بسم الله الرحمن الرحیم

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیت‌های علمی- پژوهشی دانشگاه است، بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامه کارشناسی ارشد نگارنده در رشته **ریاضی محض** است که در سال **۱۳۹۳** در دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر **سیدمحمد باقری و مشاوره جناب آقای دکتر محمد گلشنی قریه علی** از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یك درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰% بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهاي خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضايي مطالبه و وصول کند؛ به‌علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به‌منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتاب‌های عرضه شده نگارنده براي فروش، تأمین نماید.

ماده ۶: اینجانب **زهرا علی بیگلو** دانشجوی رشته **ریاضی محض** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن‌را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی: **زهرا علی بیگلو**

تاریخ و امضا:

آیین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه : با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسان‌ها که لازمه شکوفایی علمی و فني است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضاي هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهش‌های علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرح‌های تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱ : حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می‌باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲: انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمي و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکي از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولي مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان‌نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو مي‌باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳: انتشار کتاب ، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه (حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده‌ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده‌ها، پارك علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین‌نامه‌های مصوب انجام شود.

ماده ۴: ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته‌ها در جشنواره‌هاي ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامي طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه می‌باشد، باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵: این آیین‌نامه در ۵ ماده و یك تبصره در تاریخ ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم الاجرا است.

«اینجانب **زهرا علی بیگلو** دانشجوی رشته **ریاضی محض** ورودی سال تحصیلی **۹۴** مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم ریاضی** متعهد می‌شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش‌های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته‌های علمی مستخرج از پایان نامه تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می‌دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله براساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم.»

امضا:

تاریخ:

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

درباره انگاره وات

دانشجو:

زهرا علی بیگلو

استاد راهنما:

دکتر سیدمحمد باقری

استاد مشاور:

دکتر محمد گلشنی

۱۳۹۶

برای
پدر و مادر مهربانم

سپاس گزاری

سپاس بیکران از اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر سید محمد باقری و دکتر محمد گلشنی، که مسوولیت راهنمایی و مشاوره این پایان نامه را پذیرفتند و از هیچ کوششی برای رشد کیفی آن دریغ نکردند.

و با سپاس از همسر و یگانه فرزندم، که هر یک به طریقی، انگیزه ام را برای بیشتر آموختن و درک بهتر زندگی، افزودند.

چکیده

برهانی مدل تئوریکی را تشریح می کنیم که حاکی از آن است که اگر پادگواهه ای برای انگاره وات وجود داشته باشد آنگاه پادگواهه ای هم وجود دارد که هر مدل آن از کاردینال $\aleph_1$ ماکسیمال است (یورت). در این پژوهش، مثال یورت برای جمله ای که $\aleph_1$ را توصیف می کند، بررسی می شود. همچنین برای قضیه هرینگتون، مبنی بر اینکه اگر پادگواهه ای برای انگاره وات وجود داشته باشد، آنگاه مدل هایی از این پادگواهه با رتبه اسکات به قدر دلخواه بزرگ کمتر از $\aleph_2$ وجود دارد، آورده شده است. در واقع سه مسیر نادرست برای حل انگاره وات مشخص می گردد: نخست متدولوژی و دو دیگر تحلیل و برهان نادرست برگرفته از تلفیق نتایج یورت و هرینگتون برای دست یابی به حل انگاره وات.

واژه‌های کلیدی:

انگاره وات مطلق، انگاره وات، پادگواهه انگاره وات، جمله پرآکنده، حد مستقیم فراگمنت ها، درخت ژنریک مورلی، درخت گسترش یافته مورلی، رتبه اسکات، ساختار فرایسه، سیستم مستقیم مجموعه ها و فراگمنت ها، فورسینگ، قضیه هرینگتون، قضیه یکریختی اسکات، مثال یورت، واشناخت ناپذیرهای مطلق.

فهرست

پیش گفتار

هنگامی که رابرت لاوسون وات، ریاضیدان آمریکایی در سال ۱۹۶۱ انگاره مشهور خود را بیان کرد، شاید گمان نداشت که این انگاره همان مرغ تخم طلایی باشد که دیوید هیلبرت آلمانی از آن سخن می گفت.

این انگاره که حاصل تلاش های وات و مورلی برای تعداد مدل های شمارای نایکریخت یک تئوری مرتبه اول بود، بعدها در زبان های ترامتناهی هم تعمیم جالبی برای خود یافت که منجر به دستاوردهای بسیاری در این زمینه شد. کارهای نایت، یورت، هرینگتون و ... نمونه هایی از همان تخم های طلا هستند.

و البته در مسیر حل این مساله، سردرگمی هایی هم برای کنار هم گذاشتن نتایج به دست آمده، و نتیجه گیری و ساختن پادگواهه ای برای آن، همواره وجود داشته است و گاهی هم بسیار به بیراهه رفته است. شاید به همین سبب، بالدوین، فریدمن، کوروین و لاسکوسکی تصمیم گرفته اند در مقاله ای با عنوان ***سه شاه ماهی قرمز برای انگاره وات*** *سر و سامانی به این روند بدهند.*

گفتنی است که شاه ماهی قرمز، در اصطلاح وقتی به کار می رود که چیزی شبیه یک سفسطه منطقی، خواننده یا شنونده را به سوی فرجامی نادرست رهنمون می گردد. چنانکه در این مقاله هم سه مسیر اشتباه برای حل انگاره وات، مطرح شده است. همچنین برهان جدیدی از قضیه هرینگتون ارائه می شود که برگرفته از نتایجی از نظریه مدل ها و نیز نظریه مجموعه ها، می باشد.

این مقاله در این پژوهش محور اصلی مطالعه بوده ولی به دلیل اینکه در فرایندی درهم تنیده از مباحث گوناگون نظریه مدل ها و نظریه مجموعه ها صورت گرفته است، گریزی از مطالعه و بررسی فراوان در منابع دیگر، نبود و به همین سبب بخش پیش نیازها، شاید کمی طولانی شد.

به هر روی، امید آن دارم که این پژوهش، فراتر از دریافت مدرکی تحصیلی، مفید واقع شود و به کار آید.

فصل ۱

پیش‌نیازها

۱-۱ مفاهیم اولیه نظریه مجموعه ها

تعریف ۱-۱-۱. رابطه دوتایی R را روی مجموعه A خوش بنیان گوییم اگر هر زیرمجموعه ناتهی $B \subseteq A$ یک عضو کمینه داشته باشد، که عضوی همچون c است به طوری که برای هر $b \in B$ چنین نباشد که bRc

.

تعریف ۱-۱-۲. یک رابطه خطی $>$ روی یک مجموعه W خوش ترتیب است اگر خوش بنیان باشد.

تعریف ۱-۱-۳. مجموعه z را ترایایی گوییم اگر برای هر $y \in z$ و هر $x \in y$ ، $x \in z$.

تعریف ۱-۱-۴. مجموعه α یک اردینال است اگر ترایایی و خوش ترتیب با $\in$ باشد.

گزاره ۱-۱-۵. ([۱۱]) ۱. $\emptyset$ یک اردینال است.

۲. اگر α یک اردینال باشد، آنگاه کمترین اردینال بزرگتر از α همان $\alpha \cup \{\alpha\}$ است که آن را اردینال $\alpha + ۱$ گوییم.

۳. اگر $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ گردایه ای از اردینال ها باشد، آنگاه $\bigcup_{i \in I} \alpha_i$ هم یک اردینال است.

در واقع اردینال ها از پایین به بالا عبارتند از:

- $۰ = \emptyset$
- $۱ = \{\emptyset\}$
- $۲ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $۳ = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- ....
- $\omega = \{۰, ۱, ۲, ۳, ...\}$
- $\omega + ۱ = \{۰, ۱, ۲, ۳, ..., \omega\}$

برای نشان دادن کلاس اردینال ها می نویسیم Ord که در واقع این کلاس با $\in$ خوش ترتیب است. به عبارت دیگر گزاره بسیار جالب زیر را داریم:

گزاره ۱-۱-۶. ([۱۱]) هر خوش ترتیبی یکریخت با یک اردینال یکتاست.

تعریف ۱-۱-۷. فرض کنید α یک اردینال باشد.

- α اردینال تالی است اگر $\alpha = \beta + 1$ برای یک اردینال β .
- α اردینال حدی است اگر دنباله افزایشی نامتناهی از اردینال های $\langle \alpha_i \mid i < \lambda \rangle$ وجود داشته باشد که $\alpha = \bigcup_{i<\lambda} \alpha_i$.

تعریف ۱-۱-۸. اردینال α یک کاردینال است اگر هیچ نگاشت پوشایی از یک اردینال کمتر از α به روی α وجود نداشته باشد.

قضیه ۱-۱-۹. (کانتور) [۲۲] برای هر کاردینال κ داریم: $\kappa < 2^\kappa$.

بنابر قضیه کانتور می بینیم که هر کاردینال κ یک کاردینال بزرگتر از خود دارد که کمترین کاردینال بزرگتر از κ را κ^+ می نامیم. افزون بر این، اجتماع گردایه ای از کاردینال ها هم یک کاردینال است. این مطالب به ما اجازه می دهد که با بکارگیری اردینال ها، بتوانیم کاردینال ها را شمارش کنیم:

- $\aleph_0 = \omega$
- $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$
- *و اگر γ یک اردینال حدی باشد:*

$$\aleph_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \aleph_\alpha$$

تعریف ۱-۱-۱۰. (هم پایانی): فرض کنید α یک اردینال حدی باشد. هم پایانی α که با $cf(\alpha)$ نشان می دهیم کمترین $\lambda \leq \alpha$ است که یک دنباله افزایشی $\langle \alpha_i \mid i < \lambda \rangle$ از اردینال های کمتر از α وجود داشته باشد که $sup_{i<\lambda}\alpha_i = \alpha$.

۱-۲ زبان های ترامتناهی

فرض کنید τ یک نمادگان باشد، یعنی مجموعه ای از نمادهای تابعی، رابطه ای و ثابت. در منطق $L_{\infty,\omega}(\tau)$ فرمول ها را با استفاده از نمادهایی از τ، تساوی، هابندهای بولی $\bigvee$ و $\bigwedge$ و $\neg$ و نیز چنداگرها $\forall$ و $\exists$ و متغیرهای آزاد $\{v_\alpha : \alpha \in Ord\}$ می سازیم.

- ترم ها و فرمول های اتمی همچون منطق مرتبه اول تعریف می شوند.
- اگر ϕ فرمول باشد، آنگاه $\neg\phi$ هم فرمول است.
- اگر X یک مجموعه از فرمول ها باشد، آنگاه $\bigwedge_{\phi\in X}\phi$ و $\bigvee_{\phi\in X}\phi$ هم فرمول هستند.
- اگر ϕ فرمول باشد، آنگاه $\forall v_\alpha\phi$ و $\exists v_\alpha\phi$ هم فرمولند.

همچنین تعاریف متغیرهای آزاد، صدق و درستی، جمله، تئوری، زیرفرمول و ... هم مشابه منطق مرتبه اول بیان می شود.

فرض کنید κ یک کاردینال نامتناهی است. در منطق $L_{\kappa,\omega}(\tau)$ فقط از متغیرهای $\{v_\alpha : \alpha < \kappa\}$ می توانیم در فرمول ها استفاده کنیم و نیز ترکیبات عطفی و فصلی نامتناهی را به $\bigwedge_{\phi\in X}\phi$ و $\bigvee_{\phi\in X}\phi$ که $| X |< \kappa$ محدود می کنیم.

بنابراین $L_{\omega,\omega}$ همان منطق مرتبه اول است.

تعریف ۱-۲-۱. می گوییم $M \equiv_{\infty,\omega} N$ اگر برای هر $L_{\infty,\omega}$-جمله ϕ ،

$$M \models \phi \Longleftrightarrow N \models \phi$$

نماد $M \equiv_{\kappa,\omega} N$ هم بطور مشابه تعریف می شود.

همچنین به سادگی می توان نشان داد که $M \cong N$ نتیجه می دهد که $M \equiv_{\infty,\omega} N$. اما نکته جالب توجه دیگر در زبان های نامتناهی این است که قضیه فشردگی رد می شود و برقرار نیست!

تعریف ۱-۲-۲. برای هر فرمول ϕ، یک نقیض سوری $\sim\phi$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

- برای ϕ اتمی، $\sim\phi$ همان $\neg\phi$است.
- $\sim(\neg\phi)$ برابر با ϕ است.
- $\sim\bigvee_{\phi\in X}\phi=\bigwedge_{\phi\in X}\sim\phi$ و نیز $\sim\bigwedge_{\phi\in X}\phi=\bigvee_{\phi\in X}\sim\phi$
- $\sim\exists v\phi$ برابر است با $\forall v\sim\phi$ و $\sim\forall v\phi$ همان $\exists v\sim\phi$ است.

تعریف ۱-۲-۳. می گوییم مجموعه A از $L_{\infty,\omega}$ -فرمول ها، یک پارک است اگر یک مجموعه نامتناهی V از متغیرها وجود داشته باشد که اگر $\phi\in A$ آنگاه همه متغیرهایی که در ϕ واقع می شوند درون V باشند و A در ویژگی های بستاری زیر صدق کند:

- همه فرمول های اتمی متشکل از نمادهای ثابت τ و متغیرهایی از V در A واقع می شوند؛
- اگر $\phi\in A$ و ψ زیرفرمولی از ϕ باشد آنگاه $\psi\in A$
- اگر $\phi\in A$ و v متغیر آزاد ϕ و t هم ترمی باشد که همه متغیرهایش در V باشند. آنگاه جایگذاری t بجای هر متغیر آزادی در ϕ بازهم در A است؛
- A تحت $\sim$ بسته است؛
- A تحت $\neg,\wedge,\vee$ و $\forall v$ و $\exists v$ برای هر v بسته است.

تعریف ۱-۲-۴. جمله برآورده شدنی $\phi\in L_{\infty,\omega}$ کامل است هرگاه برای هر $\psi\in L_{\infty,\omega}$ ، $\phi\models\psi$ یا $\phi\models\neg\psi$.

تعریف ۱-۲-۵. فرض کنید A پارکی از $L_{\omega_1,\omega}$ باشد. اگر M یک τ-ساختار و $a_1,....,a_n\in M$ ، آنگاه A-تایپ $\overline{a}$ را چنین تعریف می کنیم:

$$tp^M(\overline{a},A)=\{\phi(\overline{v})\in A:M\models\phi(\overline{a})\}$$

همچنین $S_n(A,\phi)$ را مجموعه همه A-تایپ ها از n-تایی هایی که در مدلی از T تصدیق می شوند، تعریف می کنیم.

تعریف ۱-۲-۶. می گوییم φ پراکنده است اگر $S_n(A,\varphi)$ برای همه پارک های شمارای A ، شمارا باشد.

لم ۱-۲-۷. ([۱۶]) فرض کنید A پارکی شمارا و $S_n(A,\phi)$ ناشمارا باشد. آنگاه $|S_n(A,\phi)| = 2^{\aleph_0}$.

تعریف ۱-۲-۸. رتبه چنداگر هر $L_{\infty,\omega}$-فرمول را با $qr(\phi)$ نشان می دهیم و بصورت زیر تعریف می کنیم:

- اگر ϕ اتمی باشد آنگاه $qr(\phi) = 0$
- $qr(\phi) = qr(\neg\phi)$
- $qr(\bigwedge_{\phi\in X}\phi) = qr(\bigvee_{\phi\in X}\phi) = sup_{\phi\in X}qr(\phi)$
- $qr(\exists v\phi) = qr(\forall v\phi) = qr(\phi) + 1$

قضیه ۱-۲-۹. (یکریختی اسکات) [۱۶] فرض کنیم M یک τ-ساختار باشد. آنگاه جمله $\varphi^M \in L_{\infty,\omega}$ به نام جمله اسکات M، وجود دارد به قسمی که برای هر τ-ساختار N

$$N \equiv_{\infty,\omega} M \Longleftrightarrow N \models \varphi^M$$

در واقع اگر M و N شمارا باشند آنگاه $\varphi \in L_{\omega_1,\omega}$ و اگر $N \models \varphi^M$ ، آنگاه $N \cong M$.

۱-۳ توپولوژی و فضای بئر

فرض کنید X یک مجموعه شماراست و 2^X مجموعه همه توابع از X در $\{0,1\}$ است. اگر $X \subset Y$ تعریف می کنیم: $\pi_{YX} : 2^Y \longrightarrow 2^X$ که با فرض $g \in 2^Y$ و تحدید دامنه به X داریم: $\pi_{YX}(g) = g\restriction_X$

یک زیرمجموعه $U \subset 2^X$ را مجموعه پایه می گوییم، اگر یک X_0 متناهی و $f_0 \in 2^{X_0}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$U = \{f : \pi_{XX_0}(f) = f_0\}.$$

کلاس زیرمجموعه های بورل از 2^X کوچکترین گردایه از مجموعه های شامل مجموعه های پایه است که تحت مکمل گیری، اجتماع شمارا و اشتراک شمارا بسته باشد.

