جلسه ۷

فرض کنید K یک میدان باشد $S=K[x_1,\dots,x_n]$ در این صورت هر ایده‌آل I از S بصورت زیر است

$$I=\langle x^{\alpha(1)},\dots,x^{\alpha(l)}\rangle$$

مشاهده داریم

$$\{b\in\omega^n \mid \omega^b\in I\}=\bigcup_{i=1}^{l}(\alpha(i)+\omega^n)=:\Gamma(I)$$

توان یک جمله‌ای که در I قرار دارد.

گزاره: فرض کنید $I=\langle x^{\alpha(1)},\dots,x^{\alpha(l)}\rangle$ یک ایده‌آل تک جمله‌ای باشد و $f\in S$ در این صورت

$$f\in I \Longleftrightarrow supp(f)\subseteq I$$

$$\overset{*}{\underset{(1)}{\Longleftrightarrow}} \{b\in x^b \mid x^b\in supp(f)\}\subseteq\Gamma(I)$$

برهان: $*$ واضح است

کافیست سمت $\Longrightarrow$ اثبات شود.

$$f\in I \Longrightarrow f=\sum_{i=1}^{l} f_i x^{\alpha(i)} \quad \text{where } f_i\in S \quad 1\le i\le l.$$

$$f_i=\sum_{\alpha\in\omega^n} k_\alpha^i x^\alpha \quad ; \quad k_\alpha\in K$$

$$f = \sum_{i=1}^{t} \left(\sum_{\alpha \in \omega^n} k_\alpha^i \, x^\alpha \right) x^{\alpha(i)}$$

$$= \sum_{\text{متناهی}} k_\alpha^i \, x^{\alpha+\alpha(i)} .$$

در نتیجه

$$\mathrm{supp}(f) \subseteq \{ x^{\alpha+\alpha(i)} \mid \alpha \in \omega^n ,\ 1 \le i \le t \} \subseteq I$$

تذکر: خاصیت " $\Leftarrow$ " دو گزاره فوق، ایده‌آل تک‌جمله‌ای را کاملاً مشخص می‌کند

زیرا اگر $I \trianglelefteq S$ دارای این ویژگی باشد که برای هر $f \in S$

$f \in I \Longrightarrow \mathrm{supp}(f) \subseteq I$ (آنگاه I یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای می‌شود)

آنگاه I ایده‌آل تک‌جمله‌ای است.

$I \trianglelefteq S \xrightarrow{\text{نوتری}} I = \langle f_1, \dots, f_t \rangle \quad f_i \in S,\ 1 \le i \le t$

$\xrightarrow[1 \le i \le t]{f_i \in I} I = \langle u \mid u \in \mathrm{supp}(f_i),\ 1 \le i \le t \rangle =$

ایده‌آل تک‌جمله‌ای.

تذکر: اگر I یک ایده‌آل در S باشد، آن‌گاه I یک K-زیرفضای S است.

علاوه اگر I ایده‌آل تک‌جمله‌ای باشد آن‌گاه $B_I = \{ x^b \mid x^b \in I \}$ یک

پایه برای I می‌باشد.

آیا B_I را بصورت تک‌جمله‌ای می‌توان نوشت؟

مشکل خطی است زیرا

مشکل جمعی است (Mod)

نتیجه: اگر I و J دو ایده‌آل تک جمله‌ای روی S باشند آن‌گاه

$$I=J \underset{*}{\iff} B_I = B_J \underset{**}{\iff} \Gamma(I)=\Gamma(J)$$

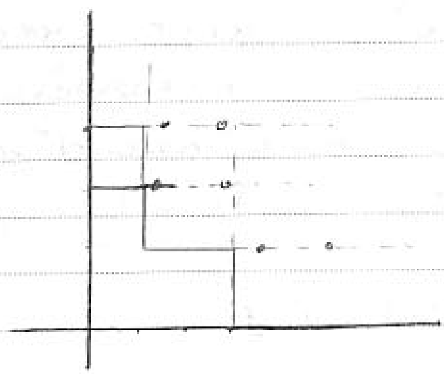
** بدیهی است درحقیقت * $\Leftarrow$ بدیهی است.

