Teacher: Dr. M.R. Pournaki
A Course on Combinatorial Commutative Algebra, IPM
Az*ar 3*, 1390
Writer: *Fatemeh Soheilnia*

درس 5.

تکنیک اثبات جبری: krustal_katona

تعریف: فرض کنید Δ یک مجتمع سادکی $(d-1)$ بعدی روی $[n]$ باشد $2<d<n$.

برای $F \in \Delta$ تعریف می‌کنیم:

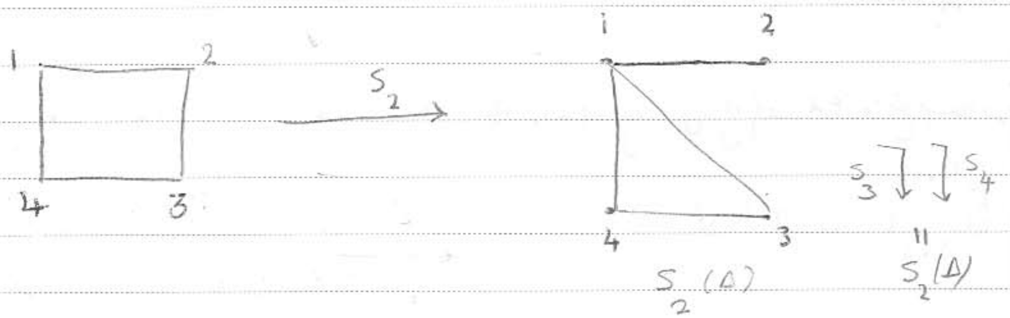
$$S_j(F) = \begin{cases} (F \setminus \{j\}) \cup \{1\} & j \in F ,\ 1 \notin F ,\ (F\setminus\{j\})\cup\{1\} \\ F & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

قرار دهید

$$S_j(\Delta) = \{ S_j(F) \mid F \in \Delta \}$$

به $S_j(\Delta)$، j-انتقال یافته Δ می‌گویند.

$$\Delta \xrightarrow[\text{عملگر } j\text{-انتقال گسترده}]{S_j} S_j(\Delta)$$



در واقع با 2-انتقال یافته Δ بر روی شکل حاصله انتقال یافته عملگرهای S_3 و S_4 بدون تأثیر است.

مثال:

$$\Delta = \langle 123, 145, 167, 246, 257, 347, 356 \rangle .$$

$$\downarrow S_2$$

$$S_2(\Delta) = \langle 123, 145, 167, 146, 157, 347, 356 \rangle$$

$$\downarrow S_3$$

$$S_3(S_2(\Delta)) = \langle 123, 145, 167, 146, 157, 147, 156 \rangle$$

$$\downarrow S_j$$

$$= S_3(S_2(\Delta)).$$

تمرین. ثابت کنید برای مجتمع سادکی داده شده روی Δ، $S_j(\Delta)$ $(2 \le j \le n)$ یک مجتمع سادکی است.

(Ian Anderson, Combinatorics of Finite sets, lemma 7.3.2)
(Library IPM)

توضیح داریم

$$f_i(S_j(\Delta)) \ \boxed{\overset{?}{=}}\ \text{or}\ \boxed{\le}\ f_i(\Delta) \qquad *$$

تعریف: مجتمع سادکی Δ را منتقل شده می‌نامند هرگاه برای هر j،

$$S_j(\Delta) = \Delta.$$

تذکر، واضح است که هر مجتمع سادکی را می‌توان با اثر دادن عملگر S_j به ازای jهای مختلف (پس از تعداد متناهی مرحله) به یک مجتمع سادکی منتقل شده تبدیل کرد.

مجتمع سادکی منتقل شده دارای وجه‌های زیادی (نسبت به اولیه) است که 1 دارد.

گزاره: فرض کنید Δ یک مجتمع سادکی $(d-1)$ بعدی روی $[n]$ باشد. قرار دهید

$$\Delta_1 = \langle F\setminus\{1\} \mid 1\in F\in\Delta ,\ \dim F = i+1 \rangle .$$

$$1\leq i\leq d-1$$

در این صورت

$$f_i(\Delta)\geq f_i(\Delta_1)+f_{i-1}(\Delta_1).$$

اثبات:

$$\underbrace{G\in\Delta_1 ,\ \dim G = i}_{\text{دلخواه}}$$

$\Rightarrow G\subseteq F\setminus\{1\}$ $1\in F$ بطوریکه $F\in\Delta$ برای یک

Face

$$G\in\Delta ,\ \dim G = i$$

$$G\in\Delta ,\ \dim G = i-1$$

$\Rightarrow G\subseteq F\setminus\{1\}$ $1\in F$ که $F\in\Delta$ برای یک

$$\Rightarrow G\cup\{1\}\subseteq F\in\Delta .$$

$G\cup\{1\}$ یک وجه i-بعدی برای Δ است. درنتیجه

$$f_i(\Delta)\geq f_i(\Delta_1)+f_{i-1}(\Delta_1).$$

i بعدی های Δ که I را ندارند	$\subseteq$	تمام i بعدی های روی Δ_1
i بعدی های Δ که I را دارند	$\subseteq$	تمام $i-1$ بعدی های روی Δ_1

ایده اثبات !