تعریف ۱-۳-۱. یک مجموعه $A \subset 2^X$ تحلیلی است اگر یک $X \subset Y$ شمارا و نیز یک مجموعه بورل $B \subset 2^Y$ وجود داشته باشند به طوری که $\pi_{YX}(B) = A$

قضیه ۱-۳-۲. ([۱۹]) یک مجموعه ناشمارای تحلیلی، توانی برابر با $2^{\aleph_0}$ دارد.

۱-۴ درخت ها

تعریف ۱-۴-۱. یک درخت عبارتست از یک مجموعه مرتب $(T, \leq)$ که دارای کوچکترین عضو است و برای هر $x \in T$ مجموعه $\{y \in T \in | \ y < x\}$ با $\leq$ خوش ترتیب است. اعضای T را گره می نامند. اگر $x, y \in T$ و $y < x$ گوییم y یک مقدم x و x یک تالی y است. ریشه کوچکترین عضو یکتای T است.

طبق گزاره ۱-۱-۶ مجموعه خوش ترتیب $\{y \in T \mid y < x\}$ متشکل از همه مقدم های x با یک عدد اردینالی یکتایی مانند $h(x)$ موسوم به بلندی x یکریخت است. مجموعه $T_\alpha = \{x \mid h(x) = \alpha\}$ در واقع α امین تراز T است. اگر $h\,(x)$ اردینال تالی باشد x را گره تالی و در غیر اینصورت آن را گره حدی می نامند.

کوچکترین α را که برای آن $T_\alpha = \varnothing$ بلندی درخت T یا $h(T)$ می نامند.

تعریف ۱-۴-۲. یک شاخه در T عبارتست از یک زنجیر (یعنی زیرمجموعه مرتب خطی) بیشینه در T. طول شاخه b را با $l(b)$ نشان می دهند که این عدد همیشه اردینالی کوچکتر یا مساوی با بلندی T است. شاخه ای را که طول آن با بلندی درخت مربوطه برابر باشد هم پایان می نامند.

۱-۵ فروپاشی مستوسکی

تعریف ۱-۵-۱. در نظریه مجموعه ها یک مدل را ترایایی گوییم اگر بفرم $(M, \in)$ باشد که M مجموعه ای ترایایی است.

مدل های ترایایی، در واقع بازتاب ویژگی های اساسی از جهان مجموعه ها هستند.

تعریف ۱-۵-۲. مدل (P, E)

۱. خوش بنیان است اگر رابطه E خوش بنیان باشد.

۲. گسترشی است اگر $\forall x, y \in P, x \neq y \Rightarrow \{z \in P \mid zEx\} \neq \{z \in P \mid zEy\}$

قضیه ۱-۵-۳. ([۲۲]) برای هر (تعداد) از بنداشت های ZFC نظیر $\phi_۱, \phi_۲, ..., \phi_n$ یک مدل ترایایی شمارای M وجود دارد که $M \models \phi_۱, \phi_۲, ..., \phi_n$.

قضیه ۱-۵-۴. (فروپاشی مستوسکی) [۱۱] a. اگر E خوش بنیان و یک رابطه گسترشی روی یک کلاس P باشد، آنگاه یک کلاس ترایایی M و یک یکریختی π بین (P, E) و $(M, \in)$ وجود دارد. کلاس ترایایی M و یکریختی π یکتا هستند.

b. در واقع، هر کلاس گسترشی P یکریخت با یک کلاس ترایایی M است که این کلاس و یکریختی هر دو یکتا هستند.

c. در حالت (b) اگر $T \subseteq P$ ترایایی باشد، آنگاه $\forall x \in T, \pi(x) = x$.

۱-۶ فورسینگ

برای مطالعه برهان قضایا و لم های این بخش، می توانید به [۱۱] رجوع کنید.

تعریف ۱-۶-۱. یک مجموعه پاره ای مرتب عبارت است از زوج $(\mathbb{P}, \leq)$ که $\leq$ رابطه ای دوتایی روی $\mathbb{P}$ است به طوری که $\leq$:

۱. بازتابی است؛ $\forall p \in \mathbb{P}, p \leq p$

۲. ترایایی است؛ $\forall p, q, r \in \mathbb{P}, p \leq q \wedge q \leq r \Longrightarrow p \leq r$

۳. پادمتقارن است؛ $\forall p, q \in \mathbb{P}, p \leq q \wedge q \leq p \Longrightarrow p = q$

۴. عضو ماکسیمال $۱_{\mathbb{P}}$ دارد؛ $\forall p \in \mathbb{P}, p \leq ۱_{\mathbb{P}}$

اعضای این مجموعه را اغلب **شرط** می نامیم. همچنین اگر $p \leq q$ می گوییم p توسیعی از q است.

تعریف ۱-۶-۲. فرض کنید $\mathbb{P}$ یک مجموعه پاره ای مرتب باشد و $p, q \in \mathbb{P}$.

۱. می گوییم p و q قابل مقایسه هستند اگر $p \leq q$ یا $q \leq p$.

۲. می گوییم p و q سازگار هستند اگر $r \in \mathbb{P}$ وجود داشته باشد که $r \leq p, q$.

تعریف ۱-۶-۳. فرض کنید $\mathbb{P}$ یک پاره ای مرتب باشد. در این صورت $A \subseteq \mathbb{P}$ را پادزنجیر می گوییم اگر هر دو عضو از A ناسازگار باشند.

تعریف ۱-۶-۴. فرض کنید $\mathbb{P}$ یک مجموعه پاره ای مرتب باشد. می گوییم $\mathbb{P}$ شرط زنجیری شمارا یا ccc دارد اگر هر پادزنجیر $\mathbb{P}$ شمارا باشد.

تعریف ۱-۶-۵. فرض کنید $\mathbb{P}$ یک مجموعه پاره ای مرتب باشد. زیرمجموعه $D \subseteq \mathbb{P}$ چگال است اگر برای هر $p \in \mathbb{P}$ بتوانیم $q \in D$ پیدا کنیم به طوری که $q \leq p$.

تعریف ۱-۶-۶. فرض کنید $\mathbb{P}$ یک مجموعه پاره ای مرتب باشد. زیرمجموعه $D \subseteq \mathbb{P}$ باز است اگر برای هر $p \in D$ و برای هر $q \leq p$ داشته باشیم $q \in D$.

تعریف ۱-۶-۷. زیرمجموعه ناتهی $G \subseteq \mathbb{P}$ یک فیلتر است اگر:

۱. برای هر $p \in G$ و $p \leq q$ آنگاه $q \in G$ و

۲. برای هر $p, q \in G$ یک $r \in G$ وجود داشته باشد که $r \leq p, q$.

اگر D گردایه ای از زیرمجموعه های چگال $\mathbb{P}$ باشد، می گوییم فیلتر G یک فیلتر D-ژنریک است اگر برای هر $A \in D$ ، داشته باشیم $A \cap G \neq \emptyset$.

فرض کنیم M مدلی ترایایی از ZFC باشد (مدل پایه) . در M یک مجموعه پاره ای مرتب ناتهی مثل $(\mathbb{P}, \leq)$ را در نظر می گیریم. در واقع آن را به عنوان نمادی برای نشان دادن فورسینگ بکار می بریم و اعضای $\mathbb{P}$ را شرط های فورسینگی می نامیم. می گوییم p قویتر از q است اگر $p \leq q$.

لم ۱-۶-۸. اگر $(\mathbb{P}, \leq)$ یک مجموعه پاره ای مرتب، و D گردایه ای شمارا از زیرمجموعه های چگال $\mathbb{P}$ باشد، آنگاه یک فیلتر D-ژنریک روی $\mathbb{P}$ وجود دارد. در واقع برای هر $p \in \mathbb{P}$ یک فیلتر D-ژنریک G روی $\mathbb{P}$ وجود دارد که $p \in G$.

قضیه ۱-۶-۹. (مدل ژنریک): فرض کنید M یک مدل ترایایی از ZFC و $(\mathbb{P}, \leq)$ نماد یک فورسینگ در M باشد. اگر $G \subset \mathbb{P}$ فیلتر ژنریکی روی $\mathbb{P}$ باشد، آنگاه یک مدل ترایایی $M[G]$ وجود دارد به طوری که:

i. $M[G] \models ZFC$

ii. $M \subset M[G]$ و $G \in M[G]$

iii. $Ord^{M[G]} = Ord^{M}$

iv. اگر N یک مدل ترایایی از ZF باشد به طوری که $M \subset N$ و $G \in N$ آنگاه $M[G] \subset N$.

*این مدل $M[G]$ یک توسیع ژنریک از M است. مجموعه های $M[G]$ قابل تعریف با G و تعدادی متناهی از اعضای M هستند. هر عضو $M[G]$ یک **نام** در M خواهد داشت که توضیح می دهد آن عضو چگونه ساخته شده است. در واقع یک نکته مهم فورسینگ این است که مدل ژنریک $M[G]$ می تواند در مدل پایه توصیف شود.*

در واقع $(\mathbb{P}, \leq)$ را می توانیم به عنوان نمادی برای زبان فورسینگ هم بکار بگیریم. این زبان فورسینگ و نیز $\Vdash$ رابطه فورسینگ هر دو در مدل پایه M قابل تعریف هستند. زبان فورسینگ شامل یک نام برای هر عضو $M[G]$ و نیز $\dot{G}$ ، نامی برای مجموعه ژنریک، می باشد.

رابطه فورسینگ، رابطه ای بین شرط ها و جملات زبان فورسینگ است: $p \Vdash \sigma$ که آن را p فرس می

کند σ را می خوانیم، و در M تعریف شده، در واقع ناشی از همان رابطه صدق و برآورده شدن است. به طور نمونه، اگر $p \Vdash \sigma$ و σ' یک نتیجه منطقی از σ باشد، آنگاه $p \Vdash \sigma'$.

و اکنون دومین قضیه اصلی روی مدل های ژنریک:

قضیه ۱-۶-۱۰. (قضیه فورسینگ): فرض کنید $(\mathbb{P}, \leq)$ نماد فورسینگی در مدل پایه M باشد. اگر σ جمله ای از زبان فورسینگ باشد، آنگاه برای هر $G \subset \mathbb{P}$ ژنریک روی M ،

$$M[G] \models \sigma \Longleftrightarrow (\exists p \in G) p \Vdash \sigma$$

و اما قضیه سوم فورسینگ شامل ویژگی های یک رابطه فورسینگ است:

قضیه ۱-۶-۱۱. (ویژگی های فورسینگ). فرض کنید $(\mathbb{P}, \leq)$ نماد فورسینگی در مدل پایه M باشد. همچنین $M^{\mathbb{P}}$ را کلاس همه نام ها (در M) در نظر بگیرید:

a. اگر $p \Vdash \varphi$ و $q \leq p$ آنگاه $q \Vdash \varphi$

b. هیچ p نمی تواند هر دوی φ و $\neg\varphi$ را فرس کند.

c. برای هر p یک $q \leq p$ وجود دارد که درباره φ تصمیم می گیرد، به این معنی که $q \Vdash \varphi$ یا $q \Vdash \neg\varphi$

d. $p \Vdash \neg\varphi$ اگر و تنها اگر هیچ $q \leq p$ نباشد که $q \Vdash \varphi$.

e. $p \Vdash \varphi \wedge \psi \Longleftrightarrow p \Vdash \varphi \wedge p \Vdash \psi$.

f. $p \Vdash \forall x \varphi \Longleftrightarrow p \Vdash \varphi(\dot{a}) \forall \dot{a} \in M^{\mathbb{P}}$.

g. $p \Vdash \varphi \vee \psi \Longleftrightarrow \forall q \leq p, \exists r \leq q (r \Vdash \varphi \vee r \Vdash \psi)$.

h. $p \Vdash \exists x \varphi \Longleftrightarrow \forall q \leq p, \exists r \leq q, \exists \dot{a} \in M^{\mathbb{P}}, r \Vdash \varphi(\dot{a})$.

i. $p \Vdash \exists x \varphi \Longrightarrow \exists \dot{a} \in M^{\mathbb{P}}, p \Vdash \varphi(\dot{a})$.

۱-۷ مثال هایی از فورسینگ

مثال ۱-۷-۱. (کوهن حقیقی). [۶] فرض کنید M یک مدل ترایایی شمارا از ZFC است و نیز

$$\mathbb{P} = \{p \in M \mid p : \omega \to ۲, |p| < \aleph_۰\}$$

و $\mathbb{P}$ را تحت

$$p \supseteq q \Longleftrightarrow p \leq q$$

مرتب می کنیم. فرض کنیم $G \subseteq \mathbb{P}$ یک فیلتر $\mathbb{P}$-ژنریک روی M باشد و قرار دهید:

$$F = \bigcup\{p \mid p \in G\}$$

ادعا ۱: F تابعی از ω به ۲ است.

برهان. از آنجا که G یک فیلتر است، F خوش تعریف است. به علاوه برای هر $n < \omega$ ، مجموعه

$$D_n = \{p \in \mathbb{P} \mid n \in dom(p)\}$$

در $\mathbb{P}$ چگال است. بنابراین $G \cap D_n \neq \emptyset$ که نتیجه می دهد $dom(F) = \omega$.

□

ادعا ۲: برای هر تابع ۲ $g : \omega \to$ که $g \in M$ داریم $g \neq F$.

برهان. فرض کنید $g \in M$ قرار دهید:

$$D_g = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists n \in dom(p), p(n) \neq g(n)\}$$

در این صورت $D_g \in M$ در $\mathbb{P}$ چگال است، پس $G \cap D_g \neq \emptyset$.

فرض کنید $p \in G \cap D_g$ و فرض کنید $n \in dom(p)$ چنان باشد که $p(n) \neq g(n)$. آنگاه

$$F(n) = p(n) \neq g(n)$$

پس $F \neq g$.

□

F را می توان به عنوان یک عدد حقیقی نیز در نظر گرفت. (با یکی گرفتن $\mathbb{R}$ و توابع از ω به ۲) که از آن به عنوان یک عدد حقیقی کوهن نام می بریم. معمولا $\mathbb{P}$ را با $Add(\omega, ۱)$ نشان می دهیم.

مثال ۱-۷-۲. (فروپاشی لوی). [۶]فرض کنید M یک مدل ترایایی شمارا از ZFC است. قرار دهید:

$$\mathbb{P} = \{p : \omega \to \omega_۱ \mid |p| < \aleph_۰\}$$

و $\mathbb{P}$ را با عکس شمول مرتب کنید. توجه شود که برای هر $n < \omega$ و $\alpha < \omega_۱$ مجموعه های

$$D_n = \{p \in \mathbb{P} \mid n \in dom(p)\}$$

$$E_\alpha = \{p \in \mathbb{P} \mid \alpha \in ran(p)\}$$

در $\mathbb{P}$ چگال هستند و بنابراین اگر G یک فیلتر $\mathbb{P}$-ژنریک روی M باشد و $F = \bigcup G$ آنگاه

$$F : \omega \to \omega_۱$$

یک تابع پوشاست. بنابراین

$$M[G] \models |\omega_۱^M| = \omega$$

به ویژه می توان نشان داد $\omega_۱^{M[G]} = \omega_۲^M$. معمولا $\mathbb{P}$ را با $Col(\aleph_۰, \aleph_۱)$ نشان می دهیم.

۱-۸ تعریف پذیری کاردینال ها

تعریف ۱-۸-۱. می گوییم یک جمله کامل φ (به طور هم ارز یک جمله اسکات) از $L_{\omega_۱,\omega}$ ، کاردینال نامتناهی κ را توصیف می کند، اگر φ مدلی از توان κ داشته باشد اما نه بزرگتر.

مالیتز با GCH نشان داد که کاردینال های قابل توصیف با $L_{\omega_۱,\omega}$-جملات کامل، دقیقا $\aleph_\alpha$ که $\alpha < \omega_۱$ ، می باشند. اما جولیا نایت نشان داد که بدون فرض CH هم $\aleph_۱$ توصیف پذیر است.

۱ - ۹ گذری تاریخی

مساله پیوستار. ([۲۳]) در حدود سال ۱۸۸۰ کانتور پرسش مهمی را که به مساله پیوستار مشهور شد، مطرح کرد: آیا کاردینالی بین $\aleph_0$ و $2^{\aleph_0}$ وجود دارد؟ به زبان مجموعه ها آیا هیچ زیرمجموعه نامتناهی ناشمارای R وجود دارد که کاردینال آن از کاردینال R کوچکتر باشد؟ کوشش کانتور و دیگران، در این زمینه به نتیجه نرسید چون در هیچ جای ریاضیات کلاسیک به چنین مجموعه ای برنخورده بودند و به نظر می رسید راهی برای پیدا کردن آن وجود ندارد. به گمان کانتور، پاسخ این مساله منفی بود.

فرضیه پیوستار: کاردینالی مانند κ که در $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$ صدق کند، وجود ندارد.

