

دنباله پیوسته و صعودی $\{\eta_\xi|\xi < \kappa\}$ با حد η که در شرط بالا صدق می‌کند را دلخواه و ازین به بعد ثابت در نظر می‌گیریم به طوری که شرط $2^\kappa < \aleph_{\eta_0}$ را هم داشته باشد.

ادعا: اگر $\prod_{\theta<\kappa} \aleph_{\eta_\theta+1}/NS_\kappa$ دارای هم پایانی راستین $\aleph_{\eta+1}$ باشد آنگاه $\prod_{\xi<\eta} \aleph_{\xi+1}/NS_\eta$ دارای هم پایانی راستین $\aleph_{\eta+1}$ است.

برهان: فرض کنیم: $\{f_\alpha|\alpha < \aleph_{\eta+1}\} \subseteq \prod_{\theta<\kappa} \aleph_{\eta_\theta+1}$ یک $\aleph_{\eta+1}$ - مقیاس باشد. به ازای $\alpha < \aleph_{\eta+1}$ و $\xi < \eta$ تابع $f'_\alpha \in \prod_{\xi<\eta} \aleph_{\xi+1}$ را به صورت $f'_\alpha(\xi) = f_\alpha(\theta)$ هرگاه $\theta < \kappa$ موجود باشد که $\xi = \eta_\theta$ و در

غیر این صورت مساوی تابع ثابت صفر تعریف می‌کنیم. در این صورت:

$$\alpha < \beta \Rightarrow f_\alpha <_{NS_\kappa} f_\beta \Rightarrow \{\theta < \kappa | f_\alpha(\theta) \geqslant f_\beta(\theta)\} \in NS_\kappa$$

یعنی مجوعه بسته و بی کران $C \subseteq \kappa$ وجود دارد به طوری که:

$$C \cap \{\theta < \kappa | f_\alpha(\theta) \geqslant f_\beta(\theta)\} = \emptyset$$

اکنون تعریف می‌کنیم:

$$C' := \{\eta_\theta | \theta \in C\} \subseteq \eta$$

که به دلیل بسته و کران دار بودن C و پیوسته بودن دنباله $\{\eta_\xi | \xi < \kappa\}$ مجموعه C' نیز بسته و کران دار است. اکنون برای $\theta \in C$ داریم:

$$f'_\alpha(\eta_\theta) = f_\alpha(\theta) < f_\beta(\theta) = f'_\beta(\eta_\theta)$$

$$\Rightarrow \eta_\theta \notin \{\xi < \eta | f'_\alpha(\xi) \geq f'_\beta(\xi)\}$$

$$\Rightarrow C' \cap \{\xi < \eta | f'_\alpha(\xi) \geq f'_\beta(\xi)\} = \emptyset$$

$$\Rightarrow \{\xi < \eta | f'_\alpha(\xi) \geq f'_\beta(\xi)\} \in NS_\eta$$

$$\Rightarrow f'_\alpha <_{NS_\eta} f'_\beta$$

بنابراین چون $\{f_\alpha | \alpha < \aleph_{\eta+1}\}$ یک $\aleph_{\eta+1}$ - مقیاس روی κ است پس $\{f'_\alpha | \alpha < \aleph_{\eta+1}\}$ یک $\aleph_{\eta+1}$ - مقیاس روی η است و در نتیجه $\prod_{\xi<\eta} \aleph_{\eta+1}/NS_\eta$ دارای هم پایانی راستین $\aleph_{\eta+1}$ است.

ادعا: $\prod_{\xi<\kappa} \aleph_{\eta_\xi+1}/NS_\kappa$ یک حاصل ضرب $\aleph_{\eta+1}$ - جهت دار است.

برهان: فرض کنیم:

$$\{f_\alpha | \alpha < \aleph_\eta\} \subseteq \prod_{\xi<\kappa} \aleph_{\eta_\xi+1}/NS_\kappa$$

نشان می‌دهیم $f \in \prod_{\xi<\kappa} \aleph_{\eta_\xi+1}/NS_\kappa$ وجود دارد که برای هر $\alpha < \aleph_\eta$ داشته باشیم: $f_\alpha <_{NS_\kappa} f$.

اکنون تابع f را به این صورت تعریف می‌کنیم که برای هر $\xi < \kappa$ داشته باشیم:

$$f(\xi) := \sup\{f_\alpha(\xi) | \alpha < \aleph_{\eta_\xi}\} + 1$$

اکنون با توجه به اینکه $\aleph_{\eta_\xi+1}$ یک کاردینال منظم است، به ازای هر $\xi < \kappa$ داریم:

$$\forall \xi < \kappa; f_\alpha(\xi) \in \prod_{\xi<\kappa} \aleph_{\eta_\xi+1}$$

$$\Rightarrow f_\alpha(\xi) < \aleph_{\eta_\xi+1}$$

$$\Rightarrow \sup\{f_\alpha(\xi) | \alpha < \aleph_{\eta_\xi}\} < \aleph_{\eta_\xi+1}$$

$$\Rightarrow f(\xi) < \aleph_{\eta_\xi+1}$$

$$\Rightarrow f \in \prod_{\xi<\kappa} \aleph_{\eta_\xi+1}$$

اکنون نشان می‌دهیم برای هر $\alpha < \aleph_\eta$ داریم $f_\alpha <_{NS_\kappa} f$. برای این منظور فرض کنیم $\alpha < \aleph_\eta$ دلخواه و ازین به بعد ثابت باشد. داریم:

$$\alpha < \aleph_\eta \Rightarrow \exists \xi_0 < \kappa; \alpha < \aleph_{\eta_{\xi_0}}$$

$$\Rightarrow \forall \xi_0 < \xi < \kappa; f_\alpha(\xi) < f(\xi)$$

بنا بر این اگر قرار دهیم $C := (\xi_0, \kappa)$ داریم:

$$\Rightarrow C \cap \{\xi < \kappa | f_\alpha(\xi) \geq f(\xi)\} = \emptyset$$

$$\Rightarrow \{\xi < \kappa | f_\alpha(\xi) \geq f(\xi)\} \in NS_\kappa$$

$$\Rightarrow f_\alpha <_{NS_\kappa} f$$

بنابراین f کران بالایی برای مجموعه $\{f_\alpha | \alpha < \aleph_\eta\}$ است و درنتیجه $\{f_\alpha | \alpha < \aleph_\eta\}$ کران دار است و

این یعنی $\prod_{\xi<\kappa}\aleph_{\eta_\xi+1}/NS_\kappa$ یک حاصل ضرب $\aleph_{\eta+1}$ - جهت دار است.
اکنون نشان می‌دهیم $\prod_{\xi<\kappa}\aleph_{\eta_\xi+1}/NS_\kappa$ یک $\aleph_{\eta+1}$ - مقیاس دارد. به برهان خلف فرض کنیم این طور نباشد. پس بنا بر لم (۷-۱-۳) مجموعه ناایستا $S_\circ \subseteq \kappa$ وجود دارد که $\prod_{\xi<\kappa}\aleph_{\eta_\xi+1}/NS_\kappa[S_\circ]$ یک حاصل ضرب $\aleph_{\eta+2}$ - جهت دار است و این یعنی $\prod_{\xi<\kappa}\aleph_{\eta_\xi+1}/NS_\kappa$ روی $S_\circ$ یک حاصل ضرب $\aleph_{\eta+2}$ - جهت دار است. اکنون برای هر اردینال حدی مانند β مجموعه بسته و بی کران $C_\beta \subseteq \beta$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $ot(C_\beta)=cf(\beta)$ و برای هر $\alpha<\aleph_{\eta+1}$ تعریف می‌کنیم:

$$Z_\alpha := \{C_\beta\cap\alpha | \beta<\aleph_{\eta+1}\}$$

حال با استقرا روی α دنباله اکیدا صعودی $\{f_\alpha|\alpha<\aleph_{\eta+1}\}$ را روی $S_\circ$ می‌سازیم. برای این منظور فرض کنیم $\{f_\nu|\nu<\alpha\}$ ساخته شده باشد. در این صورت برای هر $E\in Z_\alpha$ فرض کنیم g_E^α تابعی باشد که در نقطه ξ اگر $|E|<\aleph_{\eta_\xi+1}$ برابر $\sup\{f_\nu(\xi)|\nu\in E\}$ باشد و در غیر این صورت برابر صفر باشد. بنابراین داریم:

$$|\{g_E^\alpha|E\in Z_\alpha\}\cup\{f_\nu|\nu<\alpha\}|<\aleph_{\eta_\xi+1}$$

اما ثابت کردیم که $\prod_{\xi<\kappa}\aleph_{\eta_\xi+1}/NS_\kappa$ یک حاصل ضرب $\aleph_{\eta+1}$ - جهت دار است پس مجموعه فوق دارای کران بالا است. فرض کنیم f_α همان کران بالای یافت شده باشد. اکنون بنا بر لم (۲-۱-۳) می‌دانیم مجموعه $\{f_\alpha|\alpha<\aleph_{\eta+1}\}$ دارای کوچکترین کران بالاست. فرض کنیم $h\in\prod_{\xi<\kappa}\aleph_{\eta_\xi+1}/NS_\kappa$ کوچکترین کران بالای مجموعه فوق باشد.
ادعا: برای هر اردینال حدی مانند ξ کاردینال $\aleph_{\eta_\xi}$ تکین است.
برهان: چون ξ یک اردینال حدی است داریم:

$$cf(\aleph_{\eta_\xi})=cf(\xi),\xi<\kappa,\eta_\circ>2^\kappa\Rightarrow\aleph_{\eta_\xi}\geq\aleph_{\eta_\circ}>2^\kappa>\kappa>cf(\xi)=cf(\aleph_{\eta_\xi})\Rightarrow cf(\aleph_{\eta_\xi})<\aleph_{\eta_\xi}$$

بنابراین $\aleph_{\eta_\xi}$ یک کاردینال تکین است.
پس چون $\aleph_{\eta_\xi}$ یک کاردینال تکین است و $h(\xi)<\aleph_{\eta_\xi+1}$ داریم $cf(h(\xi))<\aleph_{\eta_\xi}$ اکنون فرض کنیم f تابعی از $S_\circ$ به κ باشد به طوری که:

$$f(\xi)=\min\{\theta<\xi|cf(h_\xi)<\aleph_{\eta_\theta}\}$$

بنابراین برای هر ξ داریم $f(\xi) < \xi$ پس بنا بر لم فودور مجموعه ناایستا $S \subseteq S_0$ و $\theta < \kappa$ وجود دارد به طوری که

$$\forall \xi \in S; f(\xi) = \theta \Rightarrow cf(h_\xi) < \aleph_{\eta_\theta}$$

فرض کنیم $\gamma = \eta_\theta$ پس $\forall \xi \in S; cf(h_\xi) \leq \aleph_\gamma$ اکنون مجموعه هم پایان $D_\xi \subseteq h(\xi)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $|D_\xi| \leq \aleph_\gamma$ اکنون با استقرا روی ν دنباله اکیدا صعودی $\{h_\nu | \nu < \aleph_{\gamma+1}\}$ که $\forall \nu; h_\nu \in \prod_{\xi \in S} D_\xi$ و دنباله پیوسته و صعودی $\{\alpha(\nu) | \nu < \aleph_{\gamma+1}\}$ را طوری می‌سازیم که روی S شرط زیر را داشته باشد:

$$\forall \nu < \aleph_{\gamma+1}; f_{\alpha(\nu)} <_{NS_\kappa} h_\nu <_{NS_\kappa} f_{\alpha(\nu+1)}$$

فرض کنیم $\{h_{\nu'} | \nu' < \nu\}$ و $\{\alpha_{\nu'} | \nu' < \nu\}$ ساخته شده باشند. برای اردینال حدی ν تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(\nu) := \sup\{\alpha(\nu') | \nu' < \nu\}$$

اکنون چون h کوچکترین کران بالای مجموعه $\{f_\alpha | \alpha < \aleph_{\eta+1}\}$ است روی S داریم:

$$f_{\alpha(\nu)} <_{NS_\kappa} h \Rightarrow \{\xi < \kappa | f_{\alpha(\nu)}(\xi) \geq h(\xi)\} \in NS_\kappa$$