مثال حلقه‌ی $S=K[x_1,x_2]$ و ایده‌آل

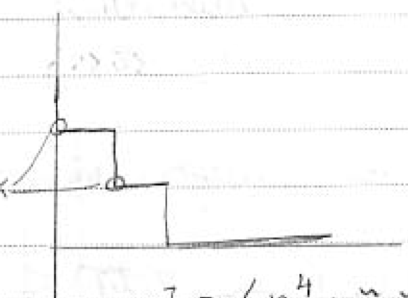
$$I=\langle x_1^3, x_1x_2, x_2^4, x_2^3, x_1x_2^3\rangle$$

را در نظر بگیرید

$\Gamma(I)$



$\Gamma(J)$



مولدهای مینیمال است

$$J=\langle x_1^4, x_1x_2, x_1^2\rangle$$

$$\Gamma(I)=\Gamma(J) \implies I=J$$

رسم شکل شبکه I خود I را برای ما مشخص می‌کند.

عملیات جبری روی ایده‌آل‌های تک جمله‌ای

فرض کنید I و J دو ایده‌آل تک جمله‌ای در $S = K[x_1, \dots, x_n]$ باشند

$$I = \langle \underbrace{G(I)}_{\text{تک جمله‌ای مینیمال}} \rangle = \langle x^{\alpha(1)}, \dots, x^{\alpha(r)} \rangle$$

$$J = \langle G(J) \rangle = \langle x^{\alpha(1)}, \dots, x^{\alpha(s)} \rangle$$

الف) جمع دو ایده‌آل تک جمله‌ای

$$I + J = \langle x^{\alpha(i)}, x^{\alpha(j)} \mid 1 \leq i \leq r, \ 1 \leq j \leq s \rangle$$

حاصل جمع دو ایده‌آل تک جمله‌ای، تک جمله‌ای است.

$$G(I+J) \subseteq G(I) \cup G(J).$$

$$\text{و هم } \Gamma(I+J) = \Gamma(I) \cup \Gamma(J)$$

ب) ضرب دو ایده‌آل تک جمله‌ای

$$IJ = \langle x^{\alpha(i) + \alpha(j)} \mid 1 \leq i \leq r, \ 1 \leq j \leq s \rangle$$

حاصلضرب دو ایده‌آل تک جمله‌ای، تک جمله‌ای است.

$$IJ \subseteq I \ \& \ IJ \subseteq J \Rightarrow \Gamma(IJ) \subseteq \Gamma(I)$$

$$\Gamma(IJ) \subseteq \Gamma(J)$$

$$\Rightarrow \Gamma(IJ) \subseteq \Gamma(I) \cap \Gamma(J).$$

ج) اشتراک دو ایده‌آل تک‌جمله‌ای

$$I \cap J = \langle \operatorname{lcm}(x^{\alpha(i)}, x^{\alpha(j)}) \mid 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s \rangle$$

$$\langle x^{\alpha(i)} \rangle \cap \langle x^{\alpha(j)} \rangle = \langle \operatorname{lcm}(x^{\alpha(i)}, x^{\alpha(j)}) \rangle$$

