۱۸، مهر، ۸۷
9 oct 2008

جلسه اول

فصل ۱ : ایده‌ال‌های تک‌جمله‌ای

۱. خواص مقدماتی ایده‌ال‌های تک‌جمله‌ای

نمادگذاری :

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z}_+^n = \{ a = (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{Z}_+ \;,\; 1 \leq i \leq n \}$

K : میدان داده شده

$$K[x_1, \dots, x_n] = \Big\{ \sum_{\substack{a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}_+ \\ \text{متناهی}}} k_{a_1, \dots, a_n} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \;\Big|\; k_{a_1, \dots, a_n} \in K \Big\}$$

$\cdot$: ضرب اسکالر (اعضای K : اسکالر) ، $\times$: ضرب معمولی چندجمله‌ای‌ها ، $+$: جمع معمولی

$(K[x_1, \dots, x_n], +, \cdot)$ $(K[x_1, \dots, x_n], +, \times)$

K-فضای برداری   حلقه جابجایی یکدار

K-جبر

$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ یک تک‌جمله‌ای در $K[x_1, \dots, x_n]$ که با $x^a = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$

$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_+^n$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

پس

$$K[x_1, \dots, x_n] = \Big\{ \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}_+^n \\ \text{متناهی}}} k_a x^a \;\Big|\; k_a \in K \Big\}$$

با فرض $S = K[x_1, \dots, x_n]$ ، تعریف می‌کنیم

$\mathrm{Mon}(S) :=$

مجموعه تمام تک‌جمله‌ای‌ها در S : $= \{ x^a \mid a \in \mathbb{Z}_+^n \}$

$\mathrm{Mon}(S) \xleftrightarrow{\text{تناظر یک به یک}} \mathbb{Z}_+^n$

توجه: $Mon(S)$ یک k-پایه برای S است:

(1) $\sum_{a\in \mathbb{Z}_+^n} k_a x^a = 0 \Longrightarrow k_a = 0 \quad \forall a$ استقلال خطی

(۲) $f\in S \Rightarrow f = \sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}_+^n \\ \text{متناهی}}} k_a x^a \quad (\in Mon(S))$ مولد بودن

$\Big\} \to$ $Mon(S)$ یک k-پایه برای S

پس نمایش منحصر به فرد برحسب اعضای $Mon(S)$ داریم.

تکیه‌گاه f = $supp(f) = \{x^a \mid k_a \neq 0\}$

تک‌جمله‌ای‌هایی که در f ظاهر می‌شوند و ضریبشان در k ناصفر است.

گزاره: فرض کنید $a,b\in\mathbb{Z}_+^n$ ، $S=k[x_1,\dots,x_n]$ در این صورت

$$x^a | x^b \iff x^b = x^\gamma x^a \quad \exists \gamma\in\mathbb{Z}_+^n$$

برهان: $\Leftarrow$ واضح است.

$(\Rightarrow)$

$$x^a | x^b \Rightarrow \exists f\in S:\ x^b = f x^a = \Big(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n \\ \text{متناهی}}} k_\alpha x^\alpha\Big) x^a = \sum k_\alpha x^{\alpha+a}$$

$$\xRightarrow{Mon(S)\ \text{پایه است}} k_\alpha = \begin{cases}0 & \alpha\neq\gamma\ (=b-a)\\ 1 & \alpha=\gamma\ (=b-a)\end{cases} \longrightarrow x^b = x^{b-a}.x^a. \quad \blacksquare$$

تعریف: ایدال I از $S=k[x_1,\dots,x_n]$ را ایدال تک‌جمله‌ای نامند هرگاه با تک‌جمله‌ای‌ها تولید شود.

(*) فرض کنید $I \trianglelefteq S$ (تک‌جمله‌ای) چون S نوتری است پس $I=\langle f_1,\dots,f_t\rangle$ که $f_i\in S$

$$f_s = \sum_{i=1}^{l_s} g^s_{\alpha(i)} x^{a(i)},\quad g^s_{\alpha(s,i)}\in S \quad \to \quad I = \langle x^{a(1)},\dots,x^{a(k)}\rangle$$

I یک مجموعه مولد متناهی از تک‌جمله‌ای‌ها دارد.