یعنی مجموعه بسته و بی کران $C \subseteq \kappa$ موجود است به طوری که:

$$C \cap \{\xi < \kappa | f_{\alpha(\nu)}(\xi) \geq h(\xi)\} = \emptyset \Rightarrow \forall \xi \in C \cap S; f_{\alpha(\nu)}(\xi) < h(\xi)$$

و $D_\xi \subseteq h(\xi)$ هم پایان است پس $h_\nu(\xi) \in D_\xi$ وجود دارد که $f_{\alpha(\nu)}(\xi) < h_\nu(\xi)$ از طرفی روی S داریم $h_\nu <_{NS_\kappa} h$ بنابراین $\alpha(\nu+1)$ وجود دارد به طوری که روی S داشته باشیم $h_\nu <_{NS_\kappa} f_{\alpha(\nu+1)}$ و در نتیجه $f_{\alpha(\nu)} <_{NS_\kappa} h_\nu <_{NS_\kappa} f_{\alpha(\nu+1)}$ و با توجه به فرض استقرا داریم:

$$h_{\nu'} <_{NS_\kappa} f_{\alpha(\nu'+1)} <_{NS_\kappa} f_{\alpha(\nu)} <_{NS_\kappa} h_\nu$$

بنابراین دنباله $\{h_\nu | \nu < \aleph_{\gamma+1}\}$ اکیدا صعودی است. اکنون فرض کنیم $\beta := \lim_{\nu \to \aleph_{\gamma+1}} \alpha(\nu)$ و $C :=$ $C \cap \{\alpha(\nu) | \nu < \aleph_{\gamma+1}\} \subseteq \beta$ بسته و بی کران باشد. در این صورت $\{\alpha(\nu) | \nu < \aleph_{\gamma+1}\} \subseteq \beta$ و $C_\beta \subseteq \beta$

بسته و بی کران است. در این صورت داریم:

$$\forall \nu < \aleph_{\gamma+1} \exists \nu' > \nu \forall \nu'' > \nu ; \nu' < \nu'', \alpha(\nu') \in C$$

اکنون با توجه به تعریف f_α ها و طرز ساخت h_ν ها و با توجه به این که $C \cap \alpha(\nu) \in Z_\alpha$ روی S داریم:

$$g^{\alpha(\nu)}_{C\cap\alpha(\nu)} \leq_{NS_\kappa} f_{\alpha(\nu)} <_{NS_\kappa} h_\nu <_{NS_\kappa} f_{\alpha(\nu')}$$

بنابراین:

$$\exists \xi_\nu \in S; g^{\alpha(\nu)}_{C\cap\alpha(\nu)}(\xi_\nu) \leq f_{\alpha(\nu)}(\xi_\nu) < h_\nu(\xi_\nu) < f_{\alpha(\nu')}(\xi_\nu)$$

از طرفی می‌توان γ به اندازه کافی بزرگ در نظر گرفت به طوری که $|S| < \aleph_{\gamma+1}$. به علاوه فرض کنیم g تابعی از $\aleph_{\gamma+1}$ به S باشد به طوری که هر ν را به ξ_ν متناظر با آن تصویر کند. در این صورت داریم:

$$\exists \xi \in S; |g^{-1}\{\xi\}| = \aleph_{\gamma+1}$$

قرار می‌دهیم $Z := g^{-1}\{\xi\}$ در این صورت $\forall \nu \in Z; g(\nu) = \xi_\nu = \xi$. هم چنین می‌توان فرض کرد:

$$\forall \nu_1, \nu_2 \in Z; (\nu'_1 < \nu_2 \Rightarrow \nu_1 < \nu_2)$$

در نتیجه داریم:

$$\alpha(\nu'_1) \in C \cap \alpha(\nu_2)$$

$$\Rightarrow f_{\alpha(\nu'_1)}(\xi) \leq g^{\alpha(\nu_2)}_{C\cap\alpha(\nu_2)}(\xi) = \sup\{f_\nu(\xi) | \xi \in C \cap \alpha(\nu_2)\}$$

$$\Rightarrow h_{\nu_1}(\xi) < f_{\alpha(\nu'_1)}(\xi) \leq g^{\alpha(\nu_2)}_{C\cap\alpha(\nu_2)}(\xi) \leq f_{\alpha(\nu_2)}(\xi) < h_{\nu_2}(\xi)$$

$$\Rightarrow h_{\nu_1}(\xi) < h_{\nu_2}(\xi)$$

$$\Rightarrow |\{h_\nu(\xi) | \nu \in Z\}| = |Z| = \aleph_{\gamma+1}$$

اما $\{h_\nu(\xi) | \nu \in Z\} \subseteq D_\xi$ و از طرفی بنابر روش انتخاب D_ξ داریم $|D_\xi| \leq \aleph_\gamma$ که تناقض است. پس

فرض خلف باطل و مساله تمام است. $\square$

۳-۳ مجموعه هم پایانی های ممکن و حساب کاردینال ها

در این بخش نشان می‌دهیم که اگر $\aleph_\omega$ یک کاردینال حد قوی باشد ابر فیلتری مانند D روی ω موجود است که $cof\prod_{n=0}^{\infty}\aleph_n/D = 2^{\aleph_\omega}$

۳-۳-۱ مجموعه هم پایانی های ممکن

در این بخش ابتدا مجموعه هم پایانی های ممکن برای مجموعه A را تعریف می‌کنیم و سپس نشان می‌دهیم این مجموعه در شرایط خاصی یک بازه است.

تعریف **۳-۳-۱.** فرض کنیم A مجموعه ای از کاردینال های منظم و D ابرفیلتری روی آن باشد در این صورت هم پایانی $\prod_{a\in A} a/D$ را با $cofD$ نشان می‌دهیم و $pcfA$ را مجموعه تمام $cofD$ هایی تعریف می‌کنیم که D ابر فیتلری روی A است. می‌دانیم هر ابر فیلتر D روی A زیر مجموعه ای از $P(A)$ است بنابراین تعداد ابر فیلتر های روی A برابر $2^{2^{|A|}}$ است و داریم $|pcfA| \leq 2^{2^{|A|}}$. هم چنین اگر $pcfA$ دارای بزرگترین عضو باشد آن را هم پایانی ماکسیمال $\prod A$ گوییم و با $\max cofA = \max(pcfA)$ نشان می‌دهیم. بعلاوه گوییم A یک بازه است هرگاه شامل تمام کاردینال های منظم مانند λ باشد که شرط زیر را داشته باشند:

$$\min A \leq \lambda < \sup A$$

نکته **۳-۳-۲.** فرض کنیم A_1 و A_2 مجموعه ای هایی شامل کاردینال های منظم باشند. در این صورت داریم:

$$pcf(A_1 \cup A_2) = pcf(A_1) \cup pcf(A_2)$$

برهان. ابتدا فرض کنیم $\lambda \in pcf(A_1 \cup A_2)$ یعنی ابر فیلتر D روی $A_1 \cup A_2$ و دنباله صعودی و هم پایان $\{f_\alpha|\alpha < \lambda\} \subseteq \prod_{a\in A_1\cup A_2} a$ نسبت به رابطه $<_D$ موجود است و چون D ابر فیلتری روی $A_1 \cup A_2$ است پس $A_1 \in D$ یا $A_2 \in D$. حال اگر $A_1 \in D$ در این صورت دنباله $\{f_\alpha \restriction A_1|\alpha < \lambda\} \subseteq \prod_{a\in A_1} a$ نسبت به رابطه $<_D$ صعودی و هم پایان است و در نتیجه داریم $\lambda \in pcfA_1$ و اگر $A_2 \in D$ در این صورت دنباله $\{f_\alpha \restriction A_2|\alpha < \lambda\} \subseteq \prod_{a\in A_2} a$ نسبت به رابطه $<_D$ صعودی و هم پایان است و در نتیجه داریم $\lambda \in pcfA_2$ و در هر صورت $\lambda \in pcfA_1 \cup pcfA_2$ بنابراین $pcf(A_1 \cup A_2) \subseteq pcf(A_1) \cup pcf(A_2)$

اکنون فرض کنیم $\lambda \in pcfA_1 \cup pcfA_2$ در این صورت اگر $\lambda \in pcfA_1$ یعنی ابر فیلتر D روی A_1 و دنباله $\{f_\alpha|\alpha < \lambda\} \subseteq \prod_{a\in A_1} a$ صعودی و هم پایان نسبت به $<_D$ موجود است. برای هر α تابع g_α از A_2 به $\cup_{a\in A_2} a$ را به صورت $g_\alpha(a) = \min(a)$ تعریف میکنیم و ابر فیلتر D' را به صورت $D' = \{B \cup C | B \in D, C \subseteq A_2\}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت دنباله $\{f_\alpha \cup g_\alpha|\alpha < \lambda\} \in \prod_{a\in A_1 \cup A_2} a$ صعودی و هم پایان نسبت به رابطه $<'_D$ است و نتیجه می‌گیریم $\lambda \in pcf(A_1 \cup A_2)$. هم چنین اگر $\lambda \in pcfA_2$ به طریق مشابه می‌توان نشان داد که $\lambda \in pcf(A_1 \cup A_2)$ بنابراین $pcfA_1 \cup pcfA_2 \subseteq pcf(A_1 \cup A_2)$ و در نتیجه $pcf(A_1 \cup A_2) = pcf(A_1) \cup pcf(A_2)$ $\square$

لم ۳-۳-۳. فرض کنیم A یک بازه است و $\min A = (2^{|A|})^+$ در این صورت $pcfA$ یک بازه است.

برهان. فرض کنیم $\min pcfA \leq \lambda < \sup pcfA$. باید نشان دهیم $\lambda \in pcfA$. با در نظر گرفتن ابر فیلتر بدیهی $\{X \subseteq A| \min A \in X\}$ داریم $\min A = \min pcfA$. هم چنین از اینکه $\lambda < \sup pcfA$ نتیجه می‌گیریم که ابر فیلتری مانند D روی A موجود است که $\lambda < cofD$ پس داریم $\min A \leq \lambda < cofD$. اکنون نشان می‌دهیم ابر فیلتری مانند E روی A موجود است که $cofE = \lambda$. بنابر تعریف $cofD$ دنباله $\{f_\alpha|\alpha < cofD\}$ وجود دارد که نسبت به رابطه $<_D$ در $\prod A$ صعودی است و داریم $2^{|A|} < \lambda < cofD$ پس بنا بر لم(۲-۱-۳) دنباله $\{f_\alpha|\alpha < \lambda\}$ دارای کوچکترین کران بالایی مانند g نسبت به رابطه $<_D$ است. برای هر $a \in A$ تعریف می‌کنیم $h(a) := cfg(a)$ و مجموعه $S_a \subseteq g(a)$ را طوری در نظر می‌گیریم که در $g(a)$ هم پایان باشد و $ot(S_a) = h(a)$

ادعا: $\prod_{a\in A} S_a/D$ دارای یک λ دنباله صعودی و هم پایان در g است.

برهان: فرض کنیم $\alpha < \lambda$ و $f_\alpha <_D g$ در این صورت داریم:

$$\{a|f_\alpha(a) < g(a)\} \in D \Rightarrow \forall a \in \{a|f_\alpha(a) < g(a)\} \exists f'_\alpha(a) \in S_a; f_\alpha(a) \leq f'_\alpha(a) < g(a)$$

بنابراین دنباله $\{f'_\alpha|\alpha < \lambda\} \in \prod_{a\in A} S_a$ یک λ دنباله صعودی و هم پایان در g است.

ادعا: $\prod_{a\in A} h(a)/D$ دارای دنباله هم پایانی مانند $\{h_\alpha|\alpha < \lambda\}$ است.

برهان: کافی است $h_\alpha(a)$ را برابر i تعریف کنیم اگر و تنها اگر $f'_\alpha(a)$ عضو i ام S_a باشد.