در حالت کلی چرا برای هر ایده‌آل $I\ J\ L \trianglelefteq S$

از هر حلقه دلخواه

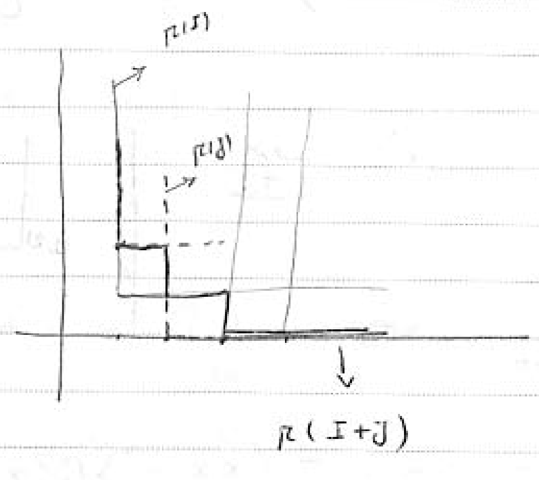
$$(I+J) \cap L \supseteq (I \cap L) + (J \cap L)$$

اگر I و J و L ایده‌آل های مونومیال باشند آن‌گاه شمول به تساوی

تبدیل می‌شود. این روند را از طریق قضیه قبل نیز می‌توان اثبات کرد. ?

مثال: $S = K[x_1, x_2]$ و $I = \langle x_1^3, x_1x_2, x_2^4 \rangle$ و $J = \langle x_1^2, x_1x_2^2 \rangle$

$$I+J = \langle x_1^3, x_1x_2, x_2^4, x_1x_2^2, x_1^2 \rangle$$



$$IJ = \langle x_1^5, x_1^4x_2^2, x_1^3x_2, x_1^2x_2^3, x_1^2x_2^4, x_1x_2^6\rangle$$

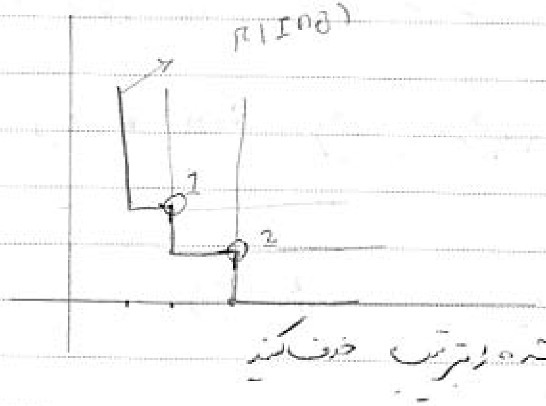
$$= \langle x_1^5, x_1^3x_2, x_1^2x_2^3, x_1x_2^6\rangle$$

$$I\cap J = \langle x_1^3, x_1^3x_2^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1^2x_2^4, x_1x_2^4\rangle$$

$$= \langle x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2\rangle$$

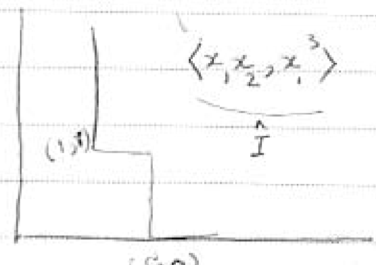
$$\langle x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2\rangle = \underbrace{I\cap J}_{\text{تا همه تجزیه شکل}}$$

$r(I\cap J)$



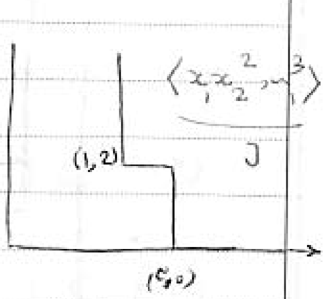
حال کنج های مشخص شده را به ترتیب حذف کنید

$\xrightarrow[1]{\text{حذف}}$



$\underbrace{\langle x_1x_2, x_1^3\rangle}_{\hat{I}}$

$\xrightarrow[2]{\text{حذف}}$



$\underbrace{\langle x_1x_2^2, x_1^3\rangle}_{J}$

$$\xrightarrow{?} \langle x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2\rangle = \langle x_1x_2, x_1^3\rangle \cap \langle x_1x_2^2, x_1^3\rangle$$

بررسی شود که چرا روند بیان شده در اشکال ارائه شده درست است ؟

بررسی چگونگی محاسبه:

$$\hat{I} \cap J = \langle x_1x_2^2 , x_1^2x_2 , x_1^3x_2^2 , x_1^3 \rangle$$

$$= \langle x_1^3 , x_1^2x_2 , x_1x_2^2 \rangle .$$

تمرین: ایده‌آل $I = \langle x_1x_2^3 , x_1^2x_2 , x_1^4 \rangle$ از $S = K[x_1 , x_2]$

را به صورت اشتراک دو ایده‌آل بنویسید.