برای اثبات اینست گزاره زیر اثبات شود (چرا؟)

گزاره: اگر Δ یک مجتمع ساده‌ای منقبض شده روی ($d-1$ بعدی)

$$P_{i+1} = \binom{n_{i+2}}{i+2} + \binom{n_{i+3}}{i+3} + \cdots + \binom{n_d}{d}$$

آن‌گاه

$$\binom{n_{i+2}}{i+1} + \cdots + \binom{n_d}{d-1} \leq P_i$$

گزاره مذکور اگر برای منقبض شده ها اثبات شود آن گاه در حالت کلی نیز برقرار است

چرا؟ (برای پاسخ گویی به * توجه شود.)

گزاره مذکور در اثبات اصل قضیه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تمرین.

$$f_i(\Delta_1) \leq \binom{n_{i+2}-1}{i+1} + \cdots + \binom{n_j-1}{j-1}$$

به تناقض منجر می‌شود.

از تمرین به این نتیجه می‌رسیم که:

$$f_i(\Delta_1) \geq \binom{n_{i+2}-1}{i+1} + \cdots + \binom{n_j-1}{j-1}$$

$$f_{i-1}(\Delta_1) \geq \binom{n_{i+2}-1}{i} + \cdots + \binom{n_j-1}{j-2}$$

$$f_i(\Delta_1) \geq f_i(\Delta_1) + f_{i+1}(\Delta_1)$$

$$\geq \left[\binom{n_{i+2}-1}{i+1} + \binom{n_{i+2}-1}{i}\right] + \cdots + \left[\binom{n_j-1}{j} + \binom{n_j-1}{j-2}\right]$$

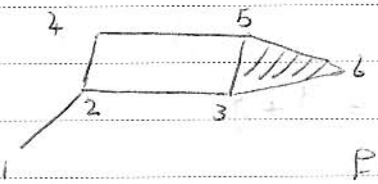
$$= \binom{n_{i+2}-1}{i+1} + \cdots + \binom{n_j}{j-1}$$

تعریف: فرض کنید Δ یک مجتمع سادکی $(d-1)$ بعدی روی $[n]$ باشد. ج $(d+1)$ تایی مرتب $h(\Delta)=(h_0,h_1,\dots,h_d)$ ، h-بردار Δ می‌گویند که در آن $h_i=h_i(\Delta)$ از تساوی زیر بدست می‌آید:

$$\sum_{i=0}^{d} f_{i-1}\,(u-1)^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} h_i\, u^{d-i}.$$

مثال:

Δ:



$\dim \Delta = 2 = \underbrace{3-1}$

$f(\Delta) = (6,7,1)$

$h(\Delta) = (h_0, h_1, h_2, h_3)$

$$\sum_{i=0}^{3} f_{i-1}\,(u-1)^{3-i} = \sum_{i=0}^{3} h_i\, u^{3-i}$$

$$\Rightarrow (u-1)^3 + 6(u-1)^3 + 7(u-1) + 1(u-1)^0$$

$$= x^3 + 3u^2 - 3u - 1 = \sum_{i=0}^{3} h_i\, u^{3-i}$$

$$\Rightarrow \quad h(\Delta) = (1, 3, -2, -1).$$

تمرین : ثابت کنید

$$\sum_{i=0}^{d} h_i u^i = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1} u^i (1-u)^{d-i}$$

در تمرین قبل طرفین را در $(1-u)^d$ تقسیم کنید بنابراین

$$\sum_{i=0}^{d} h_i \frac{u^i}{(1-u)^d} \frac{1}{(1-u)^{d-i}} = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1} \frac{u^i}{(1-u)^i}$$

$$\text{Set: } \frac{u}{1-u} = y \Rightarrow \frac{1}{1-u} = 1+y$$

$$\Rightarrow \sum h_i y^i (1+y)^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1} y^i$$

با در نظر گرفتن ضریب y^i در طرفین

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad f_{i-1} = \sum_{j=0}^{i} \binom{d-j}{i-j} h_j .$$

نوشته شود

upper bond chain.

حدس کران بالا چه بوده است؟ (UBC)

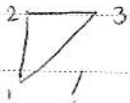
کرهٔ $(d-1)$ بعدی در R^n و S^{d-1}

$$=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+\dots+x_d^2=1,\ x_{d+1}=\dots\}$$

تعریف: مجتمع سادکی $(d-1)$ بعدی Δ را یک کرهٔ سادکی $(d-1)$ بعدی

می‌نامند هرگاه حقیقی سازی $\Delta \cong S^{d-1}$

یکریخت



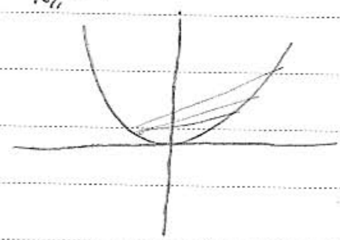
$\cong S^1$ O

کرهٔ سادکی ۱ بعدی

فرض کنید $M_d=\{(t,t^2,\dots,t^d) \mid t\in\mathbb{R}\}$ یک خم در $\mathbb{R}^d$ باشد. فرض کنید

$d_1,\dots,d_n$ ، n نقطهٔ متمایز روی M_d باشند.

$n\geq d+1$



ادعا می‌کنیم $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ مستقل خطی هستند. لذا

$C(n,d) = \mathrm{Conv}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ یک سادک باشد.

حدس کران بالا. فرض کنید Δ یک کرهٔ سادکی $(d-1)$-بعدی روی n رأس باشد

در این صورت $h_i(\Delta) \leq h_i(C(n,d))$.