

درس ۱۵

سری هیلبرت و بعد گرویل و حلقه های ایتسکی و انریکس

تعریف: فرض کنید K یک میدان باشد. R رانگ K - جبر n نامیم هرگاه روی R جمع، ضرب، ضرب در اسکالر تعریف شده باشد بطوریکه:۱. $(R, +, 0)$ حلقه جابجایی و یکدسته باشد.۲. $(R, +, 0)$ یک K - فضای برداری باشد.۳. برای هر $\alpha \in R$ و n درجه $\alpha \in K$ ؛ $\alpha(x_j) = (\alpha x_j) = x_j(\alpha y) = x_j(\alpha y)$.مثال: $S = K[x_1, \dots, x_n]$ یک K - جبر است.تعریف: فرض کنید R یک K - جبر باشد. n گوییم R درجه است هرگاه خانواده $\{R_i\}_{i \geq 0}$ از زیر فضاهای R موجود باشد طوری که

$$R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i \quad (\text{عنوان } K\text{-فضا})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_0 = K \\ R_i R_j \subseteq R_{i+j} \quad \forall i, j \geq 0 \end{array} \right.$$

در هر عضو R_i فن x یک عضو همگن n گوییم که درجه ندارد و می توانیم بنویسیم $\deg x = n$.

فرض کنید $S = K[x_1, \dots, x_n]$ عضو P از درج i

می نامیم هرگاه هر عضو از supp دارای درج i باشد.

مثال $P = x_1 x_2 x_3 + \sqrt{x_1^2 x_2 + x_3^3}$ $S = K[x_1, x_2, x_3]$

است و $g = x_1 x_2 x_3 + \sqrt{x_1^2 x_2 + x_3^3}$ همگی i باشد.

- همراه یک جمله ای ها همگی هستند.

فرض کنید $S = K[x_1, \dots, x_n]$ (ک-جبر) و ord درجه

مجموعه تمام اعضای S که همگی از درج i هستند S_i

S_i یک K -زیر فضای S هستند.

$$S = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 = K \\ S_i \cdot S_j \subseteq S_{i+j} \end{array} \right. \quad \forall i, j \geq 0$$

پس S یک K -جبر مدج است.

توجه: S_i پایه S = مجموعه تمام یک جمله ای های موجود در S_i ، بنابراین در حالت

$$S = K[x_1, x_2] \quad \left\{ x_1^i, x_1^{i-1} x_2, x_1^{i-2} x_2^2, \dots, x_1 x_2^{i-1}, x_2^i \right\}$$

$$\dim_{K} S_i = i+1$$

تمرین ثابت کنید در حالت کلی $S = K[x_1, \dots, x_n]$

$$\dim_K S_i = \binom{n-1+i}{i}.$$

تعریف: فرض کنید $R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$ یک K -جبر مرتب باشد. می‌گوییم

R تناسلی مولد است هرگاه اعضای $y_1, \dots, y_n$ در R موجود باشند بطوریکه

$$R = \text{Span} \{ y_1^{a_1} \dots y_n^{a_n} \mid a_i \in \mathbb{Z}, a_i \geq 0 \}.$$

مثال: $\bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i = S = K[x_1, \dots, x_n]$ یک K -جبر تناسلی مولد است.

$\{y_1, \dots, y_n\}$ را دستگاه مولد می‌نامیم.

پس در مثال مذکور $\{x_1, \dots, x_n\}$ دستگاه مولد S است.

تعریف: فرض کنید $R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$ و $R' = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R'_i$ در K -جبر مرتب

باشند اگر برای هر $i \geq 0$ ، $R'_i \subseteq R_i$ ، گوئیم R' زیرجبر R است.

تعریف: فرض کنید $R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$ یک K -جبر مرتب باشد. K -زیرفضای

برداری I از R را یک ایده‌آل مرتب R می‌نامند هرگاه خانواده I از

$\{I_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ از زیرفضاهای I موجود باشد بطوریکه برای هر i

$$I_i \subseteq R_i, \quad I = \bigoplus_{i \in J} I_i, \quad \text{و} \quad I_j \subseteq I, \quad \text{و} \quad I_j \subseteq R_j \quad \text{و} \quad I_j \subseteq I_j$$

مثال: فرض کنید $S = K[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i$ (کجبر مدرج)

I یک ایده آل تک جمله ای از S در نظر بگیرد. در این صورت I یک ایده آل مدرج است

یک K -زیرفضای S است.

$$I_i = I \cap S_i \quad (I_i \subseteq S_i)$$

$$I = \bigoplus_{i \in J} I_i \quad (\text{چرا؟})$$

$$S_i \cap I_j \subseteq I_{i+j} \quad \forall i, j$$

تذکره: مخصوص برای مجتمع بکری ۵. I یک ایده آل مدرج است.