۱۸ مهر ۸۷

9 oct 2008

جلسه اول

لم ۱: فرض کنید $I=\langle x^{a(1)},\dots,x^{a(\ell)}\rangle$ یک ایدال تک‌جمله‌ای در $S=k[x_1,\dots,x_n]$ باشد و $b\in\mathbb{Z}_+^n$ در این صورت $x^{a(i)}\mid x^b$ برای یک i، $1\le i\le \ell$ $\iff$ $x^b\in I$.

برهان: $\Leftarrow$ واضح است. برای اثبات $(\Rightarrow)$:

$$x^b\in I \Rightarrow x^b=\sum_{i=1}^{\ell} f_i x^{a(i)} = \sum_{i=1}^{\ell}\Big(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n\\ \text{متناهی}}} k_\alpha^i x^\alpha\Big)x^{a(i)}$$
$$f_i\in S$$
$$=\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n\\ \text{متناهی}}} k_\alpha^i x^{\alpha+a(i)}$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\exists i,\ 1\le i\le\ell\\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^n}}{x^b = x^{\alpha+a(i)}} \Rightarrow x^{a(i)}\mid x^b \quad \blacksquare$$

نتیجه: فرض کنید I یک ایدال تک‌جمله‌ای در S باشد در این صورت مجموعه مولد مینیمال I منحصر به فرد است که با $G(I)$ نمایش داده می‌شود.

برهان: فرض کنید $A=\{x^{a(1)},\dots,x^{a(\ell)}\}$ ، $B=\{x^{b(1)},\dots,x^{b(s)}\}$ هر دو مجموعه مولد مینیمال I باشند.

$$x^{a(i)}\in A \to x^{a(i)}\in I \xrightarrow{\text{لم ۱}} \underset{\exists j,\ 1\le j\le s}{x^{b(j)}\mid x^{a(i)}} \xrightarrow{\text{گوییم}} x^{a(i)}=x^{\gamma}x^{b(j)}$$

$$x^{b(j)}\in I \xrightarrow{\text{لم ۱}} \underset{\exists r}{x^{a(r)}\mid x^{b(j)}} \xrightarrow{\text{گوییم}} x^{b(j)}=x^{\gamma'}x^{a(r)}$$

$$x^{a(i)}=x^{\gamma}x^{\gamma'}x^{a(r)} \xrightarrow{\text{مینیمال}} \underbrace{x^{\gamma}x^{\gamma'}=1}_{x^{\gamma}=x^{\gamma'}=1},\quad x^{a(i)}=x^{a(r)}$$

$$\Rightarrow x^{a(i)}=x^{b(j)}\in B \Rightarrow A\subseteq B$$

به همین ترتیب $B\subseteq A$ $\Big\}\to A=B.$ $\blacksquare$

لم ۲: فرض کنید $I=\langle x^{a(1)},\dots,x^{a(l)}\rangle$ یک ایدال تک‌جمله‌ای در $S=k[x_1,\dots,x_n]$ باشد، $b\in\mathbb{Z}_+^n$ در این صورت

$$\exists i,\ 1\le i\le l \quad x^{a(i)} \mid x^b \iff b\in \bigcup_{i=1}^{l}\left(a(i)+\mathbb{Z}_+^n\right)$$

برهان:

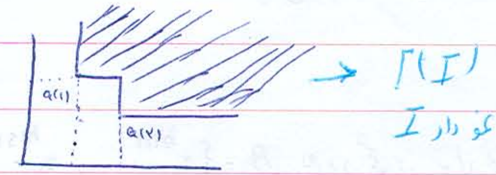
$$b\in \bigcup_{i=1}^{l}\left(a(i)+\mathbb{Z}_+^n\right) \iff b\in a(i)+\mathbb{Z}_+^n \quad \exists\, 1\le i\le l \iff b=a(i)+\gamma \quad \exists\, \gamma\in\mathbb{Z}_+^n$$

$$\iff x^b=x^{\gamma}x^{a(i)} \iff x^{a(i)}\mid x^b$$

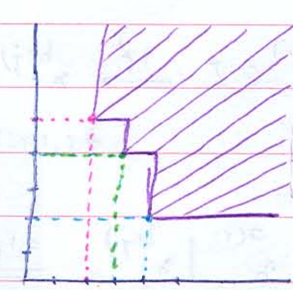
∎

قضیه: $I=\langle x^{a(1)},\dots,x^{a(l)}\rangle$ ایدال تک‌جمله‌ای در S و $b\in\mathbb{Z}_+^n$ در این صورت