ادعا: به ازای هر $a \in A$ داریم $h(a) \in A$

برهان: فرض کنیم $B = \{a|h(a) \leq 2^{|A|}\} \in D$ بنابراین $\{h_\alpha \restriction B|\alpha < \lambda\} \subseteq \prod_{a\in A} 2^{|A|}$ نسبت به رابطه $\leq_D$ هم پایان است و داریم $h_\alpha \restriction B \in \prod_{a\in B} 2^{|A|}$ اما $|\{h_\alpha|\alpha < \lambda\}| = \lambda$ و

$|\prod_{a\in B}2^{|A|}|=2^{|A|}$ یعنی $\lambda\leq 2^{|A|}<\min A$ که تناقض است پس $B^c=\{a|h(a)>2^{|A|}\}\in D$ و داریم $h(a)\geq(2^{|A|})^+=\min A$ و چون A یک بازه است پس باید $\forall a\in A; h(a)\in A$
اکنون ابر فیلتر E را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X\in E\Leftrightarrow h^{-1}(X)\in D$$

حال با استقرا روی α دنباله $\{g_\alpha|\alpha<\lambda\}$ را طوری می‌سازیم که نسبت به رابطه $\leq_E$ صعودی و در $\prod A$ هم پایان باشد. فرض کنیم $\{g_{\alpha'}|\alpha'<\alpha\}$ طوری ساخته شده باشد که $\{g_{\alpha'}\circ h|\alpha'<\alpha\}$ نسبت به رابطه $\leq_D$ صعودی باشد. پس داریم $\exists\beta_\alpha\forall\alpha'<\alpha; g_{\alpha'}<_D h_{\beta_\alpha}$ اکنون فرض کنیم g_α طوری باشد که $g_\alpha\circ h\geq h_{\beta_\alpha}$ بنابراین $\{g_\alpha\circ h|\alpha<\lambda\}$ نسبت به رابطه $\leq_D$ صعودی و در h هم پایان است. حال فرض کنیم $\alpha<\beta<\lambda$ داریم:

$$g_\alpha\circ h<_D g_\beta\circ h$$

$$\Rightarrow\{a\in A|g_\alpha(h(a))<g_\beta(h(a))\}\in D$$

$$\Rightarrow h^{-1}\{a\in A|g_\alpha(a)<g_\beta(a)\}\in D$$

$$\Rightarrow\{a\in A|g_\alpha(a)<g_\beta(a)\}\in E$$

$$\Rightarrow g_\alpha<_E g_\beta$$

بنابراین دنباله $\{g_\alpha|\alpha<\lambda\}$ نسبت به رابطه $\leq_E$ صعودی و در $\prod A$ هم پایان است پس $cofE=\lambda$ و در نتیجه $\lambda\in pcfA$ که یعنی $pcfA$ یک بازه است. $\square$

نتیجه **۳-۳-۴**. فرض کنیم $\aleph_\omega$ حد قوی باشد یعنی $\forall n; 2^{\aleph_n}<\aleph_\omega$ در این صورت $pcfA$ یک بازه است و $\sup pcf\{\aleph_n\}<\aleph_{\aleph_\omega}$

برهان. بازه A را به صورت $A=[(2^{\aleph_0})^+,\aleph_\omega)$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$|A|=\aleph_0, \min A=(2^{\aleph_0})^+=(2^{|A|})^+$$

اکنون چون A یک بازه است بنا بر لم قبل $pcfA=pcf\{\aleph_n\}$ نیز یک بازه است و برای قسمت دوم

داریم:

$$|pcfA| \leq ۲^{۲^{|A|}} \Rightarrow \exists n; |pcf\{\aleph_n\}| \leq ۲^{۲^{\aleph_۰}} < ۲^{\aleph_n} < \aleph_\omega$$

اکنون فرض کنیم $\sup pcf\{\aleph_n\} = \lambda$ در این صورت چون $[(۲^{\aleph_۰})^+, \lambda) \subseteq pcf\{\aleph_n\}$ پس باید $\lambda < \aleph_{\aleph_\omega}$ زیرا در غیر این صورت اگر $\aleph_{\aleph_\omega} \leq \lambda$ داریم:

$$|[(۲^{\aleph_۰})^+, \lambda)| > \aleph_\omega, |pcf\{\aleph_n\}| < \aleph_\omega \Rightarrow \aleph_\omega < \aleph_\omega$$

که تناقض است پس $\lambda < \aleph_{\aleph_\omega}$ $\square$

۳-۳-۲ خانواده ای از زیر مجموعه ها

در این بخش دو قضیه مهم که در اثبات قضیه اول کمک کننده است را بررسی می‌کنیم.

لم **۳-۳-۵**. فرض کنیم $k < \omega$ و $۲^{\aleph_k} \leq \lambda < \aleph_{\aleph_k}$ در این صورت مجموعه $\mathcal{F}_\lambda \subseteq \{X \subseteq \lambda | |X| = \aleph_k\}$ وجود دارد که $|\mathcal{F}_\lambda| = \lambda$ و $(\forall Z \subseteq \lambda; |Z| = \aleph_k \Rightarrow \exists X \in \mathcal{F}_\lambda; X \subseteq Z)$

برهان. مجموعه مورد نظر را با استقرا روی λ می‌سازیم. در مرحله اول فرض کنیم $\lambda = ۲^{\aleph_k}$ در این صورت مجموعه $\mathcal{F}_\lambda$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{F}_\lambda = [\lambda]^{\aleph_k} = \{X \subseteq \lambda | |X| = \aleph_k\}$$

اکنون فرض کنیم $۲^{\aleph_k} < \lambda < \aleph_{\aleph_k}$ و $cf\lambda \neq \aleph_k$ و $\mathcal{F}_\alpha$ برای همه $\alpha < \lambda$ ساخته شده باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{F}_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{F}_\alpha$$

در این صورت فرض کنیم $Z \subseteq \lambda, |Z| = \aleph_k$ و داریم:

$$\exists \alpha < \lambda \exists Z' \subseteq Z; |Z'| = \aleph_k, Z' \subseteq \alpha \Rightarrow Z' \in \mathcal{F}_\alpha \Rightarrow Z' \in \mathcal{F}_\lambda$$

حال فرض کنیم λ یک کاردینال نباشد و $|\lambda| < \lambda$ در این صورت تابع یک به یک و پوشای $g : |\lambda| \longrightarrow \lambda$

را در نظر گرفته و $\mathcal{F}_\lambda$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{F}_\lambda := \{g[X] | X \in \mathcal{F}_\lambda\}$$

□

نکته ۳-۳-۶. فرض کنیم $۲^{\aleph_\omega}$ حد قوی باشد. بنا بر قضیه کونیگ [۷] $cf۲^{\aleph_\omega} > \aleph_\omega$ و هم چنین می‌دانیم $\sup pcf\{\aleph_n\}_n < \aleph_{\aleph_\omega}$ پس نتیجه می‌شود $۲^{\aleph_\omega}$ یک کاردینال تالی است و $۲^{\aleph_\omega} = \max cof\{\aleph_n\}_n$.
هم چنین در ادامه نشان می‌دهیم $۲^{\aleph_\omega} = \sup pcf\{\aleph_n\}_{n=۰}^{\infty}$ و در نتیجه داریم:

$$۲^{\aleph_\omega} = \sup pcf\{\aleph_n\} = \max cof\{\aleph_n\}$$

اکنون برای اثبات قضیه اول از اینجا تا آخر فصل فرض می‌کنیم $\lambda = \sup pcf\{\aleph_n\}_n$. در ادامه چند لم و سپس اثبات قضیه اول را داریم.

لم ۳-۳-۷. خانواده $\mathcal{F} \subseteq \prod \aleph_n$ وجود دارد که $|\mathcal{F}| = \lambda$ و دارای شرط زیر است:

$$\forall g \in \prod \aleph_n \exists f \in \mathcal{F} \forall n; g(n) < f(n)$$

برهان. به ازای هر ابر فیلتر D روی ω بنا بر تعریف $cofD$ دنباله $\{f_\alpha^D | \alpha < cofD\}$ هم پایان در $\prod \aleph_n / D$ وجود دارد. فرض کنیم $\mathcal{F}$ مجموعه تمام $f = \max\{f_{\alpha_۱}^{D_۱}, ..., f_{\alpha_m}^{D_m}\}$ هایی باشد که $D_۱$ تا D_m ابر فیلتر هایی روی ω و $\alpha_۱$ تا α_m اردینال هستند. داریم:

$$|\{D\}| \leq ۲^{۲^{\aleph_۰}} < \aleph_\omega < \lambda \Rightarrow |\mathcal{F}| = \lambda$$

اکنون نشان می‌دهیم $\forall g \in \prod \aleph_n \exists f \in \mathcal{F} \forall n; g(n) < f(n)$. به برهان خلف فرض کنیم این طور نباشد و فرض کنیم g یک مثال نقض برای عبارت فوق باشد. تعریف می‌کنیم:

$$X_\alpha^D := \{n | g(n) > f_\alpha^D(n)\}$$

[7] Kőnig

در این صورت مجموعه $\{X^D_\alpha\}_{\alpha,D}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است. بنابراین به ابر فیلتری مانند E قابل گسترش است و در نتیجه α وجود دارد که $g \leq_E f^E_\alpha$ که با فرض خلف در تناقض است پس فرض خلف باطل و $\mathcal{F}$ تعریف شده همان $\mathcal{F}$ مورد نظر است. $\square$

۳-۳-۳ زنجیره ای از زیر مدل های مقدماتی مدل توسعه یافته اسکولم

در این بخش ابتدا زنجیره ای از زیر مدل های مقدماتی مدل توسعه یافته اسکولم را معرفی کرده و سپس قضیه اول را اثبات می‌کنیم.

تعریف **۳-۳-۸.** فرض کنیم $k < \omega$ به اندازه کافی بزرگ باشد که $\aleph_k \geq 2^{\aleph_0}$ و $\aleph_{\aleph_k} > \lambda$. هم چنین فرض کنیم θ یک کاردینال منظم به اندازه کافی بزرگ و V_θ مدلی به اندازه کافی بزرگ از ZFC باشد. و بعلاوه رابطه $\lhd$ را یک رابطه خوش ترتیب روی V_θ در نظر می‌گیریم. اکنون برای هر زیر مجموعه متناهی از $\aleph_\omega$ مانند a به روش استقرایی روی α یک زنجیره از مدل های M^a_α به طول $\aleph_k$ می‌سازیم به طوری که به ازای هر a و α مدل M^a_α یک زیر مدل مقدماتی از $(V_\theta, \in, \lhd)$ باشد. در مرحله اول مدل M^a_0 را از سایز $\aleph_k$ طوری انتخاب می‌کنیم که $M^a_0 \supseteq a \cup \omega_k$ و می‌دانیم طبق قضیه لون هایم اسکولم چنین مدلی وجود دارد. حال اگر $\alpha < \omega_k$ یک اردینال حدی باشد تعریف می‌کنیم:

$$M^a_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M^a_\beta$$

و برای اردینال های تالی با فرض داشتن M^a_α برای تعریف $M^a_{\alpha+1}$ ابتدا تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\forall n > k; \chi^a_\alpha(n) = \sup(M^a_\alpha \cap \omega_n)$$

طبق لم (۳-۳-۷) تابع $f^a_\alpha \in \mathcal{F}$ وجود دارد که $\forall n > k; f^a_\alpha(n) \geq \chi^a_\alpha(n)$. حال فرض کنیم $M^a_{\alpha+1}$ مدلی باشد که شامل f^a_α است. اکنون برای هر زیر مجموعه متناهی از $\aleph_\omega$ مانند a تعریف می‌کنیم:

$$M^a = \bigcup_{\alpha<\omega_k} M^a_\alpha, \forall n > k; \chi^a(n) = \sup(M^a \cap \omega_n)$$

لم **۳-۳-۹.** فرض کنیم a و b زیر مجموعه های متناهی از $\aleph_\omega$ باشند. در این صورت $\chi^a = \chi^b$ نتیجه می‌دهد $M^a \cap \aleph_\omega = M^b \cap \aleph_\omega$

برهان. با استقرا روی n نشان می‌دهیم $M^a \cap \aleph_n = M^b \cap \aleph_n$. برای $n=k$ چون $a \cup \omega_k \subseteq M^a$ و $b \cup \omega_k \subseteq M^b$ پس داریم $M^a \cap \aleph_k = M^b \cap \aleph_k = \aleph_k$ اکنون فرض کنیم برای n برقرار است. نشان می‌دهیم برای $n+۱$ نیز برقرار خواهد بود. تعریف می‌کنیم:

$$C^a := \{\chi^a_\beta(n+۱) | \beta < \omega_k\}, C^b := \{\chi^b_\beta(n+۱) | \beta < \omega_k\}$$

مجموعه های C^a و C^b بسته و بی کران اند پس مجموعه $C = C^a \cap C^b$ نیز بسته و بی کران است و داریم:

$$C^a \subseteq M^a \cap \aleph_{n+۱} \Rightarrow C \subseteq M^a \cap \aleph_{n+۱}, C^b \subseteq M^b \cap \aleph_{n+۱} \Rightarrow C \subseteq M^b \cap \aleph_{n+۱}$$

ادعا: به ازای هر $\gamma \in C$ که $\omega_n \leq \gamma$ تابع $\pi_\gamma \in M^a \cap M^b$ وجود دارد به طوری که $\pi_\gamma : \omega_n \longrightarrow \gamma$ تابعی یک به یک و پوشا باشد.