فرضیه پیوستار تعمیم یافته: کاردینال ترامتناهیκ هر چه باشد، کاردینالی همچون λ وجود ندارد که $\kappa < \lambda < 2^{\kappa}$

دیری نپایید که در سال ۱۹۰۰ ، در کنگره بین المللی ریاضیدانان در پاریس، ریاضیدان بزرگ آلمانی، دیوید هیلبرت (۱۹۴۳ - ۱۸۶۲) فهرستی از ۲۳ مساله ریاضی مهم و حل نشده را ارائه کرد که اولین آنها مساله پیوستار بود. هیچ پیشرفتی در حل این مساله حاصل نشد تا اینکه در سال ۱۹۳۸ کورت گودل (۱۹۷۸ - ۱۹۰۶) منطق دان برجسته قرن، ثابت کرد که اگر فرض پیوستار تعمیم یافته به اصول موضوع رایج نظریه مجموعه ها افزوده شود، آنگاه هر تناقضی که امکان داشته باشد به وسیله این دستگاه اصول موضوعی به دست آید، ممکن است به صورت تناقضی بیان شود که از اصول موضوع قبلی (بدون اینکه فرض پیوستار تعمیم یافته به آنها افزوده شده باشد) نتیجه شود. به عبارت دیگر فرض پیوستار تعمیم یافته نسبت به اصول موضوع نظریه مجموعه ها سازگار است.

سرانجام در ۱۹۶۳ ، ریاضیدان جوان پل کوهن (۱۹۳۴ -) از دانشگاه استانفورد، کشف مهمی کرد. او نشان داد که فرض پیوستار به وسیله اصول موضوع متعارف نظریه مجموعه ها اثبات شدنی نیست. بنابراین، وضع فرضیه پیوستار در نظریه مجموعه ها، همانند اصل موضوع توازی اقلیدس (اصل پنجم) در هندسه است. می توانیم بپذیریم یا رد کنیم، و در هر حالت یک تئوری سازگار ریاضی به دست آوریم.

فصل ۲

ساختار فرایسه و انگاره مطلق وات

۲-۱ انگاره وات چیست؟

فرض کنید T یک تئوری کامل در زبانی شمارا با مدلهای نامتناهی باشد. برای هر کاردینال نامتناهی κ تعداد مدلهای نایکریخت T از کاردینال κ را با $I(T,\kappa)$ نشان می دهیم. وات دو پرسش طبیعی مطرح کرد: نخست آنکه آیا می توان گفت $I(T,\kappa) = ۲$ ؟ و دیگر آن که آیا نابرابری $\aleph_۰ < I(T,\kappa) < ۲^{\aleph_۰}$ درست است؟ وات به پرسش نخست پاسخ منفی داد. همچنین اگر فرضیه پیوستار درست باشد، پرسش دوم هم بطور بدیهی پاسخ منفی دارد. حدس وات این بود که حتی با فرض نادرستی فرضیه پیوستار هم پرسش دوم پاسخ منفی دارد.

طبیعی است که بخواهیم این انگاره را از منطق مرتبه اول به مدل هایی از $L_{\omega_۱,\omega}$-جملات گسترش دهیم. در اینصورت انگاره وات برای $L_{\omega_۱,\omega}$ ، می گوید که برای هر جمله $\phi \in L_{\omega_۱,\omega}$ تعداد مدل های شمارای نایکریخت آن یا حداکثر $\aleph_۰$ است یا دقیقا $۲^{\aleph_۰}$.

در واقع پیشرفت در انگاره وات، هنوز هم می تواند یکی از قوی ترین نتایج بدست آمده در مدل تئوری باشد. تلاش های فراوانی هم در این زمینه صورت گرفته است از جمله اینکه:

شلاه برای تئوریهای ω-پایدار ، بوکلر برای تئوریهای ابرپایدار از U-رتبه متناهی، مایر برای تئوریهای ت-کمینه و نیز استیل برای تئوریهایی از درخت ها توانسته اند آن را اثبات کنند. اما بهترین نتیجه در این مبحث مربوط به قضیه مورلی است:

قضیه ۲-۱-۱. (مورلی). [۱۹] فرض کنید ϕ یک $L_{\omega_۱,\omega}$-جمله باشد. آنگاه تعداد مدل های نایکریخت شمارای ϕ یا حداکثر $\aleph_۱$ است یا دقیقا $۲^{\aleph_۰}$.

در این پژوهش سه مسیر اشتباه برای حل انگاره وات، مطرح شده و نیز یک استراتژی که عنوان می کند هیچ جمله ای از $L_{\omega_۱,\omega}$ نیست که دقیقا $\aleph_۱$ مدل شمارا داشته باشد.

انگاره ۲-۱-۲. (وات). اگر φ جمله ای از $L_{\omega_۱,\omega}$ باشد، یا تعدادی شمارا و یا به تعداد پیوستار، مدل شمارا در حد یکریختی دارد.

تعریف ۲-۱-۳. جمله φ از $L_{\omega_1,\omega}$ را پراکنده می گوییم اگر شامل یک مجموعه کامل از مدل های شمارا نباشد.

تعریف معادل هم برای جمله پراکنده چنین است: برای هر پارک F از $L_{\omega_1,\omega}$ تنها تعدادی شمارا از F- تایپها در مدلی از φ تصدیق می شوند.

حدس وات مطلق. *اگر φ پراکنده باشد، آنگاه φ فقط تعدادی شمارا مدل شمارا دارد.*

همچون منطق مرتبه اول، یک τ- جمله φ از $L_{\omega_1,\omega}$ کامل است اگر برای هر τ- جمله ψ از $L_{\omega_1,\omega}$ یا $\varphi \models \psi$ یا $\varphi \models \neg\psi$.

هر جمله کامل $\aleph_0$- جازم است. بدیهی است که پادگواهه حدس وات کامل نیست. در این پژوهش به جزئیات بیشتری از جملات کامل θ از $L_{\omega_1,\omega}$ با شاخص $\aleph_1$ (داشتن مدلهایی در $\aleph_1$ اما نه بیشتر) خواهیم پرداخت.

([۲]) معلوم شده است که مطالعه جملات کامل φ در $L_{\omega_1,\omega}$ را می توان به مطالعه مدل های اتمی یک تئوری مرتبه اول T_φ تبدیل کرد.

تعریف ۲-۱-۴. M یک مدل اتمی گسترش پذیر در κ از T_φ است اگر $|M| = \kappa$ و یک توسیع مقدماتی سره از M که یک مدل اتمی از T_φ است وجود داشته باشد. بطور معادل می گوییم M ماکسیمال نیست.

M گسترش پذیر بدون پارامتر کاردینال، یعنی اینکه M در $|M|$ گسترش پذیر است.

در این پژوهش برهان دیگری برای وجود مدل های از رتبه اسکات دلخواه کمتر از $\aleph_2$ برای هر پادگواهه انگاره وات، ارائه می گردد که در واقع مشابه بحث هرینگتون، این برهان اطلاعاتی درباره پیچیدگی مدل ها به دست می دهد اما هیچ چیز درباره رابطه نشانندگی نمی گوید. بنابراین سه شاه ماهی قرمز شناخته شده (سه مسیر نادرست برای حل انگاره وات) داریم: نخست متدولوژی و دوتای دیگر عبارتند از دو رهنمون نادرست بسوی برهان!

۱. یورت یک برهان توصیفی نظریه مجموعه ای ارائه می کند که اگر پادگواهه ای برای حدس وات

وجود دارد، آنگاه پادگواهه ای هم با مدلی در $\aleph_2$ وجود دارد؛ ما برهانی مدل تئوریکی ارائه می کنیم.

۲. برهان یورت درباره وجود یک مدل در $\aleph_2$ است؛ نشان می دهیم که درباره رابطه ی نشاندن روی مدل هایی در $\aleph_1$ است.

۳. قضیه هرینگتون که حاکی از آن است که مدل هایی در $\aleph_1$ با رتبه اسکات بیکران در $\aleph_2$ وجود دارند، گامی است بسوی یافتن مدلی در $\aleph_2$ ؛ نشان می دهیم همه آنها ماکسیمال هستند پس قضیه هرینگتون هیچ گونه رهنمونی درباره نشاندن های اساسی بدست نمی دهد.

۲-۲ ساختار فرایسه

در این بخش از نظریه مجموعه های توصیفی پرهیز کرده و رفتاری مدل تئوریکی را برای یافتن مدل هایی با واشناخت ناپذیرهای مطلق ارائه می کنیم.

کاردینال ω تنها کاردینال نامتناهی است که حدی از کاردینال های متناهی است. این نکته برای ما روشن می کند که به دو دلیل ساختارهای شمارا را بهتر می توان ساخت. نخست آنکه یک ساختار شمارا می تواند به عنوان اجتماعی از یک زنجیر از قطعات متناهی ساخته شود و دیگر اینکه بی نهایت بار فرصت داریم تا مطمئن شویم که تکه های مناسب زنجیر در جایشان قرار گرفته اند.

هیچ کاردینال دیگری اجازه این همه کنترل را به ما نمی دهد. پس نباید غافلگیر شوید اگر بگوییم که مدل تئوری از لحاظ متدهای مختلف برای ساختن ساختارهای شمارا بسیار توانگر است. و بی گمان، یکی از بهترین این متدها، ساختار فرایسه است.

یورت در مثالی خاص، دو توسیع از متد ساختار فرایسه را بکار برد. ما روی نقش یکی از آنها با دو تکنیک متمرکز می شویم: نخست بهره برداری از نقش خاصیت ادغام مجزا در پیدا کردن مدل های اتمی و دیگر، در نظر گرفتن ساختار فرایسه برای تفسیر و گسترش مدلی داده شده.

نمادگذاری ۲-۲-۱. در این پژوهش $\prec_K$ را همواره به معنای زیرساخت فرض می کنیم.

تعریف ۲-۲-۲. فرض کنید K گردایه ای شمارا از ساختارهای متناهی باشد که تحت یکریختی بسته

اند. برای $A, B \in K$ تعریف می کنیم $A \prec_K B$ اگر $A \subset B$.

تعریف ۲-۲-۳. K در موارد زیر صدق می کند:

۱. نشاندن مشترک: اگر برای هر $B_1, B_2 \in K$ ، $C \in K$ وجود داشته باشد بطوری که $B_1 \prec_K C$ و $B_2 \prec_K C$

۲. ادغام: اگر برای هر $A \in K$ و برای $B_1, B_2 \in K$ که $A \prec_K B_1$ و $A \prec_K B_2$ ، $C \in K$ وجود دارد که $B_1 \prec_K C$ و $B_2 \prec_K C$.

۳. ادغام مجزا: اگر برای $A \prec_K B_1, B_2 \in K$ که $B_1 \cap B_2 = A$ نشاندن هایی از B_1 و B_2 درون یک $B_3 \in K$ با تحدید مشترک به A وجود داشته باشد که اشتراک برد نگاشت ها به روی تصویر A نگاشته شود.

اگر یکریختی بین B و B' وجود داشته باشد که روی A همانی باشد، آنگاه می نویسیم $B \cong_A B'$.

تعریف ۲-۲-۴. ۱. مدل M بطور متناهی K-همگن یا توانگر است اگر برای هر $A, B \in K$ ، $A \prec_K M$ ، $A \prec_K B \in K$ نتیجه دهد که $B' \prec_K M$ وجود دارد بطوری که $B \cong_A B'$.

۲. مدل M ژنریک است اگر M توانگر و اجتماعی افزایشی از زیرساخت های بسته متناهی باشد.

یورت ساختارهای ژنریک را **پر** می نامد.

قضیه ۲-۲-۵. هر K در تعریف ۲-۲-۲ که $\aleph_0$ عضو دارد و در ادغام و نشاندن مشترک صدق می کند، یک τ-ساختار ژنریک شمارای یکتا تولید می کند. بنابراین یک ساختار ژنریک شمارای M ، همگن است به این مفهوم که یکریختی های بین ساختارهای متناهی در K به اتومورفیسم هایی از M گسترش می یابند.

برهان. ما فقط برهانی از وجود τ-ساختار ژنریک را بیان می کنیم و برای جزئیات بیشتر به [۱۰] رجوع کنید.

فرض کنید $\mathbb{P}$ مجموعه ای از همه دنباله های متناهی $p = \langle A_0, A_1, ..., A_{n-1} \rangle$ باشد به طوری که:

۱. $A_\circ, A_۱, ..., A_{n-۱} \in K$

۲. $\forall i < n - ۱, A_i \prec_K A_{i+۱}$

حالا فرض کنید $p = \langle A_\circ, A_۱, ..., A_{n-۱}\rangle$ و $q = \langle B_\circ, B_۱, ..., B_{m-۱}\rangle$ در مجموعه $\mathbb{P}$، باشند. گوییم $q \leq p$ اگر و تنها اگر

۱. $m \geq n$

۲. $\forall i < n, B_i = A_i$

پس q توسیع p است اگر و تنها اگر q توسیع پایانی p باشد.

برای هر $A \in K$ مجموعه زیر را در نظر بگیرید:

$$D_A = \{p = \langle A_\circ, A_۱, ..., A_{n-۱}\rangle \in \mathbb{P} : A \prec_K A_{n-۱}\}$$

ادعا ۱: هر $D_A \subseteq \mathbb{P}$ در $\mathbb{P}$ چگال است.

برهان ادعای ۱: فرض کنید $p = \langle A_\circ, A_۱, ..., A_{n-۱}\rangle \in \mathbb{P}$ در $\mathbb{P}$ دلخواه باشد. بنابر ویژگی ادغام، $A_n \in K$ وجود دارد به طوری که $A \prec_K A_n$ و $A_{n-۱} \prec_k A_n$ قرار دهید: $p' = \langle A_\circ, A_۱, ..., A_{n-۱}, A_n\rangle$ در این صورت $p' \leq p$ و $p' \in D_A$ پس نتیجه مطلوب حاصل شد.

توجه کنید که $\{D_A : A \in K\}$ شماراست پس $G \subseteq \mathbb{P}$ وجود دارد که یک فیلتر است و

$$\forall A \in K, G \cap D_K \neq \emptyset$$

فرض کنید

$$M = \bigcup\{A : \exists p = \langle A_\circ, A_۱, ..., A_{n-۱}\rangle \in G, \exists i < n; A = A_i\}$$

آنگاه M مدل موردنظر می باشد. $\square$

جمله اسکات ژنریک را با φ_K نشان می دهیم.

تعریف ۲-۲-۶. یک مجموعه نامتناهی I را یک واشناخت ناپذیر مطلق در M گوییم اگر هر جایگشت از I به یک خودریختی از M گسترش یابد.

نمادگذاری ۲-۲-۷. برای هر نمادگان τ ، $\hat{\tau}$ نمادگانی است که از افزودن محمول یکانی Q بر τ بدست آمده است.

لم ۲-۲-۸. فرض کنید K یک τ-کلاس باشد که در فرضیات قضیه ۲-۲-۵ و نیز ادغام مجزا صدق می کند. آنگاه مدل ژنریک، گسترش پذیر است.

برهان. یک محمول یکانی Q را به τ می افزاییم تا $\hat{\tau}$ بدست آید. مجموعه $\hat{K}$ را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$\hat{K} = \{A \mid \text{یک } \hat{\tau}\text{-ساختار متناهی است } A, Q \subseteq A, A\restriction_\tau \in K\}$$

دقت کنید که در مجموعه بالا، A متناهی است. چون K ادغام مجزا دارد پس $\hat{K}$ هم این چنین است. (فرض مجزایی برای رسیدن به هر گونه ادغام در زبان گسترش یافته بسیار اساسی و مهم است و در واقع ادغام مجزا در زبان گسترش یافته را نتیجه می دهد). تعریف $\hat{K}$ نتیجه می دهد که در واقع $A \in K$ می تواند به مدلی در $\hat{K}$ با جانشانی همه اعضا در Q گسترش یابد. بطور مشابه هر توسیع از یک عضو از K می تواند به $\hat{K}$ ، با جایگذاری هر عضو جدید در Q گسترش یابد. بنابراین اگر $\mathbb{M}$ یک $\hat{\tau}$-مدل ژنریک باشد، یک τ-مدل ژنریک N هم مشمول در $Q(\mathbb{M})$ وجود دارد که هر دو یکریختند. □

نتیجه ای از لم ۲-۲-۸ را می توان با یک روش مدل تئوریکی استاندارد نیز به دست آورد. ابتدا $\mathbb{M}$ را بصورت اجتماعی از یک زنجیر افزایشی $\langle A_i : i < \omega\rangle$ می نویسیم به طوری که A_i ها اعضای متناهی از K هستند. آنگاه یک توسیع دیگر B_1 از A_0 را انتخاب می کنیم و به طور استقرایی B_{i+1} را به صورت ادغام مجزا از A_i و B_i روی A_{i-1} می سازیم.

