تعریف. فرض کنید I و J دو ایدآل در $S=k[x_1,\dots,x_n]$ باشند. در این صورت $I:J$ که ایدآلی از S است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I:J=\{f\in S \mid fg\in I \quad \forall g\in J\}$$

قضیه. فرض کنید I و J دو ایدآل تک جمله‌ای در S باشند. در این صورت $I:J$ نیز ایدآلی تک جمله‌ای است

همچنین
$$I:J=\bigcap_{v\in G(J)} I:\langle v\rangle$$

و $\left\{\frac{u}{\gcd(u,v)} \mid u\in G(I)\right\}$ مجموعه‌ای مولد برای $I:\langle v\rangle$ است.

برهان:

$$f\in I:J \Rightarrow fv\in I \quad \forall v\in G(J)$$

به ۳:

(v حتماً باید تک جمله‌ای باشد)

$$\Rightarrow supp(fv)\subseteq I \quad \forall v\in G(J)$$

$$\Rightarrow supp(f)v\subseteq I \quad \forall v\in G(J) \Rightarrow supp(f)\subseteq I:J$$

قضیه ۱: $I:J$ ایدآل تک جمله‌ای است. واضح است که

$$I:J=\bigcap_{v\in G(J)} I:\langle v\rangle$$

$$\underbrace{x^a\in I:\langle v\rangle}_{\text{دلخواه}} \Rightarrow x^a v\in I=\langle G(I)\rangle \xRightarrow{\text{قضیه}} u_a \mid x^a v \qquad u_a\in G(I)$$

$$\Rightarrow \frac{u_a}{\gcd(u_a,v)} \mid \frac{v}{\gcd(u_a,v)}\, x^a$$

$$\Rightarrow \frac{u_a}{\gcd(u_a,v)} \mid x^a \Rightarrow x^a=\frac{u_a}{\gcd(u_a,v)}\, w_a$$

$$\underbrace{f\in I:\langle v\rangle}_{\text{دلخواه}} \Rightarrow f=\sum_{a\in\mathbb{Z}_+^n}^{\text{متناهی}} k_a x^a \qquad 0\neq k_a\in K$$

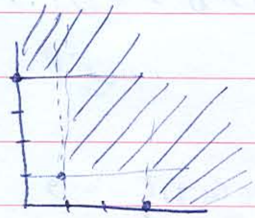
$$=\sum_{a\in\mathbb{Z}_+^n}^{\text{متناهی}} k_a \frac{u_a}{\gcd(u_a,v)}\, w_a=\sum_{u\in G(I)}^{\text{متناهی}} h_u \frac{u}{\gcd(u_a,v)}$$

∎

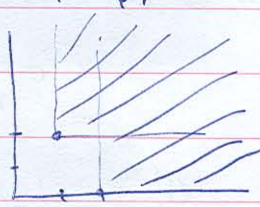
مثال. $I=\langle x_1^3, x_1x_2, x_2^4\rangle$ ، $J=\langle x_1^2, x_1x_2^2\rangle$ در $S=K[x_1,x_2]$

$$I:J=(I:\langle x_1^2\rangle)\cap(I:\langle x_1x_2^2\rangle)=\left\langle \frac{x_1^3}{x_1^2}, \frac{x_1x_2}{x_1}, \frac{x_2^4}{1}\right\rangle\cap\left\langle \underbrace{\frac{x_1^3}{x_1}, \frac{x_1x_2}{x_1x_2}, \frac{x_2^4}{x_2^2}}_{S}\right\rangle$$

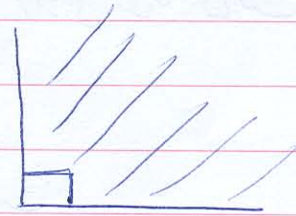
$$=\langle x_1, x_2\rangle$$



I



J



$I:J$

توصیف $\Gamma(I:J)$ در حالت کلی آسان نیست.