برهان: فرض کنیم $\gamma \in C$ که $\omega_n \leq \gamma$. می‌دانیم $M^a, M^b \prec V_\theta$ و $\gamma \in M^a \cap M^b$ و چون $\gamma \in C$ پس $\omega_n \leq \gamma < \omega_{n+۱}$ و با توجه به این که $|\gamma|^{V_\theta} = \aleph_n$ تابع $\pi'_\gamma \in V_\theta$ وجود دارد به طوری که $\pi'_\gamma : \omega_n \longrightarrow \gamma$ یک به یک و پوشا باشد. بنابراین توابع $\pi^{M^a}_\gamma \in M^a$ و $\pi^{M^b}_\gamma \in M^b$ موجودند که $\pi^{M^a}_\gamma, \pi^{M^b}_\gamma : \omega_n \longrightarrow \gamma$ یک به یک و پوشا است. اکنون فرض کنیم π_γ نسبت به رابطه $\lhd$ کوچکترین تابع یک به یک و پوشایی باشد که $\pi_\gamma : \omega_n \longrightarrow \gamma$ و چون $\gamma \in M^a \cap M^b$ پس $\pi_\gamma \in M^a \cap M^b$

اکنون داریم:

$$M^a \cap \aleph_n = M^b \cap \aleph_n \Rightarrow \pi_\gamma[M^a \cap \aleph_n] = \pi_\gamma[M^b \cap \aleph_n] \Rightarrow M^a \cap \gamma = M^b \cap \gamma$$

هم چنین با توجه به تعریف تابع χ^a و چون C یک مجموعه بسته و بی کران در χ^a است داریم:

$$M^a \cap \omega_{n+۱} = M^a \cap \chi^a(n+۱) = \bigcup_{\gamma \in C} M^a \cap \gamma = \bigcup_{\gamma \in C} M^b \cap \gamma = M^b \cap \chi^b(n+۱) = M^b \cap \omega_{n+۱}$$

$\square$

لم **۳-۳-۱۰.** تعداد χ^a هایی که $a \subset \aleph_\omega$ شمارا باشد حداکثر λ است.

برهان. برای هر $a \subset \aleph_\omega$ که شمارا باشد تعریف می‌کنیم:

$$Z_a := \{f^a_\alpha | \alpha < \omega_k\}$$

و به ازای هر $S \subseteq \omega_k$ از سایز $\aleph_k$ داریم:

$$\forall n > k; \chi^a(n) = \sup_{\alpha \in S} \chi^a_\alpha(n) = \sup_{\alpha \in S} f^a_\alpha(n)$$

اکنون با توجه به لم(۷-۳-۳) مجموعه $\mathcal{F}_\lambda$ وجود دارد که $\forall a \exists X_a \in \mathcal{F}_\lambda; X \subseteq Z_a$. حال تعریف می‌کنیم $g; \chi^a \longrightarrow X_a \in \mathcal{F}_\lambda$ و نشان می‌دهیم g یک به یک است. برای این کار فرض کنیم $X_a = X_b$ تعریف می‌کنیم:

$$S_a := \{\alpha | \alpha < \omega_\kappa, f^a_\alpha \in X_a\}, S_b := \{\alpha | \alpha < \omega_\kappa, f^b_\alpha \in X_b\} \Rightarrow S_a = S_b \Rightarrow \chi^a = \chi^b$$

بنابراین g یک به یک است و $|\{\chi^a\}_a| \leq |\mathcal{F}_\lambda| = \lambda$ $\square$

قضیه **۳-۳-۱۱.** (قضیه اول): $2^{\aleph_\omega} = \max cof \prod \aleph_n$

برهان. می‌دانیم: $\max cof \prod \aleph_n = \sup pcf \aleph_n = \lambda = |\{\chi^a\}_a|$ نشان می‌دهیم $|\{\chi^a\}_a| = 2^{\aleph_\omega}$ هم چنین می‌دانیم $|\{\chi^a\}_a| \leq 2^{\aleph_\omega}$ پس کافی است نشان دهیم $|\{\chi^a\}_a| \not< 2^{\aleph_\omega}$. به برهان خلف فرض کنیم این طور نباشد و $|\{\chi^a\}_a| < 2^{\aleph_\omega}$. پس تابع $h : a \longmapsto \chi^a$ نمی‌تواند یک به یک باشد و داریم:

$$\exists \chi; |\Sigma = \{a \subseteq \aleph_\omega | \chi^a = \chi\}| = 2^{\aleph_\omega} \Rightarrow \forall a, b \in \Sigma; \chi^a = \chi^b \Rightarrow M^a \cap \aleph_\omega = M^b \cap \aleph_\omega$$

اکنون فرض کنیم $a \in \Sigma$ با توجه به این که ω زیر مجموعه ای از M^a است داریم:

$$|[M^a]^\omega| = \aleph_k^{\aleph_0} = \aleph_k \Rightarrow \exists b \in \Sigma; b \notin [M^a]^\omega \Rightarrow b \nsubseteq M^a \cap \aleph_\omega = M^b \cap \aleph_\omega \supseteq b$$

که تناقض است. پس فرض خلف باطل است و داریم $2^{\aleph_\omega} = \max cof \prod \aleph_n$ $\square$

فصل چهارم

ساختاری برای pcf

در این فصل فرض می‌کنیم A مجموعه ای از کاردینال های منظم است و $2^{|A|} < \min A$. ابتدا یک مجموعه مولد برای $pcfA$ معرفی می‌کنیم و در ادامه با بهبود این مجموعه مولد به قضایایی می‌پردازیم که برای اثبات قضیه دوم ضروری است.

۴-۱ معرفی یک مجموعه مولد برای $pcfA$

در این بخش با فرض $2^{|A|} < \min A$ یک مجموعه مولد برای $pcfA$ معرفی می‌کنیم.

قضیه ۴-۱-۱. فرض کنیم $2^{|A|} < \min A$ در این صورت مجموعه $\{B_\lambda|\lambda \in pcfA, B_\lambda \subseteq A\}$ وجود دارد به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

۱) $\max cofB_\lambda = \lambda$

۲) $\forall D; cofD = \lambda \Rightarrow B_\lambda \in D$

برهان. ابتدا فرض کنیم مجموعه $\{B_\lambda|\lambda \in pcfA\}$ موجود است که برای هر $\kappa \leq \sup pcfA$ دارای چهار شرط زیر است:

۱) ایده آل $J_\kappa = \langle\{B_\lambda|\lambda < \kappa, \lambda \in pcfA\}\rangle$ یک ایده آل κ - جهت دار است.

۲) اگر $\kappa \notin pcfA$ آنگاه J_κ یک ایده آل κ^+ - جهت دار است.

۳) اگر $\kappa \in pcfA$ در این صورت $B_\kappa \in J_\kappa^+$ موجود است که J_κ یک κ - مقیاس روی B_κ دارد.

۴) اگر $\kappa = \max pcfA$ آنگاه $B_\kappa = A$ و اگر $\kappa \neq \max pcfA$ در این صورت $J_\kappa[B_\kappa]$ یک ایده آل κ^+ - جهت دار است.

ادعا:اگر مجموعه $\{B_\lambda|\lambda \in pcfA\}$ در چهار شرط فوق صدق کند آنگاه در دو شرط اصلی قضیه صدق می‌کند.

برهان: فرض کنیم $\lambda \in pcfA$ و $J_\lambda = \langle\{B_\mu|\mu < \lambda, \mu \in pcfA\}\rangle$. هم چنین فرض کنیم F_{J_λ} فیلتر دوگان[1] J_λ باشد که به صورت $F_{J_\lambda} := \{A\backslash X|X \in J_\lambda\}$ تعریف می‌شود. آن را به یک ابر فیلتر مانند D گسترش می‌دهیم. بنابراین $D \cap J_\lambda = \emptyset$ و هر λ - مقیاس نسبت به رابطه $\leq_{J_\lambda}$ یک λ - مقیاس نسبت به رابطه $\leq_D$ است. پس بنا به شرط سوم فوق یک λ - مقیاس وجود دارد و $cofD = \lambda$ و در نتیجه

[1] Dual filter

$\lambda \in pcfB_\lambda$. اکنون فرض کنیم D' یک ابر فیلتر دلخواه روی B_λ باشد. نشان می‌دهیم $cofD' \leq \lambda$.
برای این کار دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:
الف) اگر $D' \cap J_\lambda = \emptyset$ در این صورت $cofD' = \lambda$
ب) اگر $D' \cap J_\lambda \neq \emptyset$ در این صورت ν را کوچکترین عضوی در نظر می‌گیریم که $D' \cap J_\lambda \ni B_\nu$ بنابراین $D' \cap J_\nu = \emptyset$ و در نتیجه $cofD' = \nu < \lambda$

بنابراین در هر حالت $cofD' \leq \lambda$ پس $\max cofB_\lambda = \lambda$ و شرط اول قضیه برقرار است. اکنون برای اثبات شرط دوم فرض کنیم D یک ابر فیلتر دلخواه روی A باشد به طوری که $cofD = \lambda$. نشان می‌دهیم $B_\lambda \in D$. به برهان خلف فرض کنیم این طور نباشد. مجدداً دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:
الف) فرض کنیم $\nu < \lambda$ وجود دارد که $B_\nu \in D$ در این صورت $cofD = \nu < \lambda$ که تناقض است.
ب) فرض کنیم به ازای هر $\nu \leq \lambda$ داشته باشیم $B_\nu \notin D$ در این صورت $D \cap J_\lambda[B_\lambda] = \emptyset$. اکنون اگر فرض کنیم $\lambda = \max pcfA$ پس بنا بر شرط چهارم باید $B_\lambda = A \in D$ که با فرض $B_\lambda \notin D$ در تناقض است پس فرض کنیم $\lambda < \max pcfA$ و در نتیجه بنا بر شرط چهارم $J_\lambda[B_\lambda]$ یک ایده آل λ^+ - جهت دار است و چون $D \cap J_\lambda[B_\lambda] = \emptyset$ پس D یک ابر فیلتر λ^+ - جهت دار است و در نتیجه $cofD \geq \lambda^+$ که تناقض است.

در هر حالت به تناقض رسیدیم پس فرض خلف باطل است و $B_\lambda \in D$.
اکنون با استقرا روی κ مجموعه $\{B_\lambda | \lambda \in pcfA\}$ که در چهار شرط فوق صدق می‌کند را می‌سازیم.
ابتدا فرض کنیم $\kappa = \min A = minpcfA$ در این صورت قرار می‌دهیم $J_\kappa = \{\emptyset\}$. طبق تعریف $J_\kappa = \langle\{B_\lambda | \lambda < \kappa, \lambda \in pcfA\}\rangle$ و چون هیچ $\lambda < \kappa$ در $pcfA$ وجود ندارد پس J_κ یک ایده آل κ - جهت دار است و $J_\kappa^+ = P(A)$ و در نتیجه به ازای هر $B_\kappa \subseteq A$ ایده آل J_κ یک κ - مقیاس روی B_κ دارد.