نمادگذاری ۲-۲-۹. نمادگان τ را ثابت بگیرید. τ_1 با افزودن محمول های یکانی جدید U, V و نماد رابطه دوتایی P به τ به دست می آید. جمله θ_0 می گوید U و V جهان را افراز می کنند و P یک نگاشت

تصویر (پروژکشن) از V به روی U است. اگر M یک τ_1-ساختاری باشد که در θ_0 صدق می کند، می گوییم آن یک (κ, λ)-مدل است اگر $|V(M)| = \kappa$ و $|U(M)| = \lambda$.

قضیه ۲-۲-۱۰. فرض کنیم K یک τ-کلاس باشد که در فرضیات قضیه ۲-۲-۵ و نیز ادغام مجزا صدق می کند.

۱. یک τ_1-ساختار ژنریک شمارای $\mathbb{M} \models \theta_0$ وجود دارد بطوری که P یک تابع تصویر p از $V(\mathbb{M})$ بروی $U(\mathbb{M})$ تعریف می کند و $U(\mathbb{M})$ مجموعه ای است از واشناخت ناپذیرهای مطلق در $\mathbb{M}$، و نیز $\tau \restriction V(\mathbb{M})$ با ساختار ژنریک برای K یکریخت است.

۲. یک توسیع مقدماتی سره $\mathbb{M}_1$ از $\mathbb{M}$ وجود دارد که $U(\mathbb{M}) = U(\mathbb{M}_1)$.

۳. یک توسیع مقدماتی سره $\mathbb{M}_1$ از $\mathbb{M}$ وجود دارد که $U(\mathbb{M}) \subsetneq U(\mathbb{M}_1)$.

برهان. ۱. به محمول های U و V برای افراز جهان نیاز داریم. رابطه های τ را به گونه ای تحدید می کنیم که فقط در V برقرارند. K_1 را به عنوان مجموعه ای از τ_1-ساختارهای متناهی (V_0, U_0, P_0) در نظر می گیریم که $V_0 \restriction \tau \in K$ و P_0 گراف یک تابع پاره ای از V_0 در U_0 باشد. برای ادغام کردن، از ادغام مجزا در ترتیب V بهره می گیریم:

پروژکشن را با اجتماع گرفتن از پروژکشن ها گسترش می دهیم. اگر ادغام مجزا شامل نقاط جدیدی باشد، آنها را بطور دلخواه به U تصویر می کنیم. فرض کنید $\mathbb{M}$ مدل ژنریک برای K_1 باشد. برای نشان دادن اینکه $U(\mathbb{M})$ مجموعه ای از واشناخت ناپذیرهای مطلق است، فرض می کنیم σ جایگشتی از $U(\mathbb{M})$ باشد. فرض کنید $\mathbb{F}$ مجموعه ای از یکریختی های پاره ای متناهی f بین زیرساخت های (A, A') از $\mathbb{M}$ باشد که در K_1 هستند و نیز $f \restriction_{U(A)} = \sigma \restriction_{U(A)}$. حالا نشان می دهیم $\mathbb{F}$ یک سیستم رفت و برگشت است.

$f \in \mathbb{F}$ با دامنه و برد زوج (A, A') داده شده، فرض کنید $\mathbb{M} \prec_{K_1} B \prec_{K_1} A$ برای $B \in K_1$ متناهی.

قرار دهید $B_0 = U(B) - U(A)$ و $B'_0 = \sigma(B_0)$.

می بینیم که $AB_\circ \in K_1$.

حالا برای $g \in \mathbb{F}$ ای داریم $AB_\circ \prec_{K_1} B$ و نیز $AB_\circ \cong A'B'_\circ$ طبق ژنریک بودن یک $B^* \in K_1$ ای وجود دارد که $A'B'_\circ \prec_{K_1} B^* \prec_{K_1} \mathbb{M}$ و با فرض توسیع g_1 از g داریم $B^* \cong B$ این بخش رفت سیستم را کامل می کند؛ و بخش برگشت هم بطور مشابه اثبات می شود. اجتماع سیستم رفت و برگشت اتومورفیسمی از $\mathbb{M}$ است که σ را گسترش می دهد.

۲. با بکارگیری تغییری اندک در لم ۲-۲-۸ فرض می کنیم کلاس $\hat{K}_1$ با توسیع τ_1 از $\hat{\tau}_1$ و افزودن Q بدست می آید. می خواهیم $U(A) \subset Q(A)$ برای هر $\hat{\tau}_1$ ساختار $A \in \hat{K}_1$.

۳. با استفاده از لم ۲-۲-۸ فرض می کنیم کلاس $\hat{K}_1$ با توسیع τ_1 به $\hat{\tau}_1$ و افزودن Q به دست می آید. $\square$

۲-۳ کاربرد جملات پذیرا در انگاره وات

در این بخش، با بکارگیری روش های توسعه یافته ی بخش پیش، وجود جملات پذیرا با شاخص $\aleph_1$ را بررسی می کنیم تا نشان دهیم اگر پادگواهه ای برای انگاره وات وجود داشته باشد، آنگاه پادگواهه ای وجود دارد که $\aleph_1$ را توصیف می کند. نمادگان τ_1 را با U, V, P همچون نمادگذاری **۲-۲-۹** *همراه با مدل های $\theta_\circ$ در نظر می گیریم. جمله ψ را در نمادگان τ' فرض می کنیم و نیز قرار می دهیم: $\tau_2 = \tau_1 \cup \tau'$.*

تعریف ۲-۳-۱. فرض کنید θ یک τ_1-جمله کامل از $L_{\omega_1,\omega}$ و $U(x)$ یک محمول بطوری که $\theta \Rightarrow \theta_\circ$ و مطابق با نمادگذاری ۲-۲-۹ باشد. همچنین فرض کنید ψ یک τ'-جمله دلخواه (و شاید ناکامل) از $L_{\omega_1,\omega}$ است.

- ادغام $\chi_{\theta,U,\psi}$ از زوج (θ, U) ترکیبی عطفی از θ و ψ^U است که ψ^U رابطه ای نسبی از ψ به مجموعه تعریف شده با U است. بنابراین $\chi_{\theta,U,\psi}$ یک τ_2-جمله است زیرا $\chi_{\theta,U,\psi} = \theta \wedge \psi^U$.

- اگر U یک مجموعه واشناخت ناپذیر مطلق نامتناهی در مدل شمارایی از θ تعریف کند، می گوییم زوج

(θ, U) پذیراست. θ را پذیرا گوییم اگر U ای وجود داشته باشد که (θ, U) پذیرا باشد و در این صورت مدل شمارای θ را هم مدل پذیرا گوییم.

تعداد مدل های یک $L_{\omega_1, \omega}$ - جمله χ در کاردینال λ را با $I(\chi, \lambda)$ نشان می دهیم.

قضیه ۲-۳-۲. فرض کنیم (θ, U) پذیرا باشد و ψ یک جمله از $L_{\omega_1, \omega}$ باشد.

۱. ادغام $\chi_{\theta, U, \psi}$ جمله کامل است اگر و تنها اگر ψ کامل باشد.

۲. یک تابع حافظ یکریختی یک به یک بین تایپ های یکریخت از مدل های شمارای ψ و تایپ های یکریخت از مدل های شمارای ادغام $\chi_{\theta, U, \psi}$ وجود دارد.

۳. برای هر کاردینال λ ، $I(\chi_{\theta, U, \psi}, \lambda) = max(I(\theta, \lambda), I(\psi, \lambda))$.

برهان. از قضیه یکریختی اسکات می دانیم که یک $L_{\omega_1, \omega}$ - جمله θ کامل است اگر و تنها اگر تنها یک مدل شمارا داشته باشد. حالا فرض کنیم ψ کامل است. نشان می دهیم $\chi_{\theta, U, \psi}$ کامل است. فرض می کنیم M و N مدل های شمارای $\chi_{\theta, U, \psi}$ باشد. چون ψ کامل است پس $U(M) \cong U(N)$ اما طبق واشناخت ناپذیری مطلق U ، یکریختی بالا به یکریختی $M \cong N$ گسترش می یابد. بنابراین هر دو مدل از $\chi_{\theta, U, \psi}$ یکریختند.

برعکس، فرض کنید $\chi_{\theta, U, \psi}$ کامل است و N_1 و N_2 هم مدل های شمارای ψ هستند. چون θ کامل است، یک مدل شمارای یکتای M دارد. پس (M, N_1) و (M, N_2) مدل های شمارای $\chi_{\theta, U, \psi}$ هستند. بنابراین $(M, N_1) \cong (M, N_2)$ و در نتیجه داریم: $N_1 \cong N_2$. قسمت ۲ و ۳ به طور مشابه اثبات می شوند. □

نتیجه ۲-۳-۳. فرض کنید θ یک جمله کامل باشد به طوری که هر مدل از کاردینال $\aleph_1$ ماکسیمال است و نیز فرض کنید (θ, U) پذیرا باشد. اگر ψ یک پادگواهه انگاره وات باشد، آنگاه $\chi_{\theta, U, \psi}$ هم این چنین است و افزون بر این، فقط مدل های ماکسیمال در $\aleph_1$ دارد و بنابراین $\aleph_1$ را توصیف می کند.

برهان. فرض کنید ψ پادگواهه انگاره وات است.پس دقیقا $\aleph_1$ تا مدل شمارا دارد. بنابراین $\chi_{\theta,U,\psi}$ هم دقیقا $\aleph_1$ تا مدل شمارا دارد. (طبق قضیه ۲-۳-۲)

توجه کنید که چون θ کامل است، $I(\theta,\aleph_0)=1$

حالا می خواهیم نشان دهیم هر مدل از $\chi_{\theta,U,\psi}$ از سایز $\aleph_1$ ماکسیمال است، فرض کنید چنین نباشد، پس مدل هایی همچون M_1 و M_2 از سایز $\aleph_1$ برای $\chi_{\theta,U,\psi}$ وجود دارند که M_2 یک توسیع مقدماتی سره از M_1 است. چون $M_1 \restriction \tau_1, M_2 \restriction \tau_1 \models \theta$ و θ فقط مدل های ماکسیمال در $\aleph_1$ دارد، پس $M_1 \restriction \tau_1 = M_2 \restriction \tau_1$ که نتیجه می دهد $M_1 = M_2$. $\square$

تعریف ۲-۳-۴. می گوییم S_∞ گروه توپولوژیکی H را بخش می کند اگر هومومورفیسم پیوسته ای از یک زیرگروه بسته ی H به روی S_∞ وجود داشته باشد.

مطابق لم ۲-۲-۱۰ بازگو می کنیم که $\mathbb{M}$ نشان دهنده ساختار ژنریک متناظر با (V,U) با تابع تصویر P از V بروی U می باشد.

نتیجه ۲-۳-۵. ۱. برای هر ساختار N ، اگر X یک مجموعه از واشناخت ناپذیرهای مطلق در N باشد، آنگاه S_∞ ، $aut(N)$ را بخش می کند.

۲. فرض کنید $\mathbb{M}$ ساختاری ساخته شده بسان قضیه ۲-۲-۱۰ باشد و $\hat{\mathbb{M}}$ کاهش یافته $\mathbb{M}$ به $M(\mathbb{M})$ (و بنابراین یک τ-ساختار) باشد. آنگاه $aut(\mathbb{M})$ به روی S_∞ تصویر می شود و بعلاوه S_∞ ، $aut(\hat{\mathbb{M}})$ را بخش می کند.

برهان. ۱. هر جایگشت X و بنابراین S_∞ به عضوی از $aut(N)$ طبق تعریف واشناخت ناپذیری مطلق و تحدید نگاشت های $aut(N)$ به S_∞ ، گسترش می یابد.

۲. قرار دهید $A_1 = aut(M \restriction V(\mathbb{M}))$ که زیرگروهی بسته از $aut(\hat{\mathbb{M}})$ است و A_1 بروی S_∞ با نگاشتی تصویر می شود که $\hat{\alpha} \in \hat{\mathbb{M}}$ را به $\alpha \restriction U(\mathbb{M})$ برای هر $\alpha \in aut(\mathbb{M})$ می برد بطوری که

$$\alpha \restriction U(M) = \hat{\alpha}.$$

(انتخاب α مهم نیست چون $\hat{\alpha}$ رابطه هم ارزی ناشی از پروژکشن P را تحدید می کند.) $\square$

نکته ۲-۳-۶. اگر پادگواهه ای برای انگاره وات همچون σ وجود داشته باشد و ϕ_κ جمله کاملی باشد که κ را توصیف می کند، آنگاه پادگواهه ای از انگاره وات هم وجود دارد که κ را توصیف کند. فقط باید اجتماعی مجزا از یک مدل از ϕ_κ و مدلی از جمله $\chi_{\theta,\phi,\sigma}$ بگیریم که (θ, ϕ) پذیرا باشد و θ ، $\aleph_1$ را توصیف کند.

فصل ۳

$\aleph_1$ یا $\aleph_2$

۳-۱ f - مستقل ها

کارهای یورت و دیگران براساس وجود واشناخت ناپذیرهای مطلق، نتیجه می دهد که:

اگر S_∞ برای یک τ- ساختار N ، $aut(N)$ را بخش کند، آنگاه می توان N را به یک τ_2- ساختار پذیرا گسترش داد.

نمادگذاری ۳-۱-۱. برای نشان دادن گردایه همه زیرمجموعه های X که کاردینال کمتر از κ دارند، نماد $P_\kappa(X)$ را به کار می بریم.

تعریف ۳-۱-۲. فرض کنید $f : P_\omega(X) \mapsto P(X)$. می گوییم $A \in P_\omega(X)$ یک f- مستقل است اگر برای هر $A' \subseteq A$ و $a \in A'$ نتیجه شود $a \notin f(A' - \{a\})$

لم ۳-۱-۳. برای هر $k \in \omega$ و برای هر اردینال α ، اگر $|X| = \aleph_{\alpha+k}$ و $f : P_\omega(X) \to P_{\aleph_\alpha}(X)$ ، آنگاه X شامل یک مجموعه f- مستقل از سایز $k+1$ است.

برهان. با استقرا روی k ثابت می کنیم. برای $k = 0$ و $|X| = \aleph_\alpha$ هر عضو $X \backslash f(\emptyset)$ را که در نظر بگیرید کفایت می کند. فرض کنید برای k نتیجه برقرار است، و مجموعه x_n را در نظر بگیرید با $|X_1| = \aleph_{\alpha+k+1}$ و نیز با فرض $f : P_\omega(X_1) \to P_{\aleph_\alpha}(X)$. هر مجموعه Y_0 را از X_1 با اندازه $\aleph_{\alpha+k}$ انتخاب کنید و تحت f بسته کنید (با ω بار تکرار) ، یک مجموعه Y بدست می آید که $|Y| = \aleph_{\alpha+k}$. $a \in X_1 \backslash Y$ را ثابت نگه دارید. g را روی $P_\omega(Y)$ چنین تعریف کنید: برای $A \in P_\omega(Y)$ ،

$$g(A) = f(\{a\} \cup A) \cap Y$$

طبق فرض استقرا، یک مجموعه g- مستقل $B \subset Y$ از سایز $k+1$ وجود دارد و بنابراین $B \cup \{a\}$ یک مجموعه f- مستقل از سایز $k+2$ است. (توجه کنید که $f(a) = g(\emptyset)$ که شامل هیچ عضوی از مجموعه f- مستقل B نیست). □

برهان لم در واقع نشان می دهد که اگر ما بدانیم که برای یک مجموعه X که $|X| = \aleph_{\alpha+k}$ و $f : P_\omega(X) \to P_{\aleph_\alpha}(X)$ و X شامل مجموعه f- مستقلی از سایز $k+2$ نباشد، آنگاه هیچ $Y \subsetneq X$ ای که $|Y| = |X|$ باشد، تحت f بسته نیست. در واقع با این فرضیات، اگر X یک مدل از یک $L_{\omega_1,\omega}$- جمله و هر زیرمدل X تحت f بسته باشد، آنگاه X نمی تواند هیچ زیرمدل سره ای با کاردینال برابر با کاردینال خود داشته باشد.

۳-۲ مثال یورت

تعریف ۳-۲-۱. یک $L_{\omega_1,\omega}$- جمله کامل ϕ بطور همگن $\aleph_1$ را توصیف می کند اگر ϕ ، $\aleph_1$ را توصیف کند و مدل شمارای ϕ شامل مجموعه ای نامتناهی از واشناخت ناپذیرهای مطلق باشد.