تمرین: K -جبر مدرج $R = \bigoplus_{i \in J} R_i$ را در نظر بگیرد. ثابت کنید زیرفضای I از

R ، ایده آل مدرج R است اگر و تنها اگر برای هر $a_i \in R_i$ ، $a_1 + \dots + a_n \in I$

داشته باشیم $a_i \in I_i$.

تمرین: فرض کنید $R = \bigoplus_{i \in J} R_i$ یک K -جبر مدرج باشد و $z_1, \dots, z_t$

اعضای همگن از R باشد. در این صورت ثابت کنید $\left\{ \sum_{i=1}^t r_i z_i \mid r_i \in R_i \right\}$

یک ایده آل مدرج از R است. این ایده آل را ایده آل تولید شده توسط $z_1, \dots, z_t$ میگویند.

می نامند و با $\{z_1, \dots, z_k\}$ نمایش می دهیم.

تفسیر: بایر هیلبرت: فرض کنید $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ یک k -جبر تنه‌ای مولد

باشند و I ایده‌آل مدول از R در این صورت اعضای همگن $z_1, \dots, z_k \in R$

موجودند که $I = \langle z_1, \dots, z_k \rangle$.

برهان: فرض (راحتی: اثبات قضیه بایر هیلبرت درجه‌بندی‌شده را می‌خواند)

تقریب: فرض کنید $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ یک k -جبر مدول و $I = \bigoplus_{i \geq 0} I_i$ یک ایده‌آل

مدول از آن باشد در این صورت $\bigoplus_{i \geq 0} R_i / I_i$ یک k -فضای برداری است.

می‌خواهیم یک ضرب روی $\bigoplus_{i \geq 0} R_i / I_i$ تعریف کنیم. برای این منظور کافیست

ضرب یک عضو از R_i / I_i را در یک عضو R_j / I_j تعریف کنیم:

$$p + I_i \in R_i / I_i, \quad q + I_j \in R_j / I_j$$

$$(p + I_i)(q + I_j) = pq + I_{i+j}$$

راحتی دیده می‌شود که این ضرب خوش‌تعریف است، $\bigoplus_{i \geq 0} R_i / I_i$ را به یک

k -جبر مدول تبدیل می‌کنند. این k -جبر مدول را با R/I نمایش می‌دهند

$$R/I = \bigoplus_{i \geq 0} \frac{R_i}{I_i} = \frac{R}{I} = \left(\frac{R}{I} \right)_i$$

تذکره: برای جمع ساری داده شده $K[\Delta] = \frac{S}{I_\Delta}$ یک K -جبر صریح

خارج قسقی است.

تمرین: اگر $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ یک K -جبر صریح متناهی مولد باشد و I ایده آل

صریح دلخواه، ثابت کنید R/I یک K -جبر متناهی مولد است.

تقریب: فرض کنید $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ یک K -جبر متناهی مولد باشد تابع

$$\left\{ \begin{array}{l} H(R, -) : \omega \longrightarrow \omega \\ H(R, i) = \dim_K R_i \end{array} \right.$$

تابع هیلبرت R می نامند. تابع مولد $H(R, i)$ دارای هیلبرت راسته

R می نامند

$$H_R(t) = \sum_{i=0}^{\infty} H(R, i) t^i.$$

نشان: $S = K[x_1, x_2] = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ (K -جبر صریح)

$$H(S, i) = \dim_K S_i = \binom{2-1+i}{i} = \binom{i+1}{i} = i+1.$$

$$H_S(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) t^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dt} t^{i+1}$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{\infty} t^{i+1} = \frac{d}{dt} \frac{t}{1-t} = \frac{1}{1-t^2}$$

تمرین: آیا می‌توانید $H_5(t)$ را در حالت کلی پیدا نمود؟ آیا تساوی

$$H(t) = \frac{1}{(1-t)^n} \quad \text{برقرار است؟}$$

$$(S = K[x_1, \dots, x_n])$$

این هم درسی شغرد به نظم اشکال و اختلافی موجود است.
 لم: فرض کنید $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ یک K -جبر مرتب باشد. R_i ها R ها باشند و $R_i \in R_i$ $\neq 0$ ؟

(1) فرض کنید ویژگی‌های زیر برقرار باشند

$$P \cdot J = 0 \Rightarrow J = 0$$

$$J \in R$$

و فرض کنید $R/\langle P \rangle$ K -جبر خارج قسمتی باشد. در این صورت

$$H(t) = \frac{H_R(t)}{1-t}$$

$$R/\langle P \rangle$$

برحالی: فرض کنید $I = \langle P \rangle = \bigoplus_{i \geq 0} I_i$ برای n دلخواه داده شده

$$0 \longrightarrow I_n \hookrightarrow R_n \longrightarrow \frac{R_n}{I_n} \longrightarrow 0$$