توجه: $I\subseteq I:J$ پس در نتیجه $\Gamma(I)\subseteq\Gamma(I:J)$ پس

$$\Gamma(I:J)=\Gamma(I)\cup\underbrace{(\Gamma(I:J)\setminus\Gamma(I))}_{\substack{\text{دارای توصیف آسان}\\ \text{در حالتی که } J=\langle x_1,\dots,x_n\rangle}}$$

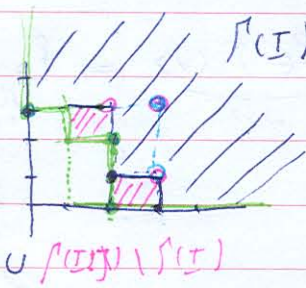
مثال. $I=\langle x_1^3, x_1^2x_2, x_1^3\rangle$ ، $J=\langle x_1, x_2\rangle$ در $S=K[x_1,x_2]$

$$I:J=(I:\langle x_1\rangle)\cap(I:\langle x_2\rangle)=\left\langle \frac{x_1^3}{x_1}, \frac{x_1^2x_2}{x_1}, \frac{x_2^3}{x_1}\right\rangle\cap\left\langle \frac{x_1^3}{1}, \frac{x_1^2x_2}{x_2}, \frac{x_2^3}{x_2}\right\rangle$$

$$=\langle x_1^2, x_1x_2, x_2^2\rangle\cap\langle x_1^2, x_2^2\rangle$$

$$=\langle x_1^2, \cancel{x_1^2x_2^2}, \cancel{x_1^2x_2}, x_1x_2^2, \cancel{x_1^2x_2^3}, x_2^3\rangle$$

$$=\langle x_1^2, x_1x_2^2, x_2^3\rangle$$



$\Gamma(I:J)=\Gamma(I)\cup\Gamma(I:J)\setminus\Gamma(I)$

جلسه سوم

۲ آبان ۸۷
23/oct/2008

تعریف. در حلقه $S=k[x_1,\dots,x_n]$ قرار دهید $\mathfrak{m}=\langle x_1,\dots,x_n\rangle$. برای ایدآل داده شده I از S، اشباع I را که با $\tilde{I}$ نمایش می‌دهند به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{I}=\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} I:\mathfrak{m}^k}_{\text{نمادگذاری } I:\mathfrak{m}^\infty}$$

* اگر $I=\tilde{I}$، می‌گوییم I ایدآل اشباع شده است.

قضیه. اگر I ایدآلی تک جمله‌ای از S باشد آنگاه $\tilde{I}$ نیز ایدآلی تک جمله‌ای است.

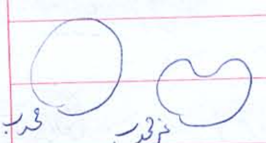
برهان: $I:\mathfrak{m}\subseteq I:\mathfrak{m}^2\subseteq\cdots$ دیکسون

$\exists k;\ I:\mathfrak{m}^k=I:\mathfrak{m}^{k+1}=\cdots$

$$\therefore\ \tilde{I}=\underbrace{I:\mathfrak{m}^k}_{\text{تک جمله‌ای است (قضیه قبل)}}$$

تعریف. زیرمجموعه C از $\mathbb{R}^n$ را محدب گوییم هرگاه برای هر دو نقطه p, q از C، پاره‌خط واصل p, q نیز در C قرار گیرد. معادلاً برای هر $p,q\in C$،

$$\{\lambda p+(1-\lambda)q \mid 0\le\lambda\le1\}\subseteq C.$$



تعریف. فرض کنید $x_1,\dots,x_r\in\mathbb{R}^n$. منظور از یک ترکیب محدب $x_1,\dots,x_r$ مجموعی به صورت زیر است:

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i x_i,\quad \lambda_i\in\mathbb{R},\quad 0\le\lambda_i,\quad \sum\lambda_i=1$$

گزاره: $C\subseteq\mathbb{R}^n$ محدب است $\iff$ هر ترکیب محدب از تعداد متناهی از اعضای C مجدداً عضو C باشد.

برهان: $(\Leftarrow)$: اگر $p,q\in C$ آنگاه $\lambda_1 p+\lambda_2 q\in C$ $(\lambda_1,\lambda_2\ge0,\ \lambda_1+\lambda_2=1)$

$(\Rightarrow)$: اثبات به استقرا روی تعداد متناهی اعضای ترکیب محدب.