فرض کنیم $\tau_0 = \{S_i, R_i : i \in \omega\}$ که S_i نماد رابطه ی دوتایی و R_i نماد رابطه ی $i+2$- تایی است. کلاس K را شامل τ- ساختارهای متناهی با ویژگی های زیر در نظرمی گیریم:

i. $\forall a, b \bigvee_{i\in\omega} S_i(a,b)$

ii. $\forall a, b \bigwedge_{i\neq j}(S_i(a,b) \to \neg S_j(a,b))$

iii. $\forall i<j<k\ \forall a_0, a_1, b_0, ..., b_{k-1} [R_k(a_0, a_1, b_0, ..., b_{k-1}) \to (a_0 \neq a_1 \wedge b_i \neq b_j)]$

iv. $\forall a_0, a_1, b_0, ..., b_{k-1} \left[R_k(a_0, a_1, b_0, ..., b_{k-1}) \leftrightarrow R_k(a_0, a_1, b_{\sigma(0)}, ..., b_{\sigma(k-1)})\right]$ *برای هر k و σ و جایگشتی از* $0, 1, ..., k-1$

v. $\forall i, k, \forall j<k\ \forall a_0, a_1, b_0, ..., b_{k-1} [R_k(a_0, a_1, b_0, ..., b_{k-1}) \to (S_i(a_0, b_j) \leftrightarrow s_i(a_1, b_j))]$

vi. $\forall K \forall a_0, a_1, b_0, ..., b_{k-1}, c[(R_k(a_0, a_1, b_0, ..., b_{k-1}) \wedge \bigwedge_{i<k} c \neq b_i) \to \bigwedge_{i\in\omega}(s_i(a_0, c) \to \neg s_i(a_1, c))]$

vii. $\forall a_0, a_1 \left[a_0 \neq a_1 \to \bigvee_{k\in\omega} \exists b_0, ..., b_{k-1} R_k(a_0, a_1, b_0, ..., b_{k-1})\right]$.

می خواهیم برای هر مدل M تابعی مثل $f : M^2 \mapsto \omega$ داشته باشیم که:

۱. *برای هر زوج a_0, a_1 ، $M \models S_{f(a_0,a_1)}(a_0, a_1)$ و*

۲. $M \models R_k(a_0, a_1, b_0, ..., b_{k-1})$ دقیقا اگر $b_0, ..., b_{k-1}$ مجموعه نقاطی باشد که

$$\forall j < k, f(a_0, b_j) = f(a_1, b_j)$$

روشن است که K هر دو ویژگی ادغام مجزا و نشاندن مشترک را دارد و بنابراین بنابر قضیه ۲-۲-۵، یک مدل ژنریک دارد.

به بیان ساده تر در اینجا ساختارهای درون K را به عنوان گرافهای کاملی در نظر می گیریم که یالهای (a, b) را با رنگ یکتای i رنگ آمیزی می کنیم و این رنگ یکتای میان a, b همان رابطه دوتایی $S_i(a, b)$ را تشکیل می دهد. برای هر a_0 و a_1 یک مجموعه ماکسیمال $\{b_0, b_1, ..., b_{k-1}\}$ وجود دارد به طوری که هریال (a_0, b_i) رنگ یکسانی با یال (a_1, b_i) برای $i = 0, ..., K - 1$ دارد و رابطه $k + 2$ جایی $R_k(a_0, a_1, b_0, b_1, ..., b_{k-1})$ شکل می گیرد.

یورت با استفاده از ساختار فرایسه دو جمله کامل $\phi_{H'}$ و ϕ_H را ساخت که هردو $\aleph_1$ را توصیف می کنند اما فقط ϕ_H بطور همگن توصیف می کند. فرض کنید H' مدل ژنریک جمله اسکات $\phi_{H'}$ باشد. روشن است که H' نمی تواند شامل یک مجموعه از واشناخت ناپذیرها باشد. چون یک چنین مجموعه ای باید دارای گراف کامل برای S_n باشد اما آنگاه موضعا متناهی بودن، طبق R_k ما را به تناقض می رساند.

پس ناگزیریم ϕ_H را بسازیم. با افزودن پروژکشن P و محمول های M و N ، ساختار قضیه ۲-۲-۱۰ را بکار می گیریم. چون K برای H' ویژگی ادغام مجزا دارد، قضیه ۲-۲-۱۰ یک مدل ژنریک پذیرا همچون H با جمله اسکات ϕ_H را بدست می دهد. ϕ_H بطور همگن $\aleph_1$ را توصیف می کند و برهان نتیجه ۲-۳-۶ نشان می دهد که S_∞ ، $Aut(H')$ را بخش می کند همچنان که $Aut(H)$ را بخش می کند.

درک این نکته که کلاسی از مدل های ϕ_H در ویژگی ادغام در $\aleph_0$ صدق نمی کند، ساده است. a_i که $(i < \omega)$ را در مدل M ثابت بگیرید. توجه کنید که تایپ های سازگار روی M از اعضای c, c' وجود دارند به طوری که برای تعداد نامتناهی از n_i های متمایز داریم: $S_{n_i}(a_i, c), S_{n_i}(a_i, c')$ را ، اما برای یک $d \in M$ به $m \neq m'$ تایپ جدید $S_m(d, c)$ و $S_{m'}(d, c')$ نیاز داریم. این نتیجه می دهد که بستار جبری c

و c' ، اگر آنها متمایز باشند، نامتناهی است. ولی در یک مدل مشترک، نادرست است چون بستار هر زوج از اعضای متمایز متناهی است. پس هر ادغامی باید روی c و c' همانی باشد که شرط دوم در همانی سازی رد می شود.

قضیه ۳-۲-۲. هیچ مدل ناشمارایی از مثال یورت، گسترش پذیر نیست.

برهان. فرض کنید چنین نباشد. پس زوجی از مدل های ϕ_H در $\aleph_1$ مثل M_1, M_2 وجود دارند که M_1 زیرمدلی از M_2 است. با ثابت نگه داشتن هر c که $c \in M_2 - M_1$ ، برای هر $n \in \omega$ ، حداکثر یک $a \in M_1$ وجود دارد که $f(a,c) = n$. اما آنگاه M_1 باید شمارا باشد. □

تعریف ۳-۲-۳. تئوری مرتبه اول T را ثابت در نظر بگیرید. سه گانه (M, a, N) را یک سه گانه ماکسیمال گوییم اگر، $M \prec N$ مدل های اتمی T باشند و $a \in N \backslash M$ و برای هر زوج از مدل های اتمی $M' \prec N'$ که $M \prec M'$ ، $N \prec N'$ اگر $M \neq M'$ آنگاه $a \in M'$.

تعریف ۳-۲-۴. می گوییم $M \prec N$ یک زوج برشی در λ است اگر $\lambda = |N| = |M|$ مدل های اتمی باشند و مدل های اتمی N_i برای $i < \omega$ وجود داشته باشد به طوری که $M \prec_K N_{i+1} \prec N_i \prec N$ و نیز N_{i+1} یک زیرمدل مقدماتی سره از N_i باشد و $\bigcap N_i = M$.

لم ۳-۲-۵. ([۲]) فرض کنید کلاس مدل های اتمی T ، λ-جازم است. اگر T یک زوج برشی در کاردینال λ باشد و یک سه گانه ماکسیمال هم در λ داشته باشد، آنگاه $I(\lambda^+, \kappa) = ۲^{\lambda^+}$.

قضیه ۳-۲-۶. ([۲]) اگر جمله کامل ϕ از $L_{\omega_1,\omega}$ مدل های ناشمارا دارد اما هیچ مدل ناشمارایی از ϕ گسترش پذیر نیست، آنگاه ϕ ، $۲^{\aleph_1}$ مدل در $\aleph_1$ دارد.

پرسش ۳-۲-۷. آیا مدل $\mathbb{M}'$ در $\aleph_1$ وجود دارد که $N(\mathbb{M}')$ واشناخت ناپذیر مطلق در $\mathbb{M}'$ باشد؟

فصل ۴

برهانی دیگر برای قضیه هرینگتون

۴-۱ رتبه اسکات ناشمارا

تعریف ۴-۱-۱. فرض کنید M یک L-ساخت و $\bar{a},\bar{b}$ ، n-تایی هایی در M باشند. با استقرا روی اردینال α ، α-هم ارزی $\bar{a}$ و $\bar{b}$ را که با $\bar{a}\equiv_\alpha \bar{b}$ نشان می دهیم بصورت زیر تعریف می کنیم:

- $\bar{a}\equiv_۰ \bar{b}$ اگر $\bar{a}$ و $\bar{b}$ در L-فرمول های بی چنداگر یکسانی صدق کنند.

- برای α حدی، $\bar{a}\equiv_\alpha \bar{b}$ اگر $\bar{a}\equiv_\beta \bar{b}$ برای هر $\beta<\alpha$

- $\bar{a}\equiv_{\alpha+۱} \bar{b}$ اگر

- برای هر $c\in M$ ، $d\in M$ وجود داشته باشد که $\bar{a}c\equiv_\alpha \bar{b}d$ و

- برای هر $d\in M$ ، $c\in M$ وجود داشته باشد که $\bar{a}c\equiv_\alpha \bar{b}d$.

رتبه اسکات M کمترین α ای است که α-هم ارزی، $\alpha+۱$-هم ارزی را برای همه چندگانه های در M نتیجه دهد.

توجه کنید که رابطه های $\equiv_\alpha$ نتیجه ای از روابط هم ارزی هستند و رتبه اسکات ساختار M اردینالی از سایز حداکثر کاردینال M است.

با استفاده از برهان استاندارد قضیه یکریختی اسکات، می توانیم $\Theta^{(M,\bar{b},\alpha)}(\bar{x})$ را برای هر $\bar{b}\in M$ در زبان $L_{|\alpha|^+,\omega}$ تعریف کنیم که برای $\bar{a}\in M$ درست است اگر $\bar{a}\equiv_\alpha \bar{b}$.

در حالت خاص فرض کنید که $\bar{b}$ تهی است و بنابراین $\Theta^{(M,\emptyset,\alpha)}$ یک جمله است. این جمله در حد ترتیب ترکیبات عطفی یکتاست. در واقع، یک رتبه چنداگر خوش تعریف دارد. L-ساخت N درآن صدق می کند اگر و تنها اگر بتوانیم سیستم رفت و برگشت از طول α بین M و N برقرار کنیم. یک استقرای ساده نشان می دهد که این هم ارزی M و N برای $L_{\infty,\omega}$-جملات از رتبه چنداگر حداکثر α هم برقرار است و در این صورت می گوییم M و N ، α-هم ارزند و می نویسیم $M\equiv_\alpha N$.

تعریف ۴-۱-۲. فرض کنید M یک L-ساخت شمارا از رتبه اسکات α باشد. جمله اسکات کانونی σ_M از M یک $L_{\omega_۱,\omega}$-جمله بفرم زیر است:

$$\sigma_M = \Theta^{(M,\emptyset,\alpha)} \wedge \bigwedge_{\overline{a}\in M^{<\omega}} \forall \overline{x}(\phi^{M,\overline{a},\alpha}(\overline{x}) \rightarrow \phi^{M,\overline{a},\alpha+۱}(\overline{x}))$$

اکنون برای درک بهتر قضیه ۴-۱-۵ و برهان آن، دو قضیه زیر را بیان می کنیم:

قضیه ۴-۱-۳. ([۷]) فرض کنیم $\mathbb{P}$ مفهوم فورسینگ کوهن برای اضافه کردن یک عدد کوهنی حقیقی باشد و G یک $\mathbb{P}$-ژنریک روی M باشد، که M مدل ترایایی شمارا از ZFC است. آنگاه یک درخت $T \subseteq ۲^{<\omega}$ وجود دارد به قسمی که برای هر شاخه b از T ، فیلتر ژنریک $G_b \in M[G]$ وجود دارد که هر تعداد متناهی از آنها ژنریک توامان است. (فیلترهای $G_۱, G_۲, ...G_n \subseteq \mathbb{P}$ را ژنریک توامان گوییم هرگاه $G_۱ \times ... \times G_n$ یک $\mathbb{P} \times ... \times \mathbb{P}$ -ژنریک باشد).

قضیه ۴-۱-۴. (سیلور) هر رابطه هم ارزی بورل، روی یک فضای بورل استاندارد یا شمارا تا و یا به تعداد مجموعه ای کامل، کلاس هم ارزی دارد.

قضیه ۴-۱-۵. موارد زیر هم ارزند:

a. φ پراکنده است.

b. برای هر α شمارا، تنها تعدادی شمارا کلاس α-هم ارزی از مدل های φ وجود دارد.

c. برای هر α شمارا، تنها تعدادی شمارا مدل از φ با رتبه اسکات کمتر از α وجود دارد.

برهان. بنابر قضیه سیلور، برای هر α ، رابطه α-هم ارزی (که برای α شمارا بورل است) یا تعدادی شمارا و یا مجموعه ای کامل از کلاس های هم ارزی را دارد. در حالتی که مجموعه ای کامل از مدل های نایکریخت شمارا از T داشته باشیم، (a) طبق تعریف (b) را نتیجه خواهد داد و نیز (b) نیز (c) را نتیجه می دهد زیرا مدل هایی با رتبه اسکات کمتر از α یکریختند اگر و تنها اگر α-هم ارز باشند.

حالا فرض کنید (c) برقرار است و مجموعه کاملی از مدل های φ وجود دارد که با درخت شکافنده کامل τ داده شده است. فرض کنید A یک مدل ترایایی شمارا از ZFC^- ، (ZFC بدون بنداشت توان) باشد که شامل کدهایی برای φ و τ است. در این صورت می توانیم، زیردرخت شکافنده τ^* از τ را طوری در نظر بگیریم که هر شاخه در τ^* ژنریک کوهن روی A باشد. اما هر شاخه x از τ^* مدلی از φ را کد می

کند که جمله اسکات آن متعلق به $M[x]$ است و بنابراین رتبه اسکاتی کمتر از $Ord(M[x]) = Ord(M)$ دارد که با (c) تناقض دارد. $\square$

از آنجا که تنها ω_1 رتبه اسکات ممکن وجود دارد، قسمت c قضیه قبل نتیجه می دهد که یک تئوری پراکنده حداکثر ω_1 مدل شمارا دارد.

یادآوری می کنیم که: یک پارک شمارای F از $L_{\omega_1,\omega}$ مجموعه ای از فرمول ها در $L_{\omega_1,\omega}$ است که شامل همه فرمول های مرتبه اول بوده و تحت زیرفرمول ها، ترکیبات بولی متناهی، چنداگرها و تغییر متغیرهای آزاد بسته است. البته هر مجموعه شمارا از فرمول ها در $L_{\omega_1,\omega}$ مشمول در یک کوچکترین پارک شماراست.

یک F-تایپ مجموعه ای به صورت $p(x) = \{\psi(x) \mid \psi(x) \in F, M \models \psi(m)\}$ برای مدل M و چندتایی m از M است. در اینصورت می گوییم $p(x)$ در M تصدیق می شود.

لم ۴-۱-۶. فرض کنید φ پراکنده باشد. آنگاه برای هر پارک شمارای F شامل φ فقط تعدادی شمارا F-تایپ وجود دارد که در مدل های φ تصدیق می شود.

برهان. توجه کنید که اگر $p(x)$ یک F-تایپ باشد، آنگاه رتبه چنداگر جمله ای که می گوید $p(x)$ تصدیق می شود، حداکثر برابر است با سوپریمم فرمول های در F بعلاوه یک.

فرض کنید α کران رتبه های این جملات باشد. آنگاه مدل های α-هم ارز F-تایپ های یکسانی را تصدیق می کنند و بنابراین، طبق قضیه ۴-۱-۵ (b) چون φ پراکنده است تنها تعدادی شمارا F-تایپ در مدل های φ تصدیق می شوند. $\square$

۴-۲ درخت مورلی

فرض کنید $\varphi \in L_{\omega_1,\omega}$ پراکنده و دارای ناشمارا تا مدل شماراست. به عبارت دیگر مدل هایی از رتبه اسکات به دلخواه بزرگ شمارا دارد. یک سری از پارک های شمارای

$$F_0 \subset F_1 \subset .... \subset F_\alpha \subset .....$$

برای $\alpha < \omega_1$ می سازیم که $\varphi \in F_0$ و $F_{\alpha+1}$ با افزودن فرمول های $\bigwedge_{\psi \in P} \psi(\overline{v})$ برای هر F_α- تایپ P بدست می آید. همچنین برای هر اردینال حدی α ، قرار می دهیم: $F_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta$

حالا درختی از تئوریهای τ را می سازیم. برای $\alpha < \omega_1$ ، فرض می کنیم τ_α اعضایی از τ از بلندی α باشد. یک F_α- تئوری T در τ_α است اگر و تنها اگر

i. $\varphi \in T$

ii. تئوری T برآورده شدنی باشد؛

iii. تئوری T ، F_α- کامل باشد، به عبارت دیگر برای هر $\psi \in F_\alpha$ یا $\psi \in T$ یا $\neg\psi \in T$.

iv. برای همه $\beta < \alpha$ ، $T \cap F_\beta$ کامل نباشد، یعنی $\aleph_0$- جازم نباشد.

بنابراین گره های پایانی هر شاخه از درخت، همان تئوری های $\aleph_0$- جازم هستند. $\tau_{<\alpha}$ را با $\bigcup_{\beta<\alpha} \tau_\beta$ نشان داده و قرار می دهیم: $\tau = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \tau_\alpha$

توجه کنید که چون φ پراکنده است هر $T \in \tau_\alpha$ ، F_α- اتمی است.