یک دنباله دقیق کوتاه از K -همرینجی‌ها است.

$$\xrightarrow{\text{در جبر دقیق داریم}} \dim_K R_n = \dim_K I_n + \dim_K \frac{R_n}{I_n}$$

$$*$$

راحتی دیده می‌شود $I_n \subseteq R_{n-1}$ زیرا

$$\left. \begin{array}{l} T: R_{n-1} \longrightarrow I_n \end{array} \right\}$$

$$T(x) = x^p$$

$$\dim_K I_n = \dim_K R_{n,i} = H(R, n-i)$$

$$\xrightarrow{*} H(R, n) = H(R, n-i) + H(R_{\langle P \rangle}, n)$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} t^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} H(R, n) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} H(R, n-i) t^n + \sum_{n=0}^{\infty} H(R_{\langle P \rangle}, n) t^n$$

$$\Rightarrow H_R(t) = t^i H_R(t) + H_{R_{\langle P \rangle}}(t)$$

$$\Rightarrow H_R(t) = H_{R_{\langle P \rangle}}(t) / (1 - t^i) \quad ?$$

تمرین: $S = K[x_1, x_2]$ و $I = \langle x_1, x_2^3 \rangle$ در این صورت مقدار

$$H_{S/I}(t) \text{ را بیابید.}$$

پیدا کردن:

تعریف: فرض کنید $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ یک K -جبر مرتب باشد. R ی-گوسه

استاندارد است اگر R با تعدادی تنه‌ای عضوگین از درج 1 تولید شود.

مثال: $S = K[x_1, \dots, x_n]$ یک K -جبر مرتب استاندارد است.

تعمیم: فرض کنید $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ یک K -جبر مرتب استاندارد

باشد در این صورت تعدادی تنه‌ای عضوگین از درج 1 مثل $0, \dots, 0, \theta$ موجود

است بطوریکه:

1. $0, \dots, 0, \theta$ بطور جری روی K مستقل باشند. یعنی

$$P = P(x_1, \dots, x_d) \in K[x_1, \dots, x_d] \text{ \& } [1, \theta_1, \dots, \theta_d] = 0 \Rightarrow P = 0$$

2. تعدادی تناسلی عضو همگن مثل $\eta_1, \dots, \eta_t$ موجود باشند بطوریکه برای هر $x \in R$

$$x = \sum_{i=1}^t \eta_i P_i(\theta_1, \dots, \theta_d)$$

که در آن $P_i \in K[x_1, \dots, x_d]$ یک چندجمله‌ای است که به x وابسته می‌باشند.

تکرار d در قضیه قبل منجر می‌شود است.

d رابعه گوی K - جبر درج R می‌باشد و می‌توانیم

$$\dim R = d$$

$\theta_1, \dots, \theta_d$ یک دستگاه پایه برای R نامیده می‌شود.

دستگاه پایه برای $\theta_1, \dots, \theta_d$ را می‌توانیم نامیده دستگاه خاصیت (۲) در قضیه قبل می‌باشد.

$$x = \sum_{i=1}^t \eta_i P_i(\theta_1, \dots, \theta_d) = \sum_{i=1}^t \eta_i P_i(\theta_1, \dots, \theta_d)$$

نوشتار به معنوم از η_i یکانه است

$$\Rightarrow P_i(\theta_1, \dots, \theta_d) = \eta_i(\theta_1, \dots, \theta_d) \quad \forall i$$

قرینه: K - جبر درج $R = \bigoplus_{i=0}^d R_i$ را کوهن - مکابی می‌نامند که

R دارای یک دستگاه پایه برای $\theta_1, \dots, \theta_d$ باشد (توجه: می‌توان نشان داد که در این صورت تمام دستگاهی پایه برای $\theta_1, \dots, \theta_d$ هستند).

مثال (K-جبر مربع استاندارد) $\bigoplus_{i \geq 0} S_i = S = K[x_1, x_2, x_3]$

و قرار دهیم $I_2 = \langle x_1, x_2, x_1 x_3 \rangle$ و $I_1 = \langle x_1, x_2, x_3, x_1^3 \rangle$

سپا برای داریم: $R_2 = S/I_2 = \bar{x}_2$, $R_1 = S/I_1 = \bar{x}_1$

برای حلقه R_1 : $\theta_1 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$

این حلقه ناتمام است و R' کومن-مکالی

$\dim R_1 = 1$

برای حلقه R_2 :

$\theta_1 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, $\theta_2 = \bar{x}_3$

این حلقه ناتمام است و

$\eta_1 = 1$, $\eta_2 = \bar{x}_1$

R' کومن-مکالی نمی باشد.

$\dim R_2 = 2$