$x^b\in I \iff b\in \bigcup_{i=1}^{l}\left(a(i)+\mathbb{Z}_+^n\right) \iff$ b یکی از نقاط شبکه‌ای از شکل هاشور خورده زیر باشد



$$I=\langle x_1^4x_2^2,\ x_1^3x_2^4,\ x_1^2x_2^5\rangle \lhd k[x_1,x_2]$$



قضیه: فرض کنید $I=\langle x^{a(1)},\dots,x^{a(l)}\rangle$ ایدال تک‌جمله‌ای در S باشد، $f\in S$ در این صورت

$$f\in I \overset{*}{\iff} \mathrm{Supp}(f)\subseteq I \iff \{b\in\mathbb{Z}_+^n \mid x^b\in \mathrm{Supp}(f)\}\subseteq \Gamma(I)$$

برهان: $\overset{*}{\Leftarrow}$ واضح است.

$\overset{*}{\Rightarrow}$:

$$f\in I \Rightarrow f=\sum_{i=1}^{l} f_i x^{a(i)} \ ;\ f_i\in S$$

$$=\sum_{i=1}^{l}\Big(\underset{\text{متناهی}}{\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}} k_\alpha^i x^{\alpha}\Big)x^{a(i)} = \sum_{i=1}^{l}\underset{\text{متناهی}}{\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}} k_\alpha^i x^{\alpha+a(i)}$$

$supp(f) \subseteq \{x^{\alpha+a(i)} \mid k^i_\alpha \neq 0 \quad \alpha \in \mathbb{Z}^n_+ \quad 1 \le i \le l\} \subseteq I$

توجه: عکس قضیه بالا هم درست است:

$I \trianglelefteq S$ با این ویژگی که
$f \in I \Longleftrightarrow supp(f) \subseteq I$ $\Big\} \Longrightarrow$ I ایدآل تک جمله‌ای است

دلیل:

$I \trianglelefteq S \xrightarrow{\text{دیکسون}} I = \langle f_1, \dots, f_k \rangle, \dots, \quad I = \langle x^{a(1)}, \dots, x^{a(l)} \rangle$

□

توجه: اگر $I \trianglelefteq S$ آنگاه I یک k-زیرفضای برداری S است.

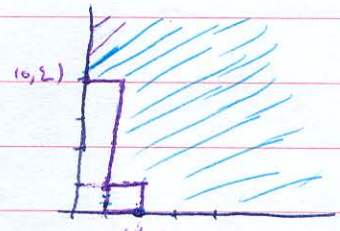
قضیه: اگر I یک ایدآل تک جمله‌ای باشد و $N_I = \{x^a \mid x^a \in I\}$ آنگاه N_I یک پایه برای I است.

نتیجه: دو ایدآل تک جمله‌ای I و J از S برابرند اگر و تنها اگر $N_I = N_J$ اگر و تنها اگر $\Gamma(I) = \Gamma(J)$.

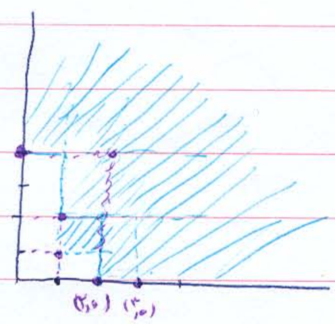
$f \in I \to supp(f) \subseteq I \to supp(f) \subseteq N_I = N_J \to supp(f) \subseteq J \to f \in J.$

مثال:

$I = \langle x_1 x_2, x_1^2, x_2^4 \rangle \trianglelefteq k[x_1, x_2]$



$J = \langle x_1^3, x_1 x_2, x_2^4, x_1^2, x_1 x_2^2 \rangle \trianglelefteq k[x_1, x_2]$



$\Gamma_I = \Gamma_J \Longrightarrow I = J.$

نقاط گوشه‌ای که در شکل هست، مجموعه مولد مینیمال است.

تذکر: فرض کنید I و J دو ایدال تک محله ای در S باشند در این صورت $I \subseteq J \Leftrightarrow \Gamma'(I) \subseteq \Gamma'(J)$

بالاخص $I = J \Leftrightarrow \Gamma'(I) = \Gamma'(J)$.