در توضیح ساده تر درخت مورلی، می توانیم بگوییم که برای هر F_0- تایپ $p(x)$ که در مدلی از φ تصدیق شود، فرض می کنیم F_1 کوچکترین پارک شامل F_0 و همه فرمول های $\bigwedge_{\psi(x)\in p(x)} \psi(x)$ باشد. چون فقط تعدادی شمارا F_0- تایپ در مدل های φ تصدیق می شود، F_1 هم پارکی شماراست.

حالا برای هر T در τ_0، گسترش های T را در τ_1 یعنی مرتبه یکم درخت τ به این صورت تعریف می کنیم:

اگر T ، $\aleph_0$- جازم باشد، یعنی همه مدل های شمارای آن یکریخت باشند، آنگاه T یک گره پایانی است و هیچ توسیعی در τ_1 ندارد. در غیر اینصورت توسیع های T در τ_1 ، F_1- تئوری های کامل شامل T هستند. باز هم بنابر پراکندگی، فقط تعدادی شمارا از چنین F_1- تئوری هایی داریم.

برای هر اردینال $\alpha < \omega_1$ ، F_α و τ_α ها بدین صورت ساخته می شوند.

اگر δ اردینالی حدی باشد، F_δ را اجتماعی از پارک های $F_\alpha, \alpha < \delta$ می گیریم و فرض می کنیم τ_δ که همان δ-امین مرتبه درخت τ است، برابر با اجتماع هایی در طول همه مسیرهای هم پایان با $\tau_{<\delta}$ باشد.

لم ۴-۲-۱. فرض کنید $M \models \varphi$ شمارا از رتبه اسکات β باشد. آنگاه جمله ای در پارک $F_{\beta+3}$ وجود دارد که هم ارز با جمله اسکات کانونی M است.

برهان. $\bar{a} \in M$ را ثابت بگیرید و برای هر α فرض کنید $\Psi^{M,\bar{a},\alpha}(\bar{x})$ ترکیب عطفی همه F_α-فرمول های درست از $\bar{a}$ در M باشد. طبق تعریف $\Psi^{M,\bar{a},\alpha}(\bar{x})$ متعلق به $F_{\alpha+1}$ است. با استقرا روی α نشان می دهیم که $\Psi^{M,\bar{a},\alpha}(\bar{x}) \models \Theta^{M,\bar{a},\alpha}(\bar{x})$ (بطور مشابه برای همه مدل های شمارای M). برای $\alpha = 0$ و α حدی، بی درنگ از تعریف نتیجه می شود.

حالا فرض کنید می دانیم که $\Psi^{M,\bar{a},\alpha}(\bar{x}) \models \Theta^{M,\bar{a},\alpha}(\bar{x})$ فرض کنید N مدلی شمارا و $\bar{b} \in N$ در $\Psi^{M,\bar{a},\alpha+1}(\bar{x})$ صدق کند.

می خواهیم درستی $N \models \Theta^{M,\bar{a},\alpha+1}(\bar{b})$ را نشان دهیم. طبق تعریف،

$$\Theta^{M,\bar{a},\alpha+1}(\bar{x}) \equiv \forall y \bigvee_{c\in M} \Theta^{M,\bar{a}c,\alpha}(\bar{x},y) \wedge \bigwedge_{c\in M} \exists y \Theta^{M,\bar{a}c,\alpha}(\bar{x},y)$$

و بنابر استقرا، کافی است نشان دهیم با جایگزینی Ψ بجای Θ در هر دو ترکیب عطفی، $\bar{b}$ در آن صدق می کند.

برای دیدن اینکه $N \models \forall y \bigvee_{c\in M} \Psi^{M,\bar{a}c,\alpha}(\bar{b},y)$ ، فرض می کنیم $d \in N$ (برای y) و یک $c \in M$ متناظر با آن پیدا می کنیم که گزاره درست باشد. اگر $p_\alpha(\bar{x},y)$ یک F_α-تایپ از $(\bar{b},d)$ در N باشد، فرمول $\psi(\bar{x}) \equiv \exists y p_\alpha(\bar{x},y)$ متعلق به $F_{\alpha+1}$-تایپ از $\bar{b}$ در N است و بنابراین همچنین متعلق به $F_{\alpha+1}$-تایپ از $\bar{a}$ در M است (چون فرض کرده ایم $N \models \Psi^{M,\bar{a},\alpha+1}(\bar{b})$ است). هر گواه $c \in M$ برای y در $\psi(\bar{a})$ چنین است که $N \models \Psi^{M,\bar{a}c,\alpha}(\bar{b},d)$.

ترکیب عطفی دوم هم برهانی مشابه دارد و استقرا پایان می یابد.

دوباره می گوییم که اگر α کمترین رتبه اسکات M باشد، فرمول $\Theta^{M,\bar{a},\alpha}(\bar{x})$ هم ارزی رفت و برگشت

با $(M,\overline{a})$ دارد و بنابراین $L_{\infty,\omega}$- تایپ کامل از $\overline{a}$ در M را ایزوله می کند. بنابراین برای کمترین α بزرگ، فرمول های $\Theta^{M,\overline{a},\alpha}(\overline{x})$ و $\Psi^{M,\overline{a},\alpha}(\overline{x})$ در واقع هم ارزند. بنابراین جایگزینی Ψ بجای Θ جمله ای هم ارز با جمله اسکات کانونی M را نتیجه می دهد. با توجه به تعریف جمله اسکات کانونی، می توانیم هم ارز آن را در $F_{\beta+3}$ پیدا کنیم که β رتبه اسکات M است. $\square$

توجه کنید که کران $\beta + 3$ که β رتبه اسکات M است، بهینه نیست برای مثال هر مدل شمارا از تئوری مرتبه اول یک تابع تالی (با بکارگیری یک رابطه دوتایی) رتبه اسکات ω دارد اما پیش از آن، در F_1- تئوری هایش $\aleph_0$- جازم است.

گزاره ۴-۲-۲. a. برای هر $\delta < \omega_1$ حدی، هر گره T از τ_δ یک F_δ- تئوری کامل برآورده شدنی است.

b. هر تئوری واقع در درخت مورلی یک تئوری اتمی است، به عبارت دیگر اگر T در پارک F واقع شود، آنگاه هر F- فرمولی که T- سازگار است از یک فرمولی که T- کامل است، نتیجه می شود. به طور هم ارز، T دارای مدلی است که فقط تایپ های اصلی از تئوری T را تصدیق می کند.

c. فرض کنید T در مرتبه α از درخت مورلی واقع شده و α اردینالی حدی است. آنگاه هر مدل از T رتبه اسکات دست کم α دارد.

d. هر مدل شمارای M از φ یکتا مدل از یک تئوری T واقع در یک گره پایانی (نوک شاخه) از درخت مورلی φ است.

e. φ یک پادگواهه از انگاره وات (انگاره وات مطلق) است اگر و تنها اگر τ بلندی ناشمارا داشته باشد.

برهان. a. یک مدل از T را می توان به صورت اجتماعی از زنجیر $\langle M_{\alpha_i} | i < \omega \rangle$ ساخت که $\langle \alpha_i | i < \omega \rangle$ هم پایان در δ باشد و M_{α_i} مدل اول از $T \restriction_{F_{\alpha_i}}$ باشد و نیز هریک از M_{α_i} ها بطور F_{α_i}- مقدماتی در $M_{\alpha_{i+1}}$، به ازای هر $i < \omega$ بنشینند.

b. این ساده است چون T فقط شمارا تا تایپ دارد. اگر یک فرمول T-سازگار از یک فرمول

T-کامل نتیجه نشود، آنگاه می توانیم یک درخت کامل از تایپ های متمایز T بسازیم.

c. فرض کنید M یک مدل شمارای T باشد که رتبه اسکات $\alpha < \beta$ دارد. بنابر لم ۴-۲-۱، این تئوری از M در پارک $F_{\beta+3}$ ، $\aleph_0$-جازم است. پس هیچ توسیعی از M نمی تواند در مرتبه $\beta + 4$ وجود داشته باشد و بنابراین بطور حتم در مرتبه α هم نیست که این با فرض بودن T در مرتبه α تناقض دارد.

d. یک مدل شمارای M و $\alpha < \omega$ داده شده، فرض کنید $Th_\alpha(M)$ ، F_α-تئوری کامل از M باشد. با افزایش α ، $Th_\alpha(M)$ ، مسیری در درخت مورلی شکل می دهد که بنابر (c) در مرتبه ای شمارا پایان می یابد. یعنی گره ای پایانی در مرتبه ای چون α که $Th_\alpha(M)$ را $\aleph_0$-جازم می سازد.

e. از آنجا که همه مرتبه های درخت مورلی شمارا هستند، حکم از (d) بی درنگ نتیجه می شود. □

نکته ۴-۲-۳. در برهان قسمت (a) بطور اساسی از ویژگی شمارایی δ استفاده می کنیم. اگر اجتماع تئوری ها در امتداد یک مسیر ناشمارا را در نظر بگیریم، نمی توانیم برآورده شدن را بنابر بحث بالا، ضمانت کنیم. چون باید از شمارا تا مرحله δ حدی بگذریم که نمی توانیم مطمئن باشیم اجتماع در مرتبه δ یک مدل اول است.

۴-۳ درخت مورلی ژنریک و گسترش یافته

آیا امکان دارد ساختار درخت مورلی را فراتر از ω_1 گسترش دهیم؟

تعریف ۴-۳-۱. (درخت مورلی ژنریک). جهان V را با شمارا ساختن ω_1 از V ، از طریق فروپاشی استاندارد لوی، به یک توسیع فورسینگی $V^* = V[G]$ بزرگ می کنیم. اکنون چون پراکندگی اوست (مطلق) است، می توانیم τ^* را برای φ در V^* بسازیم.

این درخت بلندی $\omega_1^{V^*}$ دارد که برابر با ω_2 از V است. این درخت را درخت ژنریک مورلی می نامیم.

قضیه ۴-۳-۳ نشان می دهد که درخت ژنریک مورلی کاملا مستقل از انتخاب ژنریک G بکار رفته در تعریف V^* است. نکته اساسی این است که τ^* در واقع متعلق به V است. می خواهیم در V یک دنباله

از $L_{\omega_2,\omega}$- پارک های $\tilde{F_\alpha}$ از سایز حداکثر $\aleph_1$ و نیز یک درخت $\tilde{\tau}$ از بلندی $\aleph_2$ از تئوری های این پارک ها بسازیم و بعد نشان دهیم که این درخت منطبق با τ^* است.

تعریف ۴-۳-۲. (درخت مورلی گسترش یافته): فرض کنید $\mathbb{P}$ مجموعه ای از همه توابع پاره ای متناهی $f : \omega \to \omega_1$ و نیز مرتب شده با عکس شمول باشد. با استقرا روی $\alpha < \omega_2$ پارک های $\tilde{F_\alpha} \subset L_{\omega_2,\omega}$ و نیز گردایه های $\tilde{\tau_\alpha}$ از $\tilde{F_\alpha}$- تئوری ها را بصورت زیر تعریف می کنیم:

- فرض کنید $\tilde{F_0} = F_0$ پارک شمارای شامل φ برابر با پارک بکار رفته در مرتبه صفر درخت مورلی استاندارد باشد.

- برای $\tilde{F_\alpha}$ داده شده فرض کنید $\tilde{\tau_\alpha}$ گردایه ای از همه مجموعه های $A \subset \tilde{F_\alpha}$ باشد به طوری که:

  - $\varphi \in A$
  - $p \in \mathbb{P}$ وجود دارد که

  A یک $\tilde{F_\alpha}$- تئوری کامل و برآورده شدنی است و برای $\beta < \alpha$، $A \restriction_{\tilde{F_\beta}}$ ، $\aleph_0$ -جازم نیست $p \Vdash$

- برای $\tilde{\tau_\alpha}$ داده شده، $\tilde{F}_{\alpha+1}$ را بصورت کوچکترین $L_{\omega_1,\omega}$- پارک شامل $\tilde{F_\alpha}$ و نیز همه فرمول های بفرم $\bigwedge t$ تعریف می کنیم به طوری که $p \in \mathbb{P}$ وجود داشته باشد که:

  t یک $\tilde{F_\alpha}$- تایپ کامل (روی مجموعه تهی) است که در مدلی از φ تصدیق می شود$p \Vdash$

- اگر α اردینال حدی باشد، قرار می دهیم:

$$\tilde{F_\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} \tilde{F_\beta}$$

و سرانجام داریم:

$$\tilde{\tau} = \bigcup_{\alpha<\omega_2} \tilde{\tau_\alpha}$$

و آن را درخت مورلی گسترش یافته می نامیم.

یادآوری می کنیم که درخت مورلی ژنریک τ^* همانند درخت مورلی استاندارد در یک توسیع ژنریک

V^* از جهان V تعریف می شود که با فرسینگ $\mathbb{P}$ بدست می آید. برای نشان دادن α-امین پارک درخت مورلی استاندارد از دیدگاه V^* می نویسیم F^*_α.

قضیه ۴-۳-۳. $\tilde{\tau}$ برابر است با درخت مورلی ژنریک τ^* . در واقع، τ^* عضوی از V است. بعلاوه، $\tilde{\tau}$ شامل τ (درخت مورلی استاندارد در V) به عنوان یک قطعه آغازی است.

برهان. نخست نشان می دهیم که اگر F^*_α درون V باشد، آنگاه هر $T \in \tau^*$ هم در مرتبه α چنین است.

فرض کنید که چنین نباشد و $T \in \tau^*$ یک پادگواهه است و $\dot{T}$ هم یک نام برای آن در V . در واقع هیچ عضو $\mathbb{P}$ دقیقا مشخص نمی کند که چه فرمول هایی متعلق به $\dot{T}$ هستند و کدامیک نیستند که این به ما اجازه می دهد درخت کاملی از شرط های فرسینگ بسازیم بطوری که مسیرهای متفاوت تعبیری متفاوت از $\dot{T}$ است. فرض کنیم B یک زیرمدل شمارای مقدماتی از مدل ترایایی $A \models ZFC^-$ باشد به طوری که B شامل $\mathbb{P}$ ، φ ، $\dot{T}$ و F^*_α به عنوان اعضاست. درخت را درون $\overline{B}$ که مجموعه حاصل از فروپاشی موستوسکی B است، می سازیم. بدین صورت که $\overline{\mathbb{P}}$ را تصویر $\mathbb{P}$ تحت فروپاشی و مسیرهای کامل f را مشمول در فیلتر $G_f \in V$ که $\overline{\mathbb{P}}$-ژنریک روی $\overline{B}$ است، در نظر می گیریم. چون B نتیجه می دهد که $\dot{T}$ با برآورده شدنی بودن فرس شده، (به دلیل تعلق داشتنش به τ^*) پس $\overline{\dot{T}}$ (تصویر $\dot{T}$ تحت فروپاشی) هم به برآورده شدنی بودن فرس شده و می توانیم مدل M_f از T_f را پیدا کنیم که تعبیری از $\overline{\dot{T}}$ داده شده با G_f در $\overline{B}[G_f] \subset V$ باشد.

همچنین جمله φ هم متعلق به T_f است چون تحت فروپاشی تغییر نمی کند (به دلیل شمارا بودنش). اما بنابر اوست بودن رابطه برآورده شدنی، همه این مدل ها (از دیدگاه $\overline{B}[G_f] \subset V$) همچنین می توانند مدل هایی از دیدگاه V باشند. پس ما مجموعه کاملی از مدل های φ در V یافته ایم که با پرآکندگی تناقض دارد.

حالا با استقرا روی α نشان می دهیم که $\tilde{\tau}_\alpha$ و τ^*_α و نیز پارک های متناظرشان یعنی $\tilde{F}_\alpha$ و F^*_α منطبق بریکدیگرند. برهان در مرحله حدی روشن است.

نشان می دهیم اگر پارک های $\tilde{F}_\alpha$ و F^*_α در مرتبه $\alpha = \beta + 1 < \omega_2$ متناظر شوند، آنگاه $\tau^*_\alpha = \tilde{\tau}_\alpha$

فرض کنید $T \in \tilde{\tau}_\alpha$. طبق تعریف، $p \in \mathbb{P}$ وجود دارد که گزاره "اگر T تئوری کامل و برآورده شدنی (برای $\tilde{F}_\alpha$) باشد، در هر پارک ماقبل جازم نیست" را فرس می کند. حالا با استفاده از همگنی $\mathbb{P}$ می دانیم یک q در فیلتر ژنریک بکار رفته برای تعریف V^* وجود دارد که این ویژگی ها را فرس می کند پس آنها در V^* درست هستند، که به این معنی است که T با ویژگی های خواسته شده متعلق به τ^*_α در V^* صدق می کند.

برعکس، اگر $T \in \tau^*_\alpha$ یعنی T کامل است (برای F^*_α) و برآورده شدنی است و در هیچ پارک پیشین جازم نیست. بنابراین اینجا باید شرط فرسینگ $p \in \mathbb{P}$ وجود داشته باشد که این ویژگی ها را فرس کند. طبق بحث آغاز برهان، T به عنوان عضوی در V شناخته می شود و p گواه است که متعلق به $\tilde{\tau}_\alpha$ است.