ادعا: اگر κ یک اردینال حدی باشد در این صورت J_κ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_\kappa = \bigcup_{\lambda < \kappa} J_\lambda$$

برهان: می‌دانیم $J_\kappa = \langle B_\nu | \nu < \kappa \rangle$ و $\bigcup_{\lambda<\kappa} J_\lambda = \bigcup_{\lambda<\kappa}\langle B_\mu | \mu < \lambda\rangle$. بنابراین از آن جایی که κ یک اردینال حدی است وضوح تساوی بالا برقرار است.
ادعا: اگر κ یک اردینال تالی به صورت $\kappa = \lambda^+$ باشد در این صورت داریم $J_\kappa = J_\lambda[B_\lambda]$

برهان: فرض کنیم $\kappa = \lambda^+$ در این صورت داریم:

$$J_\kappa = \langle B_\mu | \mu < \kappa \rangle = \langle B_\mu | \mu \leq \lambda \rangle = \langle \langle B_\mu | \mu < \lambda \rangle \cup B_\lambda \rangle = J_\lambda[B_\lambda]$$

اکنون نشان می‌دهیم J_κ در شروط اول تا چهارم صدق می‌کند و مجموعه $\{B_\lambda | \lambda \in pcfA\}$ را پیدا می‌کنیم.

شرط اول: ابتدا فرض کنیم κ یک اردینال حدی باشد در این صورت $J_\kappa = \bigcup_{\lambda<\kappa} J_\lambda$ به طوری که برای هر $\kappa > \lambda$ ایده آل J_λ یک ایده آل λ - جهت دار است. اکنون فرض کنیم S مجموعه ای باشد که $|S| < \kappa$ در این صورت چون κ یک اردینال حدی است $\kappa > \theta$ وجود دارد به طوری که $|S| < \theta$ و J_θ یک اردینال θ - جهت دار است پس S کران دار است و در نتیجه J_κ یک اردینال κ - جهت دار است.
اکنون فرض کنیم κ یک اردینال تالی به صورت $\kappa = \lambda^+$ باشد در این صورت بنا بر شرط چهارم (که اثباتی مستقل از شرط اول دارد) $J_\kappa = J_\lambda[B_\lambda]$ یک اردینال $\lambda^+ = \kappa$ - جهت دار است.
شرط دوم: فرض کنیم $\kappa \notin pcfA$ نشان می‌دهیم J_κ ایده آلی κ^+ - جهت دار است. این مطلب را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:
الف) فرض کنیم κ یک کاردینال تکین باشد و فرض کنیم $S \subseteq J_\kappa$ طوری باشد که $|S| = \kappa$. هم چنین فرض کنیم $cof\kappa = \lambda < \kappa$ در این صورت $S = \bigcup_{\alpha<\lambda} S_\alpha$ به طوری که $\forall\alpha; |S_\alpha| < \kappa$ و از طرفی بنا بر شرط اول J_κ یک ایده آل κ - جهت دار است پس به ازای هر α مجموعه S_α کران دار است و فرض کنیم x_α کران بالای مجموعه S_α باشد. اکنون مجموعه $X = \{x_\alpha | \alpha < \lambda\}$ را در نظر می‌گیریم و داریم $|X| = \lambda < \kappa$ و چون J_κ یک ایده آل κ - جهت دار است پس X کران بالایی مانند x دارد که کران بالای S هم هست. بنابراین S کران دار است و در نتیجه J_κ یک ایده آل κ^+ - جهت دار است.
ب) فرض کنیم κ یک اردینال منظم باشد پس بنا بر لم (۷-۱-۳) J_κ یک ایده آل κ^+ - جهت دار است یا یک κ - مقیاس روی A نسبت به رابطه $\leq_{J_\kappa}$ وجود دارد یا $B \in J_\kappa^+$ وجود دارد $A \backslash B \in J_\kappa^+$ به طوری که J_κ یک κ - مقیاس روی B دارد و $J_\kappa[B]$ یک ایده آل κ^+ - جهت دار است. حال اگر یک κ - مقیاس نسبت به رابطه $\leq_{J_\kappa}$ روی A وجود داشته باشد در این صورت ابر فیلتر مانند D که با J_κ اشتراک ندارد را در نظر می‌گیریم و داریم $cofD = \kappa$ که یعنی $\kappa \in pcfA$ که تناقض است. بعلاوه اگر $B \in J_\kappa^+$ با شرایط فوق وجود داشته باشد چون $B \subseteq A$ مجدداً ابر فیلتر مانند D که با J_κ اشتراک ندارد را در نظر می‌گیریم و داریم $cofD = \kappa$ که یعنی $\kappa \in pcfA$ که تناقض است. پس باید حالت سوم اتفاق بی‌افتد یعنی J_κ یک ایده آل κ^+ - جهت دار است.

شرط سوم: فرض کنیم $\kappa \in pcfA$ در این صورت ابر فیلتر D روی A وجود دارد به طوری که $cofD = \kappa$.
نشان می‌دهیم $B_\kappa \in J_\kappa^+$ وجود دارد که J_κ یک κ - مقیاس روی B_κ دارد.
ادعا: J_κ ایده آلی κ^+ - جهت دار نیست.
برهان: به برهان خلف فرض کنیم این طور نباشد. در این صورت مسئله را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:
الف) اگر $D \cap J_\kappa = \emptyset$ در این صورت D یک ابر فیلتر κ^+ - جهت دار است و در نتیجه $cofD \geq \kappa^+$ که تناقض است.
ب) اگر $D \cap J_\kappa \neq \emptyset$ در این صورت ν وجود دارد که $B_\nu \in D$. فرض کنیم ν کوچکترین این چنین ν هایی باشد. در این صورت $cofD = \nu < \kappa$ که تناقض است.
در هر حالت به تناقض رسیدیم پس فرض خلف باطل و J_κ ایده آلی κ^+ - جهت دار نیست.
بنابراین J_κ ایده آلی κ - جهت دار است ولی κ^+ - جهت دار نیست. پس بنا بر لم (۷-۱-۳) دو حالت زیر پیش می‌آید:
حالت اول: یک κ - مقیاس روی A نسبت به رابطه $\leq_{J_\kappa}$ وجود دارد. در این صورت B_κ را برابر A تعریف می‌کنیم و داریم $B_\kappa = A \in J_\kappa^+$ و J_κ یک κ - مقیاس روی B_κ دارد.
حالت دوم: $B_\kappa \in J_\kappa^+$ وجود دارد به طوری که یک κ - مقیاس روی B_κ وجود دارد و $J_\kappa[B_\kappa]$ ایده آلی κ^+ - جهت دار است.
شرط چهارم: برای این قسمت کافی است ثابت کنیم $\kappa = \max pcfA$ اگر و تنها اگر یک κ - مقیاس روی A نسبت به رابطه $\leq_{J_\kappa}$ وجود داشته باشد زیرا اگر $\kappa = \max pcfA$ در این صورت حالت اول در اثبات شرط سوم رخ می‌دهد و در نتیجه داریم $B_\kappa = A$ و اگر $\kappa \neq \max pcfA$ در این صورت هیچ κ - مقیاسی روی A نسبت به رابطه $\leq_{J_\kappa}$ وجود ندارد پس حالت دوم در اثبات شرط سوم رخ می‌دهد و در نتیجه $J_\kappa[B_\kappa]$ یک ایده آل κ^+ - جهت دار است. اکنون نشان می‌دهیم $\kappa = \max pcfA$ اگر و تنها اگر یک κ - مقیاس روی A نسبت به رابطه $\leq_{J_\kappa}$ وجود داشته باشد. ابتدا فرض می‌کنیم یک κ - مقیاس روی A نسبت به رابطه $\leq_{J_\kappa}$ وجود دارد و نشان می‌دهیم $\kappa = \max pcfA$. بعلاوه فرض کنیم D یک ابر فیلتر روی A باشد که $D \cap J_\kappa = \emptyset$ بنابراین $cofD = \kappa$ و در نتیجه $\kappa \in pcfA$ که این یعنی $\kappa \leq \max pcfA$. حال نشان می‌دهیم $\kappa = \max pcfA$. به برهان خلف فرض کنیم $\max pcfA = \lambda$ و $\kappa < \lambda$. می‌دانیم یک κ - مقیاس روی A نسبت به رابطه $\leq_{J_\kappa}$ وجود دارد. اکنون به ازای هر ابر فیلتر دلخواه مانند D یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:
الف) اگر $D \cap J_\kappa = \emptyset$ در این صورت $cofD = \kappa < \lambda$

ب) اگر $D \cap J_\kappa \neq \emptyset$ در این صورت فرض کنیم ν کوچکترین عنصری باشد که $B_\nu \in D$ و داریم $cof D = \nu < \kappa < \lambda$

پس می‌توان نتیجه گرفت λ در $pcfA$ نیست که تناقض است پس فرض خلف باطل است و داریم $\kappa = \max pcfA$. بالعکس فرض کنیم $\kappa = \max pcfA$. نشان می‌دهیم یک κ - مقیاس روی A نسبت به رابطه $\leq_{J_\kappa}$ وجود دارد. به برهان خلف فرض کنیم این طور نباشد. پس حالت اول در اثبات شرط سوم رخ نمی‌دهد و حالت دوم اتفاق می‌افتد یعنی $B_\kappa \in J_\kappa^+$ وجود دارد به طوری که یک κ - مقیاس روی B_κ وجود دارد و $J_\kappa[B_\kappa]$ ایده آلی κ^+ - جهت دار است. اکنون اگر $B_\kappa = A$ که فرض خلف نقض می‌شود و مسئله تمام است پس فرض کنیم $B_\kappa \neq A$ و در نتیجه $J_\kappa[B_\kappa] \neq P(A)$ بنابراین ابر فیلتر D روی A موجود است که $D \cap J_\kappa[B_\kappa] = \emptyset$ و $J_\kappa[B_\kappa]$ یک ایده آل κ^+ - جهت دار است. پس D ابر فیلتری κ^+ - جهت دار است و در نتیجه $cof D \geq \kappa^+$ اما از طرفی $cof D \in pcfA$ و فرض کردیم $\kappa = \max pcfA$ که یعنی باید $cof D \leq \kappa$ که تناقض است. پس فرض خلف باطل است و یک κ - مقیاس روی A نسبت به رابطه $\leq_{J_\kappa}$ وجود دارد. □

۲-۴ چند نتیجه از قضیه وجود مجموعه مولد برای $pcfA$

در این بخش چند نتیجه از قضیه وجود مجموعه مولد برای $pcfA$ را بیان می‌کنیم و در آخر قضیه فشردگی را برای زیر مجموعه های A اثبات می‌کنیم.