(د) $(I : J)$

$$I : J = \{ f \in S \mid fJ \subseteq I \}$$

$$= \{ f \in S \mid fg \in I , \ \forall g \in J \}$$

به راحتی دیده می‌شود که $I : J \trianglelefteq S$. $\Rightarrow$

قضیه: فرض کنید I و J دو ایده‌آل تک‌جمله‌ای از $S = K[x_1 , \dots , x_n]$

باشند. در این صورت $I : J$ نیز ایده‌آل تک‌جمله‌ای است.

$$I : J = \bigcap_{v \in G(J)} I : \langle v \rangle$$

علاوه $I : \langle v \rangle$ برای هر $v \in G(J)$ مجموعه مولد به صورت

زیر می باشد

$$\left\{ \frac{u}{\gcd(u,v)} \mid u \in G(I) \right\}$$

برهان : برای اثبات اینکه $I:J$ یک ایده‌آل تک جمله‌ای است ، ثابت می کنیم

که برای هر $f \in S$:

$$f \in I:J \Longrightarrow supp(f) \subseteq I:J \qquad *$$

$$\underbrace{u \in supp(f)}_{\text{دلخواه}} \Longrightarrow f = \dots + a_u u + \dots \qquad 0 \neq a_u \in K$$

فرض کنید $v \in G(J)$ دلخواه باشد و آن را ثابت کنید، داریم:

$$fv = \dots + \underbrace{a_u}_{\neq 0} \overbrace{uv}^{\text{تک جمله‌ای}} + \dots$$

$$uv \in supp(f_v) \Longrightarrow f \in I:J \Rightarrow fv \in I$$

$$\Longrightarrow supp(fv) \subseteq I \qquad \text{طبق فرضیه}$$

$$\Longrightarrow uv \in I.$$

درنتیجه $u \in I:J$ لذا * اثبات می شود پس $I:J$ ایده‌آل تک جمله‌ای

است . واضح است $I:J = \bigcap_{v \in G(J)} I : \langle v \rangle$

حل: نشان می‌دهیم که برای $I:\langle v\rangle$ ، $v\in G(I)$ ، مولدها به صورت داده شده دارد

$$\underbrace{x^a\in I:\langle v\rangle}_{\text{دلخواه}} \Longrightarrow v\,x^a\in I$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم}} u_a \mid v\,x^a \quad (u_a\in G(I))$$

$$\Longrightarrow \frac{u_a}{\gcd(u_a,v)} \;\Big|\; \frac{v}{\gcd(u_a,v)}\,x^a$$

$$\Longrightarrow \frac{u_a}{\gcd(u_a,v)} \;\Big|\; x^a$$

$$\Longrightarrow x^a=\underbrace{w_a}_{\text{یک جمله ای}}\,\frac{u_a}{\gcd(u_a,v)}$$

$$\underbrace{f\in I:\langle v\rangle}_{\text{دلخواه}} \quad , \quad f=\underset{\text{متناهی}}{\sum_{a\in\omega^n}} k_a x^a \qquad ; k_a\in K$$

$$x^a\in I:\langle v\rangle \longrightarrow f=\underset{\text{متناهی}}{\sum_{a\in\omega^n}} \overset{\in K}{k_a}\,\frac{u_a}{\gcd(u_a,v)}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{supp}(f)\subseteq I:\langle v\rangle$$

f قابل نمایش برحسب اعضای مجموعه داده شده است.