برای تکمیل استقرا، باید نشان دهیم که با داشتن تساوی $\tau^*_\alpha = \tilde{\tau}_\alpha$ پارک های در مرتبه $\alpha + 1$ برهم منطبق می شوند. این مطلب از این واقعیت نتیجه می شود که همه تایپ های تصدیق شده در V^* در مدل های τ^* متعلق به V هستند که برهان این مطلب شبیه برهان قبل است که به جای استفاده از نام تئوری $\dot{T}$ از نام تایپ p استفاده می کنیم.

برای بخش بعلاوه، بطور ساده می بینیم که پارک ها و تئوری های موردنظر در V شمارا بوده اند و طبق اوست بودن برآورده پذیری تئوری ها، همینطور مدل های اول در V می توانیم نتیجه بگیریم که برای $\alpha < \omega_1^V$ دقیقا تئوری های یکسانی را روی درخت مورلی استاندارد در V داریم. $\square$

تعریف ۴-۳-۴. فرض کنید F یک $L_{\omega_2,\omega}$-پارک از سایز حداکثر $\aleph_1$ باشد و T گردایه ای از F-جملات است. می گوییم T بطور ژنریک F-اتمیک است اگر T در V^* یک $L_{\omega_1,\omega}$-تئوری F-اتمیک برآورده شدنی باشد.

پس بی درنگ از قضیه ۴-۳-۳ داریم:

لم ۴-۳-۵. در V، برای هر $\alpha < \omega_2$ ، هر تئوری $T \in \tilde{T}_\alpha$ بطور ژنریک F-اتمیک است.

از اثبات قضیه ۴-۳-۳ داریم که $p \in \mathbb{P}$ وجود دارد که این گزاره را فرس می کند: "$\dot{T}$ یک تئوری برآورده شدنی و کامل (برای $\dot{F}_\alpha$) است که $\dot{F}_\alpha$-اتمیک می باشد."

این واقعیت کلید اثبات لم ۴-۴-۱۲ است.

۴-۴ حد مستقیم پارک ها، تئوری ها و مدل ها

هدف ما در این بخش نشان دادن این قضیه است:

قضیه ۴-۴-۱. (قضیه وجودی مدل) اگر T یک تئوری روی $\tilde{\tau} = \tau^*$ باشد، آنگاه T یک مدل دارد.

برهان این قضیه بی درنگ از لم ۴-۴-۱۰ و ۴-۴-۱۲ بدست می آید. برای اثبات این لم ها هم به مقدماتی نیاز داریم. پس با مفاهیم و نکات استاندارد آغاز می کنیم.

ما اینجا سیستم های مستقیمی در نظر گرفته و با اردینال ها اندیس گذاری می کنیم:

تعریف ۴-۴-۲. یک سیستم مستقیم از مجموعه ها که با اردینال α اندیس گذاری شده است، شامل (X_i, f_{ij}) هایی است که برای هر $i < j < k < \alpha$ ، X_i ها مجموعه هستند و $f_{ij} : X_i \to X_j$ نگاشت هایی که در $f_{ii} = id$ و $f_{ik} = f_{jk} o f_{ij}$ صدق می کنند.

حد مستقم چنین سیستمی را با X^* نشان می دهیم و برای هر $i < \alpha$ فرض می کنیم $f_i : X_i \to X^*$ نشان دهنده نگاشت کانونی باشد.

تعریف ۴-۴-۳. می گوییم یک سیستم مستقیم (X_i, f_{ij}) که با α اندیس گذاری شده، پیوسته است اگر برای هر اردینال ناصفر $\beta < \alpha$ حد مستقیم $(X_i, f_{ij})_{i<\beta}$ برابر با X_β باشد و برای هر $i < \beta$ نگاشت کانونی f_i برابر با $f_{i\beta}$ باشد.

تئوری T^*_α در پارک F^*_α را در نظر بگیرید. چون این برهان در α یکنواخت است، بجای T^*_α می نویسیم T و بجای F^*_α هم می نویسیم F .

تعریف ۴-۴-۴. فرض کنید A مدلی ترایایی از ZFC^- از سایز ω_1 باشد که شامل T ، F ، هر τ-نماد و ϕ به عنوان اعضاست. فرض کنید $(A_i|i < \omega_1)$ یک زنجیر افزایشی پیوسته از زیرمدل های مقدماتی شمارای A باشد که T، F ، هر τ-نماد و ϕ اعضای A_0 باشند. برای هر $i < \omega_1$ فرض می کنیم $p_i : A_i \to \overline{A_i}$ فروپاشی موستوسکی از A_i باشد. اگر $i < j$ ، نشاندن مقدماتی $\pi_{ij} : \overline{A_i} \to \overline{A_j}$ را با $\pi_{ij} = p_j o p_i^{-1}$ خواهیم داشت.

تعریف ۴-۴-۵. یک سیستم مستقیم از پارک های به طول $\beta < \omega_1$ یک سیستم مستقیم پیوسته (F_i, π_{ij}) است که برای $i < \beta$ هر F_i پارکی شمارا از $L_{\infty,\omega}(\tau_i)$ است و نگاشت های π_{ij} برای هر $i < j < \beta$ در موارد زیر صدق می کنند:

- π_{ij} روی فرمول های اتمی همانی است؛
- π_{ij} با هریک از $\neg, \wedge, \vee, \exists$ جابجا می شود؛ و
- برای هر $\theta(x) \in F_i$،
  - θ و $\pi_{ij}(\theta)$ متغیرهای آزاد یکسان دارند؛
  - θ یک ترکیب فصلی (عطفی) است اگر و تنها اگر $\pi_{ij}(\theta)$ ترکیب فصلی (عطفی) باشد؛ و
  - ϕ ترکیبی فصلی (عطفی) از θ است اگر و تنها اگر $\pi_{ij}(\phi)$ ترکیبی فصلی (عطفی) از $\pi_{ij}(\theta)$ باشد.

نکته ۴-۴-۶. هر سیستم مستقیم پیوسته از پارک های (F_i, π_{ij}) از طول β دارای حد است به طوری که پارک F^* از $L_{\infty,\omega}(\tau^*)$ وجود دارد که τ^* اجتماع τ_α ها است.

یعنی برای هر $i < \beta$ ، یک نگاشت $\pi_i : F_i \to F^*$ وجود دارد که برای هر $i < j$ و $\phi \in F_i$ ، $\pi_i(\phi) = \pi_j(\pi_{ij}(\phi))$.

تعریف ۴-۴-۷. فرض کنید (F_i, π_{ij}) یک سیستم مستقیم پیوسته از پارک های شمارای با طول کمتر از $\beta \leq \omega_1$ است و برای هر i ، M_i یک τ_i-ساختار باشد.

۱. نگاشت $\sigma_{ij} : M_i \to M_j$ یک نگاشت π_{ij}-مقدماتی است اگر برای همه $\theta(x) \in F_i$ ها و همه

: $a \in M_i^{lgx}$

$$M_i \models \theta(a) \Longleftrightarrow M_j \models \pi_{ij}(\theta)(\sigma_{ij}(a))$$

۲. یک سیستم مستقیم $(F_i, \pi_{ij}, M_i, \sigma_{ij})$ از پارک ها و مدل ها، زوج سازگاری از یک سیستم مستقیم از پارک های (F_i, π_{ij}) و سیستم مستقیمی از τ_i-ساختارهای (σ_{ij}, M_i) است که برای هر $i < j < \beta$ ، σ_{ij} ، π_{ij} - مقدماتی است.

لم زیر به طور بدیهی از تعریف حد مستقیم بدست می آید:

لم ۴-۴-۸. فرض کنید $(F_i, \pi_{ij}, M_i, \sigma_{ij})$ یک سیستم مستقیم از پارک ها و مدل هاست. حد مستقیم $(F^*, \pi_i, M^*, \sigma_i)$ وجود دارد که σ_i یک π_i-نشاندن است به طوری که:

۱. $\sigma_i = \sigma_j\sigma_{ij}\forall i < j < \beta$

۲. برای هر $i < \beta$ بقدر کافی بزرگ، هر عضو M^* در تصویری از σ_i است.

۳. برای $\psi \in F_i$ و $a \in M_i$

$$M_i \models \psi(a) \Longleftrightarrow M^* \models \pi_i(\psi)(\sigma_i(a))$$

تعریف ۴-۴-۹. سیستم مستقیم $(F_i, \pi_{ij}, M_i, \sigma_{ij})$ اتمی است اگر هر M_i یک مدل اتمی F_i باشد و نیز فرمول $\theta(v) \in F_i$ را F_i-کامل گوییم اگر و تنها اگر $\pi_{ij}(\theta(v)) \in F_j$ یک F_j-کامل باشد.

حالا موضوعی مهم و اساسی را بررسی می کنیم:

لم ۴-۴-۱۰. فرض کنید $(F_i, \pi_{ij}, M_i, \sigma_{ij})$ یک سیستم مستقیم اتمی با حد مستقیم $(F^*, \pi_i, M^*, \sigma_i)$ باشد. آنگاه M^* اتمی است و $\theta(v) \in F_i$ ، F_i-کامل است اگر و تنها اگر $\pi_i(\theta(v)) \in F^*$ ، F^* - کامل باشد.

برهان. اگر $\theta(v) \in F_i$ ، F_i-کامل نباشد، آنگاه چون π_i ترکیبات بولی متناهی را حفظ می کند، $\pi_i(\theta(v)) \in F^*$ با در نظر گرفتن تصویر، F^* - کامل نیست.

برعکس، فرض کنید $\theta(v) \in F_i$ ، F_i- کامل باشد و $\chi \in F^*$.

برای $i < j$ ای و $\psi \in F_j$ ای داریم $\pi_j(\psi) = \chi$. از آنجا که $\pi_{ij}(\theta)$ کامل است،

$$M_j \models (\forall v)\pi_{ij}(\theta)(v) \rightarrow \psi(v) M_j \models (\forall v)\pi_{ij}(\theta)(v) \rightarrow \neg\psi(v)$$

بدون کم شدن از کلیت، فرض می کنیم گزاره نخست درست باشد، آنگاه

$$M^* \models (\forall v)\pi_i(\theta)(v) \rightarrow \chi(v)$$

چنان که می خواستیم. □

نتیجه ۴-۴-۱۱. فرض کنید T تئوری مرتبه اول کامل در نمادگان τ از کاردینال $\aleph_1$ باشد. آنگاه T یک مدل اتمی در $\aleph_1$ دارد.

برهان. نخست نمادهای τ را همانند دنباله ای با اردینال ω_1 خوش ترتیب می کنیم.

برای هر $i < \omega_1$ ، فرض می کنیم τ_i شامل آن نمادهایی باشد که درون اولین i عضو در لیست واقع می شوند و فرض می کنیم F_i ، $L_{\omega,\omega}(\tau_i)$ باشد. از آنجا که تایپ های ایزوله چگالند، برای هر τ- فرمول ϕ که با T سازگار است یک فرمول کامل ψ وجود دارد که $T + \psi \models \phi$. روشن است که مجموعه

$$C = \{i < \omega_1 : \text{برای هر } F_i \text{- فرمول سازگار یک } \psi \in F_i \text{ کامل وجود دارد}\}$$

در ω_1 بسته و بیکران است. بنابراین با اندیس گذاری مجدد، می توان فرض کرد که لیست اصلی ما بدین صورت است. حالا فرض می کنیم که $\pi_{i,j} = id$ برای $i < j < \omega_1$. قرار دهید $T_i = T \cap F_i$. چون بنابر اندیس گذاری مجدد ما، هر T_i یک تئوری شمارا برای آن دسته از تایپ های ایزوله ای است که چگالند، پس می توانیم یک M_i شمارا و اتمی انتخاب کنیم که $M_i \models T_i$. وجود یک مدل اتمی M^* از T با کاردینال $\aleph_1$ بی درنگ از لم ۴-۴-۱۰ نتیجه می شود. □

و حالا نشان می دهیم این مکانیزم برای تئوری های درخت مورلی گسترش یافته نیز بکار می رود.

لم ۴-۴-۱۲. فرض کنید F پارکی از $L_{\omega_2,\omega}$ با کاردینال $\aleph_1$ باشد و T تئوری F-کاملی که به طور ژنریک اتمی است. آنگاه یک سیستم مستقیم $((F_i, T_i, \pi_{ij}) : i < \omega_1)$ وجود دارد که T_i یک تئوری در پارک F_i است به طوری که حد مستقیم $((F_i, T_i, \pi_{ij}) : i < \omega_1)$ برابر است با (F, T) .

افزون بر این برای هر i ، T_i یک تئوری اتمی است پس یک مدل اتمی M_i دارد و یک نشاندن σ_{ij} درون M_j . پس $(F_i, \pi_{ij}, M_i, \sigma_{ij})$ یک سیستم مستقیم اتمی است و حد $(M_i, \sigma_{ij} : i < \omega_1)$ یک مدل از T از کاردینال $\aleph_1$ است.

برهان. باز هم مانند تعریف ۴-۴-۴ زنجیر پیوسته $\langle A_i | i < \omega_1 \rangle$ را از زیرمدل های مقدماتی یک مدل ترایایی ZFC^- از سایز حداکثر ω_1 ، می سازیم به طوریکه $T, F,$ و هر τ-نماد و نیز ϕ اعضای مدل نخستین (زنجیر) ، A_0 باشند. برای هر $i < \omega_1$ فرض می کنیم $p_i : A_i \to \overline{A_i}$ فروپاشی موستوسکی از A_i باشد. اگر $i < j$ یک نشاندن مقدماتی $\pi_{ij} : \overline{A_i} \to \overline{A_j}$ داریم که $\pi_{ij} = p_j o p_i^{-1}$. بررسی درستی این که $(F_i, \pi_{ij} : i, j < \omega_1)$ یک سیستم مستقیم از پارک هاست، سرراست است.

برای مثال فرض کنید که $\theta = \bigwedge_{x \in X} \chi_x \in F_i$.

بنابر نشاندن مقدماتی می توان دریافت که θ ترکیبی عطفی است. حالا برای هر $x \in p_i(X \cap A_i)$ ، $\overline{A_i} \models \chi_x \in X$ پس چون $\pi_{i,j}$ یک نشاندن مقدماتی است، $\overline{A_j} \models \pi_{i,j}(\chi_x) \in \pi_{i,j}(X)$ به عبارت دیگر $\pi_{i,j}(\chi_x)$ ترکیبی عطفی از $\pi_{i,j}(\theta)$ برای هر $x \in p_i(X \cap A_i)$ است.

فرض کنید $T_i = p_i(T) \in \overline{A_i}$. ما قبلا فرض کرده ایم که T یک F-تئوری به طور ژنریک اتمی است؛ بنابر تعریف پذیری فرسینگ، این ویژگی با هم ارزی مقدماتی حفظ می شود. پس برای هر i ، T_i بطور ژنریک اتمی در $\overline{A_i}$ است. چون $\overline{A_i}$ شماراست، می توانیم در V یک $\overline{A_i}$-ژنریک G را برای $\mathbb{P}^{\overline{A_i}}$ بسازیم. در $\overline{A_i}[G]$ ، T_i یک تئوری اتمی با یک مدل اتمی M_i است. اما M_i در V ساخته شده بود. فرض کنید: $\sigma_{ij} : M_i \to M_j$. (σ_{ij} وجود دارد چون T_j گسترش یافته ی F_i-تئوری کامل اتمی T_i است.)

چون π_{ij} مقدماتی است،

$$M_i \models \theta(a) \Longleftrightarrow M_j \models \pi_{ij}(\theta)(\sigma_{ij}(a))$$

به طور مشابه برای هر $\psi \in F_i$ ، داریم:

$\pi_{ij}(\psi) \in T_j \Longleftrightarrow \psi \in T_i$

اساسا از آنجا که اتم بودن یک ویژگی مقدماتی است، اگر $\theta \in F_i$ یک F_i-اتم باشد، آنگاه $\pi_{ij}(\theta)$ یک F_j-اتم در T_j است. (چون $F \in \overline{A_0}$ همراستا با F_i در $\overline{A_i}$ و نیز F_j در $\overline{A_j}$ است). بنابراین $(F_i, \pi_{ij}, M_i, \sigma_{ij})$ یک سیستم مستقیم اتمی است. بنابر لم ۴-۴-۱۰ یک حد مستقیم M^* وجود دارد که یک مدل اتمی از $T = T^*$ است.

$\square$

۴-۵ دو پرسش

باز هم برمی گردیم به انگاره وات. فرض کنید $\varphi \in L_{\omega_1,\omega}$ یک پادگواهه انگاره وات باشد. به عبارت دیگر φ پراکنده است با ناشمارا تا مدل شمارا. چه اندازه درباره مدل های ناشمارای φ می توان سخن گفت؟ نتایج اولیه توسط هارنیک و مک کی به دست آمد که نشان دادند همیشه مدل هایی از φ از کاردینال $\aleph_1$ وجود دارند.