نتیجه ۴-۲-۱. فرض کنیم $۲^{|A|} < \min A$ در این صورت $|pcfA| < ۲^{|A|}$

برهان. فرض کنیم $\lambda \neq \lambda'$ در این صورت داریم:

$$\max cof B_\lambda \neq \max cof B_{\lambda'} \Rightarrow B_\lambda \neq B_{\lambda'} \Rightarrow |pcfA| = |\{B_\lambda | \lambda \in pcfA\}|$$

اکنون با توجه به این که $\forall \lambda; B_\lambda \subseteq A$ داریم:

$$|pcfA| = |\{B_\lambda | \lambda \in pcfA\}| \leq |P(A)| = ۲^{|A|}$$

□

نتیجه ۴-۲-۲. فرض کنیم $\aleph_\omega$ حد قوی باشد یعنی $\forall n; ۲^{\aleph_n} < \aleph_\omega$ در این صورت $۲^{\aleph_\omega} < \aleph_{(۲^{\aleph_0})^+}$

برهان. به برهان خلف فرض کنیم این طور نباشد. چون $\aleph_\omega$ حد قوی است پس بنا بر لم (۳-۳-۳) $pcfA$ یک بازه است. بازه $(\aleph_1, \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}) \subseteq pcf\{\aleph_n\}$ را در نظر می‌گیریم و داریم:

$$|pcf\{\aleph_n\}| \geq |(\aleph_1, \aleph_{(2^{\aleph_0})^+})| = (2^{\aleph_0})^+$$

اما بنا بر نتیجه (۱-۲-۴) داریم:

$$|pcf\{\aleph_n\}| \leq 2^{|\{\aleph_n | n<\omega\}|} = 2^{\aleph_0}$$

که تناقض است. پس فرض خلف باطل است و داریم $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$ □

نتیجه **۴-۲-۳**. به ازای هر ابر فیلتر روی A مانند D هم پایانی D برابر کوچکترین λ ای است که $B_\lambda \in D$

برهان. فرض کنیم $cofD = \lambda$ در این صورت $B_\lambda \in D$ و فرض کنیم $\mu < \lambda$ در این صورت $\max cofB_\mu = \mu < \lambda$ بنابراین $B_\mu \notin D$ و در نتیجه $cofD$ برابر کوچکترین λ ای است که $B_\lambda \in D$ □

نتیجه **۴-۲-۴**. فرض کنیم $2^{|A|} < \min A$ در این صورت $\max cofA$ وجود دارد یا به عبارت دیگر $pcfA$ دارای بزرگترین عضو است.

برهان. به برهان خلف فرض کنیم این طور نباشد.
ادعا: مجموعه $\{A - B_\lambda | \lambda \in pcfA\}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است.
برهان: فرض کنیم $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n \in pcfA$ کافیست نشان دهیم:

$$(A - B_{\lambda_1}) \cap (A - B_{\lambda_2}) \cap ... \cap (A - B_{\lambda_n}) = A - (B_{\lambda_1} \cup B_{\lambda_2} \cup ... \cup B_{\lambda_n}) \neq \emptyset$$

به برهان خلف فرض کنیم $A - (B_{\lambda_1} \cup B_{\lambda_2} \cup ... \cup B_{\lambda_n}) = \emptyset$ در نتیجه داریم:

$$A = (B_{\lambda_1} \cup B_{\lambda_2} \cup ... \cup B_{\lambda_n}) \Rightarrow pcfA = \bigcup_{1 \leq i \leq n} pcfB_{\lambda_i} \Rightarrow \max pcfA = \max pcf \bigcup_{1 \leq i \leq n} pcfB_{\lambda_i} = \lambda_n$$

که با فرض موجود نبودن بزرگترین عضو $pcfA$ در تناقض است. پس فرض خلف باطل و ادعا برقرار است.

پس مجموعه $\{A - B_\lambda | \lambda \in pcfA\}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است و در نتیجه قابل گسترش به یک ابر فیلتر مانند D است. اکنون فرض کنیم $cofD = \mu$ پس $B_\mu \in D$ و بنا بر نوع تعریف D داریم $A - B_\mu \in D$ در نتیجه $B_\mu \cap (A - B_\mu) = \emptyset \in D$ که تناقض است. پس فرض خلف باطل است و $pcfA$ دارای بزرگترین عضو است. $\square$

نتیجه **۴-۲-۵**. برای هر کاردینال $\kappa < \max pcfA$ ایده آل تولید شده توسط $\{B_\lambda | \lambda < \kappa, \lambda \in pcfA\}$ یک ایده آل سره است.

برهان. فرض کنیم X عضو دلخواهی از ایده آل $J_\kappa = \{B_\lambda | \lambda < \kappa, \lambda \in pcfA\}$ باشد. نشان می‌دهیم $X \neq A$. داریم:

$$X \in J_\kappa \Rightarrow \exists \lambda_1, ..., \lambda_n ; X \subseteq B_{\lambda_1} \cup ... \cup B_{\lambda_n}$$

$$\Rightarrow pcfX \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} pcfB_{\lambda_i}$$

$$\Rightarrow \max pcfX \leq \max \lambda_i < \kappa \leq \max pcfA \Rightarrow X \neq A$$

پس J_κ یک ایده آل سره است. $\square$

نتیجه **۴-۲-۶**. به ازای هر $X \subseteq A$ داریم $X \in J_\kappa$ اگر و تنها اگر به ازای هر ابر فیلتر روی X مانند D داشته باشیم $cofD < \kappa$

برهان. ابتدا فرض کنیم $X \in J_\kappa$ بنابراین $\max cofX < \kappa$ و در نتیجه به ازای هر ابر فیلتر D روی X داریم $cofD < \kappa$. به عکس فرض کنیم برای هر ابر فیلتر روی X مانند D داریم $cofD < \kappa$ نشان می‌دهیم $X \in J_\kappa$. به برهان خلف فرض کنیم این طور نباشد.

ادعا: مجموعه $\{X - B_\lambda | \lambda < \kappa\}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است.

برهان: فرض کنیم $\lambda_1 < ... < \lambda_n < \kappa$ نشان می‌دهیم:

$$(X - B_{\lambda_1}) \cap ... \cap (X - B_{\lambda_n}) = X - \bigcup_{1 \leq i \leq n} B_{\lambda_i} \neq \emptyset$$

به برهان خلف فرض کنیم این طور نباشد. داریم:

$$X - \bigcup_{1 \leq i \leq n} B_{\lambda_i} = \emptyset \Rightarrow X \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} B_{\lambda_i} \Rightarrow \max cofX < \kappa \Rightarrow X \in J_\kappa$$

اما فرض کردیم $X \notin J_\kappa$ پس به تناقض رسیدیم و فرض خلف باطل و ادعا برقرار است.
پس مجموعه $\{X - B_\lambda | \lambda < \kappa\}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است و قابل گسترش به یک ابر فیلتر مانند D است به طوری که $\forall \lambda < \kappa; B_\lambda \notin D$ پس $\forall \lambda < \kappa; X - B_\lambda \in D$ و در نتیجه $cof D \geq \kappa$ که با فرض در تناقض است. پس فرض خلف باطل است و $X \in J_\kappa$. $\square$

لم ۴-۲-۷. (فشردگی): به ازای هر $X \subseteq A$ وجود دارد $\lambda_1, ..., \lambda_n \in pcf X$ به طوری که $X \subseteq B_{\lambda_1} \cup ... \cup B_{\lambda_n}$

برهان. به برهان خلف فرض کنیم این طور نباشد و $X \subseteq A$ موجود باشد به طوری که دارای شرط فوق نباشد. در این صورت مجموعه $\{X - B_\nu | \nu \in pcf X\}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است و در نتیجه قابل گسترش به ابر فیلتری روی X مانند D است به طوری که $\forall \nu \in pcf X; X - B_\nu \in D$. در نتیجه $\forall \nu \in pcf X; B_\nu \notin D$ اما می‌دانیم $B_{cof D} \in D$ و $cof D \in pcf X$ که تناقض است پس فرض خلف باطل است و به ازای هر زیر مجموعه از A خاصیت فشردگی برقرار است. $\square$

۴-۳ بهبود مجموعه مولد یافت شده برای $pcf A$

در این بخش مجموعه مولد یافت شده برای $pcf A$ را با شرایط مورد نظر طوری بهبود می‌دهیم که برای اثبات دو قضیه بعدی (که برای اثبات قضیه دوم الزامی است) کمک کننده باشد.

قضیه ۴-۳-۱. فرض کنیم $2^{|A|} < \min A$ در این صورت مجموعه مولدی برای $pcf A$ مانند $\{B_\lambda | \lambda\}$ به طوری که:

$$\forall \lambda \in pcf A; \max cof(\bigcup \{B_\mu | \mu \in B_\lambda\}) \leq \lambda$$

برهان. فرض کنیم $\{B_\lambda | \lambda\}$ مجموعه مولد یافت شده در قضیه () برای $pcf A$ باشد. در ادامه هر کدام از B_λ ها را با B^*_λ که با B_λ معادل است جایگزین می‌کنیم تا مجموعه به دست آمده در شرط قضیه صدق کند. بنا بر شرط سوم در اثبات قضیه () برای هر $\lambda \in pcf A$ مجموعه $B_\lambda \in J^+_\lambda$ وجود دارد به طوری که J_λ یک κ - مقیاس روی B_λ دارد یعنی دنباله $\{f^\lambda_\alpha | \alpha < \lambda\}$ صعودی و هم پایان در B_λ وجود دارد. اکنون بنا بر لم () به ازای هر α و λ که $cof(\alpha) > 2^{|A|}$ می‌توانیم فرض کنیم f^λ_α کوچکترین کران بالای مجموعه $\{B^\lambda_\beta | \beta < \alpha\}$ است. حال فرض کنیم $\kappa = (2^{|A|})^+$ و $\kappa < \min A$ در این صورت زنجیره صعودی $\{M_\xi | \xi < \kappa\}$ از مدل های از سایز κ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱) مدل M_0 شامل A و $pcfA$ و تمام B_λ ها و مجموعه $\{f_\alpha^\lambda|\alpha < \lambda\}$ و تمام توابع از A به A است.

۲) برای هر $\eta < \kappa$ تعریف می‌کنیم $\langle M_\xi|\xi \leq \eta\rangle \in M_{\eta=1}$

۳) در صورتی که η یک اردینال حدی باشد تعریف می‌کنیم $M_\eta = \bigcup_{\xi<\eta} M_\xi$

۴) مدل M را برابر M_κ تعریف می‌کنیم.

به علاوه برای هر $\xi \leq \kappa$ تابع $\chi_\xi \in \prod A$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall \nu \in A; \chi_\xi(\nu) = \sup(M_\xi \cap \nu)$$

هم چنین به طور مشابه تابع χ را به صورت $\chi = \chi_\kappa$ تعریف می‌کنیم و داریم:

$$\forall \lambda \in pcfA; \chi(\lambda) = \sup(M \cap \lambda)$$

هم چنین داریم:

$$\forall \xi \leq \kappa; \chi_\xi \in M_{\xi+1} \Rightarrow \chi_\xi \in M$$

$$\forall \xi < \eta; M_\xi \in M_\eta \Rightarrow \forall \xi < \eta \forall \nu; \chi_\xi(\nu) < \chi_\eta(\nu)$$

پس χ کوچکترین کران بالای مجموعه $\{\chi_\xi|\xi < \kappa\}$ است و در نتیجه $\forall \lambda \in pcfA; cf\chi(\lambda) = \kappa$ پس $f_{\chi(\lambda)}^\lambda$ کوچکترین کران بالای مجموعه $\{f_\alpha^\lambda|\alpha \in M \cap \lambda\}$ نسبت به رابطه $\leq_{J_\lambda}$ است. از طرفی داریم:

$$\forall \alpha \in M \cap \lambda; f_\alpha^\lambda \in M \Rightarrow \forall \nu \in A; f_\alpha^\lambda(\nu) < \chi(\nu)$$

هم چنین روی B_λ داریم:

$$\forall \xi < \kappa \exists \alpha \in M; \chi_\xi \leq_{J_\lambda} f_\alpha^\lambda$$

بنابراین χ کوچکترین کران بالای مجموعه $\{f_\alpha^\lambda|\alpha \in M \cap \lambda\}$ روی B_λ و نسبت به رابطه $\leq_{J_\lambda}$ است اما کوچکترین کران بالا روی هر مجموعه منحصر به فرد است پس روی B_λ و تقریبا همه جا نسبت به

رابطه $\leq_{J_\lambda}$ داریم $\chi = f^{\lambda}_{\chi(\lambda)}$. اکنون به ازای هر $\lambda \in pcfA$ تعریف می‌کنیم:

$$B^*_\lambda = \{\nu \in B_\lambda | f^{\lambda}_{\xi(\lambda)}(\nu) = \chi(\nu)\}$$

هم چنین تعریف می‌کنیم:

$$E = \bigcup_{\lambda} \{B^*_\mu | \mu \in B^*_\lambda\}$$

و برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم $\max cofE \leq \lambda$.