فرض کنیم حکم برای ترکیبات محدب با $r-1$ عضو برقرار باشد.

$$x=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i x_i,\quad \lambda_i\ge0,\quad x_i\in C,\quad \sum\lambda_i=1$$

اگر یکی از λ_iها برابر صفر باشد آنگاه این ترکیب، در واقع ترکیبی از $r-1$ عضو است که بنابر فرض استقرا نتیجه می‌دهد $x\in C$.

* پس فرض کنیم برای هر i ، $\lambda_i \neq 0$ و برای هر i ، $\lambda_i \neq 1$.

$$x = \lambda_1 x_1 + \sum_{i=2}^{r} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) \underbrace{\sum_{2}^{r} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} x_i}_{\in C} \in C$$

$\left(\sum \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} = 1 \right.$ ترکیب محدب از $r-1$ عضو $\left. \right)$

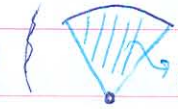
□

تعریف. فرض کنید $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$. پوش محدب A که آن را با $Conv(A)$ نمایش می‌دهند کوچکترین زیر مجموعه محدب از $\mathbb{R}^n$ است که شامل A است.

* تذکر: A داده شده ، $\{C_i\}$ خانواده تمام زیر مجموعه‌های محدب $\mathbb{R}^n$ که شامل A هستند (ناتهی در $\mathbb{R}^n$)

$\underbrace{\bigcap_i C_i}_{Conv(A)} \supseteq A$ محدب

مثال.



گزاره:

$$Conv(A) = \left\{ \sum_1^r \lambda_i x_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0 ,\ \sum \lambda_i = 1 ,\ x_i \in A \right\}$$

گزاره: فرض کنید $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ و $a \in Conv(A\setminus\{a\})$ در این صورت $Conv(A) = Conv(A\setminus\{a\})$.

برهان: $Conv(A\setminus\{a\}) \subseteq Conv(A)$ (با توجه به گزاره قبل).

بالعکس، فرض کنیم $x \in Conv(A)$ ، $x = \sum_1^r \lambda_i x_i$ اگر برای هر i ، $x_i \neq a$ آنگاه برای هر i

$x_i \in A\setminus\{a\}$ پس $\sum_1^r \lambda_i x_i \in Conv(A\setminus\{a\})$ پس فرض کنیم مثلاً $x_1 = a$ ، پس

$$\sum \lambda_i x_i = \lambda_1 a + \sum_2^r \lambda_i x_i$$

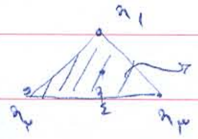
$$= \underbrace{\lambda_1 \Big(\sum_1^s \mu_j \underbrace{y_j}_{\in A\setminus\{a\}}\Big) + \sum_2^r \lambda_i \underbrace{x_i}_{\in A\setminus\{a\}}}_{\text{ترکیب محدب } s+r-1 \text{ عضو}} \qquad \sum_1^s \lambda_1 \mu_j + \sum \lambda_i = \lambda_1 + 1 - \lambda_1 = 1$$

$Conv(A\setminus\{a\})$.

□

تعریف. $P \subseteq \mathbb{R}^n$ را چندگونی محدب (Polytop) گوئیم هرگاه $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$ موجود باشند که $P = \mathrm{Conv}(\{x_1, \dots, x_r\})$

مثال:



تعریف: فرض کنیم $P = \mathrm{Conv}(\{x_1, \dots, x_r\})$ یک چندگونی محدب باشد، a را راس P گوئیم هرگاه $a \notin \mathrm{Conv}(P \setminus \{a\})$.

تمرین. ثابت کنید مجموعه رئوس زیرمجموعه $\{x_1, \dots, x_r\}$ است.

تذکر: در هر چندگونی محدب راس وجود دارد.

$$P = \mathrm{Conv}(\{x_1, \dots, x_r\})$$

اگر x_1 راس نباشد $\Rightarrow x_1 \in \mathrm{Conv}(\{x_2, \dots, x_r\}) \xRightarrow{\text{تمرین}} P = \mathrm{Conv}(\{x_2, \dots, x_r\})$

$$\dots\dots$$

$$\Rightarrow P = \mathrm{Conv}(\{x_r\}). \quad \blacksquare$$