۲. عملیات جبری روی ایدال‌های تک‌جمله‌ای :

الف : جمع. فرض کنید $I=\langle x^{a(1)},\dots,x^{a(l)}\rangle$, $J=\langle x^{b(1)},\dots,x^{b(r)}\rangle$ دو ایدال تک‌جمله‌ای باشند

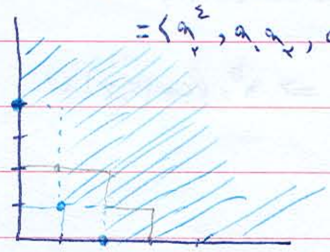
$$I+J=\langle x^{a(1)},\dots,x^{a(l)},x^{b(1)},\dots,x^{b(r)}\rangle \Longrightarrow G(I+J)\subseteq G(I)\cup G(J)$$

تک‌جمله‌ای

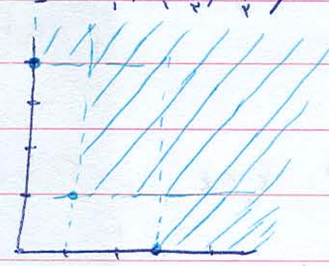
$$\Gamma(I+J)=(a(1)+\mathbb{Z}^n_+)\cup(a(2)+\mathbb{Z}^n_+)\cup\dots\cup(b(1)+\mathbb{Z}^n_+)\cup\dots\cup(b(r)+\mathbb{Z}^n_+)$$
$$=\Gamma(I)\cup\Gamma(J)$$

مثال: $J=\langle x_1^2, x_1x_2^3\rangle$ $I=\langle x_1^3, x_1x_2, x_2^4\rangle$

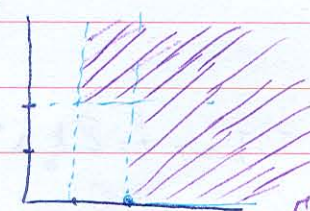
$I+J=\langle x_1^2, x_1x_2^3, x_1^3, x_1x_2, x_2^4\rangle$
$=\langle x_2^4, x_1x_2, x_1^2\rangle$



$\Gamma(I+J)$



$\Gamma(I)$



$\Gamma(J)$

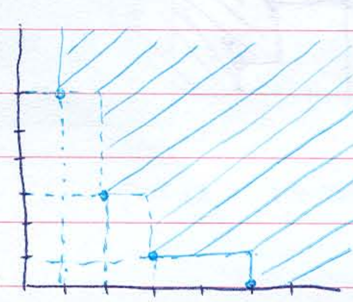
ب : ضرب :

$$IJ=\langle x^{a(i)+b(j)} \mid 1\le i\le l,\ 1\le j\le r\rangle$$

$$G(IJ)\subseteq G(I).G(J)$$

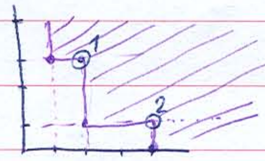
$$IJ\subseteq I\cap J \rightarrow \Gamma(IJ)\subseteq\Gamma(I)$$
$$\subseteq\Gamma(J)$$

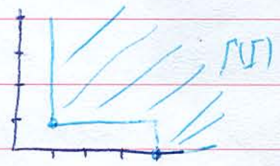
$I=\langle x_1^3, x_1x_2, x_2^4\rangle$ $J=\langle x_1^2, x_1x_2^3\rangle$ $IJ=\langle x_1^5, x_1^4x_2^3, x_1^3x_2, x_1^2x_2^4, x_1^2x_2^4, x_1x_2^7\rangle$
$=\langle x_1x_2^7, x_1^2x_2^4, x_1^3x_2, x_1^5\rangle$



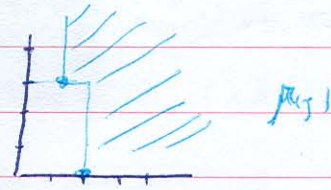
$\Gamma(IJ)$

مثال: $K = \langle x_1x_2^3, x_1^2x_2, x_1^4 \rangle \trianglelefteq k[x_1, x_2]$





حذف(۱)



حذف(۲)

$K = I \cap J = \langle x_1x_2, x_1^4 \rangle \cap \langle x_1x_2^3, x_1^2 \rangle$

تعریف: i) در $\mathbb{Z}_+^n$ رابطه "$\leq$" را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a \leq b \iff a_i \leq b_i \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$$

می‌نویسیم $a < b$ اگر و تنها اگر $a \leq b$, $a \neq b$.

ii) برای هر زیرمجموعه B از تک‌جمله‌ای‌های حلقه $S = k[x_1, \dots, x_n]$ قرار می‌دهیم

$$\Gamma(B) := \{ b \in \mathbb{Z}_+^n \mid x^b \in B \}$$

تمرین ۱: فرض کنید I یک ایدال تک‌جمله‌ای از حلقه $S = k[x_1, \dots, x_n]$ و B یک مجموعه مولد متشکل از تک‌جمله‌ای‌ها برای آن باشد. نشان دهید

$$G(I) = \{ x^a \mid a \in \mathrm{Min}(\Gamma(B)) \}$$

تمرین ۲: فرض کنید I , J دو ایدال تک‌جمله‌ای از حلقه $S = k[x_1, \dots, x_n]$ باشند. نشان دهید که

$$\Gamma(I :_S J) = \bigcap_{x^a \in G(I)} (-a + \Gamma(I))$$

$$\left[(I : J) := \{ f \in S \mid fg \in I \} \right]$$

حل تمرین ۱: $B \subseteq Min(S)$ $\quad I=\langle B\rangle$

$x^b \in B$, $b \notin Min(\Gamma(B)) \Longrightarrow \exists\, a \in \Gamma(B)$, $a<b \Longrightarrow \exists\ 1\le j\le n\ \ a_j<b_j$

$\forall\, 1\le i\ne j\le n\ \ a_i\le b_i$

$\Longrightarrow x^b = x^\gamma x^a \Longrightarrow I=\langle x^a \mid a\in Min(\Gamma(B))\rangle$

$0\ne\gamma=(b_1-a_1,\dots,\underbrace{b_i-a_i}_{\geq 0},\dots,b_n-a_n)$

حل تمرین ۲: $\{x^a \mid a\in Min(\Gamma(I))\}$ مینیمال است.

فرض کنید $a\in Min(\Gamma(B))$ مینیمال نباشد که $x^a\in\langle x^b \mid b\in Min(\Gamma(B)) , b\ne a\rangle$ پس

$\exists\ b\in Min(\Gamma(B))$, $b\ne a$ $\quad x^b \mid x^a \Longrightarrow \exists\,\gamma$, $x^a = x^\gamma x^b = x^{\gamma+b} \Longrightarrow a=\gamma+b$

$\Longrightarrow b\le a \xrightarrow{a\in Min(\Gamma(I))} b=a$ ✗.

∎