ادعا: $E \in J_{\lambda^+}$

برهان: تابع $\phi : A \longrightarrow A$ را در مقدار ν به صورت کوچکترین μ ای تعریف می‌کنیم که $\nu \in B^*_\mu \in E$ و اگر $\nu \notin E$ آنگاه به صورت $\phi(\nu) = \min A$ تعریف می‌کنیم. ϕ تابعی از A به A است پس $\phi \in M$ و به ازای هر $\alpha < \lambda$ تابع $g_\alpha \in \prod A$ را به صورت $g_\alpha(\nu) = f^{\mu}_{\beta}(\nu)$ تعریف می‌کنیم که در آن $\mu = \phi(\nu), \beta = f^{\lambda}_{\alpha}(\mu), \nu \in A$. حال مجموعه $\{g_\alpha | \alpha < \lambda\} \in M$ و J_{λ^+} یک ایده آل λ^+ - جهت دار است پس مجموعه $\{g_\alpha | \alpha < \lambda\}$ کوچکترین کران بالایی مانند $g \in M$ دارد. چون $g \in M$ پس $\forall \nu; g(\nu) <_{J_{\lambda^+}} \chi(\nu)$ اگر قرار دهیم $\alpha = \chi(\lambda)$ در این صورت $g_\alpha <_{J_{\lambda^+}} g <_{J_{\lambda^+}} \chi$ و در نتیجه $\{\nu \in A | g_\alpha(\nu) \geq \chi(\nu)\} \in J_{\lambda^+}$. اکنون روی E داریم:

$$\beta = f^{\lambda}_{\alpha}(\mu) = f^{\lambda}_{\chi(\lambda)}(\mu) = \chi(\mu) \Rightarrow \forall \nu \in A; g_\alpha(\nu) = f^{\mu}_{\beta}(\nu) = f^{\mu}_{\chi(\mu)}(\nu) = \chi(\nu) \Rightarrow g_\alpha = \chi$$

پس روی E داریم $g_\alpha = \chi$ و در نتیجه $E \subseteq \{\nu \in A | g_\alpha(\nu) \geq \chi(\nu)\} \in J_{\lambda^+}$ پس $E \in J_{\lambda^+}$

از این که $E \in J_{\lambda^+}$ بنا بر نتیجه (۴-۲-۶) به ازای هر ابر فیلتر D روی E داریم $cofD < \lambda^+$ پس $cofD \leq \lambda$ و در نتیجه $\max cofE \leq \lambda$ $\square$

۴-۴ مقدمه ای بر اثبات قضیه دوم

در این بخش به بررسی دو قضیه ای می‌پردازیم که در اثبات قضیه دوم کمک کننده است.

قضیه ۴-۴-۱. فرض کنیم κ یک کاردینال منظم و ناشمارا و $\aleph_\eta$ یک کاردینال تکین باشد و $cf(\aleph_\eta) = \kappa$ و هم چنین $2^\kappa < \aleph_\eta$ در این صورت مجموعه بسته و بی کران $C \subset \eta$ وجود دارد به طوری که $\max cof\{\aleph_{\alpha+1} | \alpha \in C\} = \aleph_{\eta+1}$

برهان. فرض کنیم $C_\circ \subset \eta$ یک مجموعه بسته و بی کران دلخواه باشد به طوری که $ot(C_\circ) = \kappa$. هم چنین فرض کنیم $A = \{\aleph_{\alpha+1} | \alpha \in C_\circ\}$ و $\{B_\lambda | \lambda \in pcfA\}$ مجموعه مولدی برای $pcfA$ باشد. به علاوه فرض کنیم $\lambda = \aleph_{\eta+1}$ و تعریف می‌کنیم:

$$X := \{\alpha \in C_\circ | \aleph_{\alpha+1} \in B_\lambda\}$$

اکنون فرض کنیم D یک ابر فیلتر دلخواه روی $C_\circ$ باشد به طوری که شامل مجموعه های بسته و بی کران باشد پس $D \cap NS_\eta = \emptyset$ و بنا بر قضیه (۱-۲-۳) داریم:

$$cf \prod_{\alpha \in C_\circ} \aleph_{\alpha+1}/D = \aleph_{\eta+1} = \lambda \Rightarrow X \in D$$

بنابراین مجموعه بسته و بی کران C وجود دارد به طوری که $C \subseteq X$ و در نتیجه داریم:

$$\{\aleph_{\alpha+1} | \alpha \in C\} \subseteq \{\aleph_{\alpha+1} | \alpha \in X\} \subseteq B_\lambda \Rightarrow \max cof\{\aleph_{\alpha+1} | \alpha \in C\} \leq \max cof B_\lambda = \lambda$$

از طرفی:

$$\max cof\{\aleph_{\alpha+1} | \alpha \in C\} \geq \max cof\{\aleph_{\alpha+1} | \alpha < \lambda, \alpha \in C\} \geq \lambda$$

بنابراین:

$$\max cof\{\aleph_{\alpha+1} | \alpha \in C\} = \lambda = \aleph_{\eta+1}$$

□

قضیه ۴-۴-۲. فرض کنیم مجموعه $C \subseteq pcfA$ طوری باشد که $|C| < |A|$ و $2^{|C|} < \min A$ در این صورت زیر مجموعه سره B از C موجود است به طوری که $|B| \leq |A|$ و $\max cofB \geq \sup C$

برهان. فرض کنیم $\{B_\lambda | \lambda \in pcf(A \cup C)\}$ مجموعه مولدی برای $pcf(A \cup C)$ باشد که در شرط قضیه (۱-۳-۴) صدق می‌کند. برای هر $\lambda \in C$ تعریف می‌کنیم $B_\lambda^A = A \cap B_\lambda$. چون $C \subseteq pcfA$ پس $\lambda \in pcfA$ و در نتیجه ابر فیلتر D روی A وجود دارد به طوری که $cofD = \lambda$ پس داریم:

$$B_\lambda \in D \Rightarrow B_\lambda^A \in D \Rightarrow \lambda \in pcfB_\lambda^A \Rightarrow pcfA \subseteq pcfB_\lambda^A$$

حال تعریف می‌کنیم $E=\bigcup\{B^A_\lambda|\lambda\in C\}$ و داریم:

$$C\subseteq pcfE\Rightarrow \max cofE\geq \sup C$$

از طرفی داریم:

$$E=\bigcup\{B_\lambda\cap A|\lambda\in C\}\subseteq A\Rightarrow |E|\leq|A|\Rightarrow \exists B\subset C; |B|\leq|A|, E=\bigcup\{B^A_\lambda|\lambda\in B\}$$

اکنون کافی است نشان دهیم $\max cofB\geq \max cofE$ بنا بر فشردگی داریم:

$$\exists\lambda_۱,...,\lambda_n\in pcfB; B\subseteq\bigcup_{۱\leq i\leq n}B_{\lambda_i}$$

$$\Rightarrow E=\bigcup_{۱\leq i\leq n}(\bigcup\{B_\mu|\mu\in\lambda_i\})$$

$$\Rightarrow \max cofE\leq\max\{\lambda_i|۱\leq i\leq n\}\leq \max cofB$$

□

فصل پنجم

اثبات قضیه دوم

در این فصل با فرض این که $\aleph_\omega$ حد قوی است نشان می‌دهیم $\max cof\{\aleph_n|n<\omega\}<\aleph_{\omega_4}$. از این که $2^{\aleph_0}<\aleph_\omega$ بنا بر لم (۳-۳-۳) و نتایج (۱-۲-۴) و (۴-۲-۴) می‌دانیم $pcf\{\aleph_n|n<\omega\}$ یک بازه است و هم چنین دارای بزرگترین عضوی مانند $\aleph_{\Theta+1}$ است و چون $\aleph_{\Theta+1}<\aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$ پس $\Theta<(2^{\aleph_0})^+<\aleph_\omega$. در واقع با توجه به قضیه اول $2^{\aleph_\omega}=\max cof\{\aleph_n|n<\omega\}=\aleph_{\Theta+1}$ و در این فصل نشان می‌دهیم $\aleph_{\Theta+1}<\aleph_{\omega_4}$

قضیه ۵-۰-۱. برای Θ فوق تابع اردینالی F روی $P(\Theta)$ وجود دارد که دارای شرایط زیر است:

۱) اگر $X\subseteq Y$ در این صورت $F(X)\le F(Y)$

۲) اگر $\theta<\Theta$ یک اردینال حدی با هم پایانی ناشمارا باشد در این صورت مجموعه بسته و بی کران $C\subseteq\theta$ وجود دارد به طوری که $F(C)=\theta$

۳) اگر $X\subseteq\Theta$ طوری باشد که $ot(X)=\omega_1$ در این صورت $\gamma\in X$ وجود دارد به طوری که $F(X\cap\gamma)\ge\sup X$

برهان. برای $X\subseteq\Theta$ تعریف می‌کنیم $B_X=\{\aleph_{\xi+1}|\xi\in X\}$ و داریم $2^{|B_X|}=2^{|X|}<2^{2^{\aleph_0}}<\aleph_\omega$ و چون $\aleph_\omega$ حد قوی است پس $2^{|B_X|}=\aleph_\kappa$ که در آن κمتناهی است پس $\max cof B_X$ موجود است و در نتیجه $\exists\eta_X;\max cof B_X=\aleph_{\eta_X+1}$. اکنون تابع $F:P(\Theta)\longrightarrow ON$ را به صورت $F(X)=\eta_X$ تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم سه شرط فوق را دارد. شرط اول بنا بر نوع تعریف تابع F واضح است. برای شرط دوم فرض کنیم $\theta<\Theta$ یک اردینال حدی با هم پایانی ناشمارا است پس $\aleph_\theta$ یک کاردینال تکین است و داریم:

$$cf(\aleph_\theta)=\theta,2^\theta<\aleph_\theta$$

پس بنا بر قضیه (۱-۴-۴) مجموعه بسته و بی کران $C\subseteq\theta$ وجود دارد به طوری که $\max cof\{\aleph_{\alpha+1}|\alpha\in C\}=\aleph_{\theta+1}$ و در نتیجه $F(C)=\theta$. اکنون برای شرط سوم فرض کنیم $X\subseteq\Theta$ به طوری که $ot(X)=\omega_1$. هم چنین فرض کنیم $A=\{\aleph_n\}$ برای n های به قدر کافی بزرگ باشد به طوری که برای $C=\{\aleph_{\alpha+1}|\alpha\in X\}$ داشته باشیم $2^{|C|}<\min A$ پس داریم $C\subseteq pcf A$ و $|C|>|A|$ و در نتیجه بنا بر قضیه (۲-۴-۴) مجموعه $B_0\subset C$ وجود دارد به طوری که $|B_0|\le|A|$ و $\max cof B_0\ge\sup C$ و چون $B_0\subset C$ پس داریم:

$$\exists\gamma\in X;B_0\subseteq\{\aleph_{\alpha+1}|\alpha\in X\cap\gamma\}\Rightarrow\max cof B_0\le F(X\cap\gamma)$$

حال فرض کنیم $B = \{\alpha \in X | \aleph_{\alpha+1} \in B_0\}$ چون $\max cof B_0 \geq \sup C$ پس داریم:

$$\sup X \leq \max cof B = \max cof B_0 \leq F(X \cap \gamma) \Rightarrow \sup X \leq F(X \cap \gamma)$$

□

در دو قضیه بعدی نشان می‌دهیم که شرایط اول تا سوم قضیه فوق نتیجه می‌دهد که $\Theta < \omega_4$

لم ۵-۰-۲. فرض کنیم $E_1^3 = \{\alpha < \omega_3 | cf\alpha = \omega_1\}$ در این صورت خانواده $\{C_\alpha | \alpha \in E_1^3\}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر α مجموعه $C_\alpha \subseteq \alpha$ بسته و بی کران است و به ازای هر مجموعه بسته و بی کرانی مانند $C \subseteq \omega_3$ مجموعه $\{\alpha \in E_1^3 | C_\alpha \subset C\}$ ایستا است.