قضیه ۴-۵-۱. (هارنیک - مک کی) [۸] فرض کنید φ یک پادگواهه انگاره وات باشد. $M \models \varphi$ از کاردینال $\aleph_1$ وجود دارد که $L_{\infty,\omega}$-هم ارز با یک مدل شمارا نیست.

گفتنی است هارنیک و مک کی برای اثبات این قضیه مفهومی به نام پادگواهه می نیمال را تعریف کردند که بعدها در نتایج دیگری برای انگاره وات هم بکار رفت.

تعریف ۴-۵-۲. فرض کنید $\varphi \in L_{\omega_1,\omega}$ یک پادگواهه انگاره وات باشد. می گوییم φ پادگواهه ای می نیمال است اگر برای هر جمله $\psi \in L_{\omega_1,\omega}$ ، یا $\varphi \wedge \psi$ و یا $\varphi \wedge \neg\psi$ حداکثر تعدادی شمارا مدل شمارا

داشته باشد.

لم ۴-۵-۳. ([۱۶]) اگر φ یک پادگواهه وات است، یک پادگواهه می نیمال θ وجود دارد که $\varphi \models \theta$

.

این نکته مجددا در نتیجه چاپ نشده ای از هرینگتون هم پیدا شد که اثبات کرده پادگواهه انگاره وات، مدل هایی با رتبه اسکات به دلخواه بزرگ ولی کمتر از ω_2 دارد. در حالی که بیشتر مدل تئوریست ها باور دارند انگاره وات رد می شود، نتیجه هرینگتون در کنار قضیه یورت، امکان فریبنده اثبات انگاره وات را با تقویت نتیجه هرینگتون برای ساختن مدلی از سایز $\aleph_2$ و تناقض با قضیه یورت افزایش می دهد. البته تعداد کمی تکنیک خوب برای ساختن مدل از سایز $\aleph_2$ داریم.

قضیه ۴-۵-۴. (هرینگتون) اگر ϕ یک پادگواهه انگاره وات باشد، آنگاه ϕ مدل هایی از رتبه اسکات α برای α بقدر کافی بزرگ کمتر از ω_2 دارد.

برهان. برای هر $\alpha < \omega_2$ ، تئوری T_α از بلندی α را روی درخت ژنریک مورلی انتخاب می کنیم. بنابر لم ۴-۳-۵، T_α بطور ژنریک اتمی است. با لم ۴-۴-۱۲ می توان گفت که T مدلی از کاردینال $\aleph_1$ دارد و در نهایت لم ۴-۲-۱ نشان می دهد که هر مدل از T_α رتبه اسکات دست کم α دارد. □

خوب است بدانید که نتایجی از شلاه و بالدوین برای مرتبه اول ها، بدین صورت است:

قضیه ۴-۵-۵. فرض کنید T یک تئوری کامل مرتبه اول در یک زبان شمارا باشد که پادگواهه ای برای انگاره وات است. آنگاه $I(T, \aleph_1) = 2^{\aleph_1}$.

برهان. شلاه انگاره وات را برای تئوری های ω-پایدار ثابت کرده است. پس T ، ω-پایدار نیست. اما شلاه همچنین ثابت کرد که یک تئوری که ω-پایدار نباشد، $2^{\aleph_1}$ مدل نایکریخت از کاردینال $\aleph_1$ دارد. □

اکنون با دو پرسش این پژوهش را به پایان می رسانیم که پرسش نخست بسیار دست نیافتنی و ناممکن به نظر می رسد:

آیا می توانیم برهان قضیه ۴-۵-۴ را برای ساختن دو مدل در $\aleph_1$ اصلاح کنیم به گونه ای که یکی بتواند دیگری را به طور سره در بربگیرد؟

می گوییم بعید است چون بنابر نتایج دو بخش نخست، این همان انگاره وات را نتیجه می دهد.

پرسش دیگر دست یافتنی تر به نظر می رسد، بنابر آنچه که گفتیم، بالدوین نشان داده که برخی از کارهای شلاه در نهایت نتیجه می دهد که هر پادگواهه مرتبه اول از انگاره وات، $2^{\aleph_1}$ مدل در $\aleph_1$ دارد. ما فقط نشان داده ایم که هر $L_{\omega_1,\omega}$ - پادگواهه انگاره وات، $\aleph_2$ مدل در $\aleph_1$ دارد. آیا می توان آن را به $2^{\aleph_1}$ گسترش داد؟

۴-۶ گذری تاریخی

رابرت لاوسون وات، در چهارم آپریل سال ۱۹۲۶ در کالیفرنیا چشم به جهان گشود. در جوانی شیفته موسیقی و نواختن پیانو بود. او در ۱۶ سالگی تحصیلات خود را در دانشکده پومونا شروع کرد. در زمان جنگ جهانی دوم وارد نیروی دریایی آمریکا شد و در ۱۹۴۵ در رشته فیزیک فارغ التحصیل شد. سپس در ۱۹۴۶ تحصیل در دوره دکتری ریاضیات در دانشگاه برکلی را آغاز کرد. ابتدا در زمینه جبر C^* با جان کلی توپولوژیست کار می کرد اما بعد از رفتن کلی، تحت نظارت تارسکی شروع به کار در زمینه منطق ریاضی نمود و پایان نامه خود را در ۱۹۵۴ تکمیل کرد. پس از گذراندن چهار سال تحصیل در دانشگاه واشنگتن، وی در سال ۱۹۵۸ به برکلی بازگشت و تا سال ۱۹۹۱ بازنشستگی اش باقی ماند. از جمله شاگردان بنام او می توان جک سیلور و جولیا نایت را نام برد.

در سال ۱۹۵۷ ، وات با مریلین ماکا ازدواج کرد و صاحب دو فرزند شدند.

وات و تارسکی، زیرمدل های مقدماتی و آزمون تارسکی- وات در نظریه مدل ها را معرفی کردند. همچنین وات همراه با مورلی، روی مبحث تعداد مدل های شمارای تئوری های مرتبه اول مطالعه کردند تا

جایی که انگاره معروف وات بوجود آمد. می گویند وات یک معلم توانا در مقطع کارشناسی بود، و نوشتن او برای شاگردانش همراه با ظرافت و بیانی روشن بود. کتاب نظریه مجموعه او دلیلی بر این توانمندی است.

سرانجام در ۲ آپریل ۲۰۰۲، در کالیفرنیا درگذشت.

بازبردها

[1] *N. L. Ackerman. Model Theoretic Proof Of A Result Of Hjorth, 2013 manuscript.*

[2] *John T. Baldwin. Categoricity. Number 51 in University Lecture Notes. American Mathematical Society, Providence, USA, 2009. www.math.uic.edu/˜ jbaldwin.*

[3] *J.T. Baldwin. Vaught's conjecture, do uncountable models count? Notre Dame Journal of Formal Logic, pages 1–14, 2007.*

[4] *J. T. Baldwin, SY D. Friedman, Martin Koerwien, And Michael C. Laskowski. Three red herrings around Vaught's conjecture, American Mathematical Society, 368, 2016.*

[5] *S. Buechler. Vaught's conjecture for superstable theories of finite rank, Ann. Pure Appl. Logic, to appear.*

[6] *M. Golshani. An Introduction To Forcing, Unpublished note, School of Mathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM). 2015.*

[7] *M. Golshani, The Notions Of Cut, Dimension And Transcendence Degree For Models Of ZFC, arXiv:1501.07175 [math.LO], 2015.*

[8] *V. Harnik and M. Makkai. A tree argument in infinitary model theory. American Mathematical Society, 67:309–314, 1977.*

[9] *D. Hjorth. A note on counterexamples to the Vaught conjecture, Notre Dame J. Formal Logic, 48(1):49-51 (electronic), 2007.*

[10] *W. Hodges. Model Theory. Cambridge University Press, 1993.*

[11] *T. Jech. Set Theory, 3ed, Springer, 2006.*

[12] *A. Kanamori. The Higher Infinite, Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings , 2ed, Springer , 2009.*

[13] *R. Kaye and D. Macpherson. Automorphisms of First-order Structures, Oxford University Press, 1994.*

[14] *H.J Keisler. Model theory for Infinitary Logic. North-Holland, 1971.*

[15] *J.F. Knight. A complete $L_{\omega_1,\omega}$-sentence characterizing $\aleph_1$. Journal of Symbolic Logic, 42:151–161, 1977.*

[16] *D. Marker. Lectures on Infinitary Model theory, Cambridge University Press, First Published, 2016.*

[17] *D. Marker. Model theory: an introduction, 2002 Springer-Verlag New York, Inc.*

[18] *L. Mayer. Vaught's conjecture for o-minimal theories, J. Symbolic Logic 53 (1988), 146–159.*

[19] *M. Morley. The Number Of Countable Models, Vol 35, Journal Of Symbolic Logic 1970 .*

[20] *S. Shelah. L. Harrington, and M. Makkai, A proof of Vaught's conjecture for -stable theories, Isr. J. Math. 49 (1984), 259–280.*

[21] *J. Steel. On Vaught's Conjecture, in Cabal Seminar 76–77, A. Kechris and Y. Moschovakis, eds., Springer-Verlag, New York, 1978*

[22] *S. Unger. Forcing Summer School Lecture Notes. UCLA Logic Summer School. 2013.*

[۲۳] . شووینگ تی. لین و یو-فنگ. لین، عمید رسولیان، نظریه مجموعه ها و کاربردهای آن، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ هفتم ۱۳۸۰ .

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Absolute .... اوست
Absolute indiscernible .... واشناخت ناپذیر مطلق
Amalgamation .... ادغام
Atomic model .... مدل اتمی
Automorphism .... خودریختی
Axiom .... بنداشت
Back and forth system .... سیستم رفت و برگشت
Boolean combinations .... ترکیبات بولی
Canonical Scott sentence .... جمله اسکات کانونی
Cardinal .... کاردینال
Categorical .... جازم
Chain .... زنجیر
Class .... رده، کلاس
Closed .... بسته
Coanalytic .... شبه تحلیلی
Cofinal .... هم پایان
Collection .... گردایه
Complete .... کامل
Condition .... شرط
Conjunction .... عطف

Connective .... هابند

Consistent .... سازگار

Continuous .... پیوسته

Continuum .... پیوستار

Countable .... شمارا

Counterexample .... پادگواهه

Cut-pair .... زوج برشی

Direct limit .... حد مستقیم

Directed system .... سیستم مستقیم

Disjoint amalgamation .... ادغام مجزا

Divide .... بخش کردن

Element .... عضو

Elementary extension .... توسیع مقدماتی

Embedding .... نشاندن

Equivalence .... هم‌ارزی

Equivalent .... هم ارز

Expand .... گسترش یافتن (زبان)

Extended Morley tree .... درخت گسترش یافته مورلی

Extendible .... گسترش پذیر

Finite .... متناهی

Forcing .... فرسینگ

Fra¨ıss´e construction .... ساختار فرایسه

Fragment .... پارک

Generic .... ژنریک

Generic Morley tree .... درخت مورلی ژنریک

Height .... بلندی

Homogeneous	همگن
Independent	مستقل
Indiscernible	واشناخت ناپذیر
Infinite	نامتناهی
Interpretation	تعبیر
Isomorphic	یکریخت
Joint embedding	نشاندن مشترک
L´evy collapse	فروپاشی لوی
Language	زبان
Limit Ordinal	اردینال حدی
Maximal	بیشینه
Maximal triple	سه گانه ماکسیمال
Merge	ادغام کردن
Morley tree	درخت مورلی
Mostowski collapse	فروپاشی مستوسکی
Ordinal	اردینال
Partition	افراز
Path	مسیر
Perfect set	مجموعه کامل
Permutation	جایگشت
Predicate	محمول
Prime Model	مدل اول
Projection map	نگاشت افکنش
Proper	سره
Quantifier	چنداگر
Quantifier rank	رتبه چنداگر

بی چنداگر .... *Quantifier-free*

رتبه .... *Rank*

تصدیق کردن .... *Realize*

پذیرا .... *Receptive*

شاه ماهی قرمز .... *Red Herring*

منظم .... *Regular*

رابطه .... *Relation*

توانگر .... *Rich*

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اجتماع .... *Union*

ادغام .... *Amalgamation*

ادغام کردن .... *Merge*

ادغام مجزا .... *Disjoint amalgamation*

اردینال .... *Ordinal*

اردینال حدی .... *Limit Ordinal*

افراز .... *Partition*

اوست .... *Absolute*

بخش کردن .... *Divide*

برآورده شدنی .... *Satisfiable*

بسته .... *Closed*

بلندی .... *Height*

بنداشت .... *Axiom*

بی چنداگر .... *Quantifier-free*

بی کران .... *Unbounded*

بیشینه .... *Maximal*

پادگواهه .... *Counterexample*

پارک .... *Fragment*

پذیرا .... *Receptive*

پرآکندگی .... *Scatteredness*

پیوستار .... *Continuum*

پیوسته .... *Continuous*

تایپ .... *Type*

ترکیبات بولی .... *Boolean combinations*

تصدیق کردن .... *Realize*

تعبیر .... *Interpretation*

توانگر .... *Rich*

توسیع مقدماتی .... *Elementary extension*

جازم .... *Categorical*

جایگشت .... *Permutation*

جمله .... *Sentence*

جمله اسکات .... *Scott sentence*

جمله اسکات کانونی .... *Canonical Scott sentence*

جمله پرآکنده .... *Scattered sentence*

جهان .... *Universe*

چنداگر .... *Quantifier*

حد مستقیم .... *Direct limit*

خودریختی .... *Automorphism*

درخت .... *Tree*

درخت گسترش یافته مورلی .... *Extended Morley tree*

درخت مورلی .... *Morley tree*

درخت مورلی ژنریک .... *Generic Morley tree*

رابطه .... *Relation*

رتبه .... *Rank*

رتبه اسکات .... *Scott rank*

رتبه چنداگر .... *Quantifier rank*

رده .... Class

زبان .... Language

زنجیر .... Chain

زوج برشی .... Cut-pair

زیرمدل .... Submodel

زیرنمادگان .... Subvocabulary

ژنریک .... Generic

ساختار .... Structure

ساختار فرایسه .... Fraïssé construction

سازگار .... Consistent

سره .... Proper

سه گانه ماکسیمال .... Maximal triple

سیستم رفت و برگشت .... Back and forth system

سیستم مستقیم .... Directed system

شاه ماهی قرمز .... Red Herring

شبه تحلیلی .... Coanalytic

شرط .... Condition

شمارا .... Countable

عضو .... Element

عطف .... Conjunction

فرسینگ .... Forcing

فروپاشی لوی .... Lévy collapse

فروپاشی مستوسکی .... Mostowski collapse

کاردینال .... Cardinal

کامل .... Complete

گردایه .... Collection

گروه توپولوژیکی .... Topological group

گسترش پذیر .... Extendible

گسترش یافتن .... Expand

متناهی .... Finite

مجموعه کامل .... Perfect set

محمول .... Predicate

مدل اتمی .... Atomic model

مدل اول .... Prime model

مستقل .... Independent

مسیر .... Path

منظم .... Regular

ناشمارا .... Uncountable

نامتناهی .... Infinite

نشاندن .... Embedding

نشاندن مشترک .... Joint embedding

نگاشت افکنش .... Projection map

نمادگان .... Vocabulary

هابند .... Connective

هم ارز .... Equivalent

هم پایان .... Cofinal

همگن .... Homogeneous

واشناخت ناپذیر .... Indiscernible

واشناخت ناپذیر مطلق .... Absolute indiscernible

یک جایی .... Unary

یکتا .... Unique

یکریخت .... Isomorphic

Abstract

We describe a model theoretic proof that if there is a counterexample to Vaught's conjecture there is a counterexample such that every model of cardinality $\aleph_1$ is maximal (strengthening a result of Hjorth's). In the process we analyze Hjorth's sentence for characterizing $\aleph_1$. We also describe a new proof of Harrington's theorem that any counterexample to Vaught's conjecture has models in $\aleph_1$ of arbitrarily high Scott rank below $\aleph_2$. Actually, we have determined three ways which are false leads towards solving Vaught's conjecture, the first is methodological, the second two are false leads towards the proof.

Keywords: *Vaught's Conjecture, Absolute Vaught Conjecture, Counterexamples to Vaught's conjecture, Scattered sentences, Fra¨ıss´e construction, Absolute indiscernibles, Hjorth example, Scott rank, Scott's isomorphism theorem, Generic Morley tree, Extended Morley tree, Directed system of fragments, Directed system of sets, Direct limit, Forcing, Harrington's theorem.*

T.M.U.

Around Vaught's Conjecture

A Dissertation Presented for the Partial Fulfilment of The Degree of Master of Science in Pure Mathematics

Faculty of Mathematical Sciences

Tarbiat Modares University

By:

Zahra A. Biglou

Supervisor:

Dr. Seyed-Mohamad Bagheri

Advisor:

Dr. Mohamad Golshani

January 2018