برهان. به برهان خلف فرض کنیم این طور نباشد. مجموعه $\{C_\alpha^0 | \alpha \in E_1^3, |C_\alpha^0| = \aleph_1, C_\alpha^0 \subseteq \alpha\}$ را که در آن هر $C_\alpha^0 \subseteq \alpha$ یک مجموعه بسته و بی کران است، در نظر می‌گیریم. بنا بر فرض خلف مجموعه بسته و بی کران $E_0 \subseteq \omega_3$ وجود دارد که مجموعه $\{\alpha \in E_1^3 | C_\alpha^0 \subset E_0\}$ نا ایستا است. اکنون فرض کنیم برای $\xi < \nu$ مجموعه های E_ξ و C_ξ^ν ساخته شده باشند به طوری که $C_\alpha^\nu = C_\alpha^0 \bigcap (\bigcap_{\xi<\nu} E_\xi)$ و مجموعه $\{\alpha \in E_1^3 | C_\alpha^\nu \subset E_\nu, C_\alpha^\nu \subseteq \alpha\}$ که در آن هر $C_\alpha^\nu \subseteq \alpha$ یک مجموعه بسته و بی کران است، یک مجموعه نا ایستا باشد. تابع D_α^ν را به صورت $D_\alpha^\nu = C_\alpha^\nu$ تعریف می‌کنیم هرگاه $C_\alpha^\nu \subseteq \alpha$ یک مجموعه بسته و بی کران باشد و در غیر این صورت به شکل C_α^0 تعریف می‌کنیم. اکنون با استفاده از استقرا و بنا بر فرض خلف مجموعه بسته و بی کران $E_\nu \subseteq \omega_3$ وجود دارد به طوری که مجموعه $\{\alpha \in E_1^3 | C_\alpha^\nu \subset E_\nu, C_\alpha^\nu \subseteq \alpha\}$ که در آن هر $C_\alpha^\nu \subseteq \alpha$ یک مجموعه بسته و بی کران است، یک مجموعه نا ایستا است. اکنون تعریف می‌کنیم:

$$E := \bigcap_{\nu<\omega_2} E_\nu, \forall\alpha; C_\alpha = C_\alpha^0 \cap E$$

پس مجموعه $S = \{\alpha \in E_1^3 | E \cap \alpha \subseteq \alpha\}$ که در آن $E \cap \alpha \subseteq \alpha$ مجموعه ای بسته و بی کران است شامل اشتراک مجموعه ایستا E_1^3 و مجموعه بسته و بی کران نقاط حدی E است پس S نیز یک مجموعه ایستا است. از طرفی دنباله ... $C_\alpha^0 \supseteq C_\alpha^1 \supseteq$ از طول ω_2 است پس داریم:

$$\forall\alpha \in S \exists\nu(\alpha) < \omega_2; C_\alpha = C_\alpha^{\nu(\alpha)}$$

حال تابع $F: S \longrightarrow \omega_2$ را به صورت $F(\alpha) = \nu(\alpha)$ تعریف می‌کنیم پس طبق لم فودور $\nu < \omega_2$ و مجموعه ایستا $T \subseteq S$ وجود دارد به طوری که $F \upharpoonright T = \nu$ بنابراین داریم:

$$\forall \alpha \in T; C_\alpha = C_\alpha^\nu \Rightarrow \forall \alpha \in T; C_\alpha^\nu = C_\alpha^{\nu+1} = C_\alpha^\nu \cap E_\nu \Rightarrow C_\alpha^\nu \subset E_\nu$$

پس مجموعه ایستا T زیر مجموعه ای از مجموعه نا ایستا $\{\alpha \in E_1^3 | C_\alpha^\nu \subseteq \alpha, C_\alpha^\nu \subset E_\nu\}$ است که در آن $C_\alpha^\nu \subseteq \alpha$ یک مجموعه بسته و بی کران است، که تناقض است. پس برهان خلف باطل و قضیه برقرار است. □

لم **۵-۰-۳.** فرض کنیم $F: P(\Theta) \longrightarrow ON$ تابعی باشد که در شرایط قضیه (۳-۰-۵) صدق می‌کند در این صورت $\Theta < \omega_4$

برهان. به برهان خلف فرض کنیم این طور نباشد و $\Theta \geq \omega_4$ و فرض کنیم $\{C_\alpha | \alpha \in E_1^3\}$ خانواده ای باشد که در لم (۴-۰-۵) صدق می‌کند. هم چنین فرض کنیم $\{M_\alpha | \alpha < \omega_3\}$ یک زنجیره مقدماتی از مدل های از سایز $\aleph_3$ باشد به طوری که دارای شرایط زیر باشد:

۱) $\forall \alpha; M_\alpha \supseteq \{C_\alpha | \alpha \in E_1^3\}$

۲) $\langle M_\xi | \xi \leq \alpha \rangle \in M_{\alpha+1}$

۳) $\forall lim(\alpha); M_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi$

۴) $\forall \alpha \exists \eta_\alpha \in ON; \eta_\alpha = M_\alpha \cap \omega_4$

اکنون تابع $\eta: \omega_3 \longrightarrow \omega_4$ را به صورت $\eta(\alpha) = \eta_\alpha$ تعریف می‌کنیم و در شرط دوم قضیه (۳-۰-۵) قرار می‌دهیم $\theta = \omega_3$ و داریم:

$$\exists C \subseteq \omega_3; F(C) = \omega_3 \Rightarrow F(\eta[C]) = \sup_\alpha \eta_\alpha$$

حال فرض کنیم $\alpha \in E_1^3$ طوری باشد که $C_\alpha \subset C$ و بنا بر شرط سوم قضیه (۳-۰-۵) داریم:

$$\exists \beta < \alpha; F(\beta \cap C_\alpha) \geq \sup_\alpha C_\alpha = \alpha \Rightarrow F(\eta[B \cap C_\alpha]) \geq \eta(\alpha)$$

از طرفی فرض کنیم $X = \eta[B \cap C_\alpha]$ پس $X \subseteq \eta(C)$ و بنا بر شرط اول قضیه (۳-۰-۵) داریم:

$$F(X) \leq F(\eta(C)) = \sup_\alpha \eta_\alpha < \omega_۴, F(X) \in M_\alpha \Rightarrow F(X) \in M_\alpha \cap \omega_۴ = \eta(\alpha) \Rightarrow F(X) < \eta(\alpha)$$

پس برای $X = \eta[B \cap C_\alpha]$ یکبار $F(X) < \eta(\alpha)$ و بار دیگر $F(X) \geq \eta(\alpha)$ را به دست آوردیم که تناقض است پس فرض خلف باطل است و $\Theta < \omega_۴$ $\square$

منابع و مراجع

[1] Burke, Maxim R and Magidor, Menachem. Shelah's pcf theory and its applications. *Annals of Pure and Applied Logic*, 50(3):207–254, 1990.

[2] Erdös, Paul and Rado, Richard. A partition calculus in set theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 62(5):427–489, 1956.

[3] Galvin, Fred and Hajnal, András. Inequalities for cardinal powers. *Annals of Mathematics*, pages 491–498, 1975.

[4] Jech, Thomas. Singular cardinal problem: Shelah's theorem on $2^{\aleph_\omega}$. *Bulletin of the London mathematical Society*, 24(2):127–139, 1992.

[5] Jech, Thomas. *Set theory*. Springer Science & Business Media, 2013.

[6] Shelah, Saharon. Proper forcing. *Lecture Notes in Math. 940*, 1982.

[7] Shelah, Saharon. Cardinal arithmetic for skeptics. *arXiv preprint math/9201251*, 1992.

[8] Silver, Jack. On the singular cardinals problem. 1975.

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی

آ

ابرفیلتر . . . . Ultrafilter

اصل اجتماع . . . . Axiom of union

اصل انتخاب . . . . Axiom of choice

اصل بی نهایت . . . . Axiom of Infinity

اصل نظم . . . . Axiom of Regularity

اصل زوجیت . . . . Axiom of Pairing

اصل گسترش . . . Axiom of Extensionality

اصل مجموعه توانی . . Axiom of Power Set

ایده آل . . . . Ideal

ایده آل جهت دار . . . . Directed ideal

ایستا . . . . Stationary

ب

بسته و بی کران Close and unbounded(club)

ت

تابع اردینالی . . . . Ordinal function

تابع بازگشتی . . . . . . Regressive function

ح

حد قوی . . . . Strong limit

حاصل ضرب تحویل یافته . Reduced product

خ

خاصیت اشتراک متناهی . Finite intersection property

ز

زنجیر . . . . Chain

زیر ساخت . . . . Substructure

زیر ساخت مقدماتی . . . . Elementary substructure

س

ساختار . . . . Structure

ط

طرح واره اصل جای گذاری . Axiom Schema of Replacement

طرح واره اصل جداسازی Axiom Schema of Separation

ف

فرضیه پیوستار . . . . Continuum hypothesis

فیلتر . . . . Filter

فیلتر دوگان . . . . Dual filter

ک

کاردینال تکین . . . . Singular cardinal

کاردینال منظم . . . . Regular cardinal

ل

لم جداسازی . . . . Splitting lemma

م

مقیاس . . . . Scale

ن

ناایستا . . . . Nonstationary

نشاندن . . . . Embedding

نشاندن مقدماتی . . Elementary embedding

ه

هم پایانی . . . . Cofinality

هم پایانی راستین . . . . True Cofinality

هم پایانی ناشمارا . Uncountable Cofinality

هم پایانی های ممکن . Possible Cofinalities

همگن . . . . Homogeneos

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

A

اصل انتخاب . . . . Axiom of choice

اصل گسترش . . . Axiom of Extensionality

اصل بی نهایت . . . . Axiom of infinity

اصل زوجیت . . . . Axiom of Pairing

اصل مجموعه توانی . . Axiom of Power Set

اصل نظم . . . . Axiom of Regularity

اصل اجتماع . . . . Axiom of union

طرحواره اصل جای گذاری . Axiom Schema of Replacement

طرحواره اصل جداسازی . Axiom Schema of Separation

C

زنجیر . . . . Chain

بسته و بی کران Close and unbounded(club)

هم پایانی . . . . Cofinality

فرضیه پیوستار . . . . Continuum hypothesis

D

ایده آل جهت دار . . . . Directed ideal

فیلتر دوگان . . . . Dual filter

E

نشاندن مقدماتی . . Elementary embedding

زیر ساخت مقدماتی . . . . Elementary substructure

نشاندن . . . . Embedding

F

فیلتر . . . . Filter

خاصیت اشتراک متناهی . Finite intersection property

H

Homogeneos . . . . همگن

I

Ideal . . . . ایده آل

N

Nonstationary . . . . ناایستا

O

Ordinal function . . . . تابع اردینالی

P

Possible cofinalities . هم پایانی های ممکن

R

Reduced products حاصل ضرب تحویل یافته

Regressive function . . . . تابع بازگشتی

Regular cardinal . . . . کاردینال منظم

S

Scale . . . . مقیاس

Singular cardinal . . . . کاردینال تکین

Splitting lemma . . . . لم جداسازی

Stationary . . . . ایستا

Strong limit . . . . حد قوی

Structure . . . . ساختار

Substructure . . . . زیر ساخت

T

True cofinality . . . . هم پایانی راستین

U

Ultrafilter . . . . ابر فیلتر

Uncountable . . . . . . هم پایانی های ناشمارا
cofinality

Abstract

In this thesis, we study and prove a theorem of Shelah which gives upper bounds for $2^{\aleph_\omega}$ under the assumption $\aleph_\omega$ is a strong limit cardinal. In order to do that we study ordinal functions and the nonstationary ideal and develop some of Shelah's pcf theory about the structure of possible cofinalities of ultraproducts of sets of regular cardinals.

Key Words:

Ordinal function, cofinality, strong limit, nonstationary ideal, possible cofinalities

Amirkabir University of Technology
(Tehran Polytechnic)

Department of Math and Computer Science

M. Sc. Thesis

Topics in cardinal arithmetic

By

Zakieh Zakery

Supervisors

Dr. Masood Poormahdian and Dr. Mohammad Golshani

Advisor

Dr. Nazanin Roshandel Tavana

June 2020