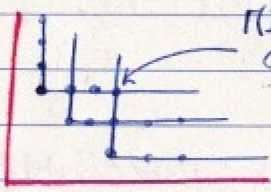
Teacher: Dr. M.R. Pournaki
A Course on Combinatorial Commutative Algebra, IPM
*Dey 1*, 1390
Writer: *Saba Aliyari*

**جلسه ۲ ام**

فرض کنید $k$ یک میدان باشد $S=k[x_1,\dots,x_n]$ در این صورت هر ایده‌آل یک جمله‌ای $I$ از $S$ به صورت زیر است:

$I=\langle x^{a(1)},\dots,x^{a(l)}\rangle$ ← ایده‌آل جمله‌ای: $\Gamma(I)=\bigcup_{i=1}^{l}(a(i)+\omega^n)=\{b\in\omega^n \mid x^b\in I\}$



$\Gamma(I)$ از آن یک جمله‌ای هایی که در $I$ قرار دارند

**گزاره:** فرض کنید $I=\langle x^{a(1)},\dots,x^{a(l)}\rangle$ یک ایده‌آل یک جمله‌ای در $S$ باشد و $f\in S$ در این صورت

$$f\in I \overset{①}{\Longleftrightarrow} \mathrm{supp}(f)\subseteq I \overset{*}{\Longleftrightarrow} \{b\in\omega^n \mid x^b\in \mathrm{supp}(f)\}\subseteq \Gamma(I)$$

**برهان:** $*$ واضح است. □

$\overset{①}{\Rightarrow}$: $f\in I \Rightarrow f=\sum_{i=1}^{l} f_i x^{a(i)}$ که در آن $f_i\in S$، $1\leq i\leq l$

$$f_i=\sum_{\substack{\alpha\in\omega^n\\ \text{متناهی}}} k^i_\alpha x^\alpha \quad (k_\alpha\in K),\ 1\leq i\leq l$$

$$f=\sum_{i=1}^{l}\Big(\sum_{\substack{\alpha\in\omega^n\\ \text{متناهی}}} k^i_\alpha x^\alpha\Big)x^{a(i)}=\sum_{\text{متناهی}} k^i_\alpha x^{\alpha+a(i)}$$

در نتیجه $\mathrm{supp}(f)\subseteq\{x^{\alpha+a(i)} \mid \alpha\in\omega^n,\ 1\leq i\leq l\}\subseteq I$ □

**تذکر:** خاصیت $\overset{①}{\Rightarrow}$ در گزاره قبل، ایده‌آل‌های یک جمله‌ای را کاملاً مشخص می‌کند، یعنی اگر $I\lhd S$، در این صورت اگر برای هر $f\in S$: $f\in I\Rightarrow \mathrm{supp}(f)\subseteq I$ آنگاه $I$ ایده‌آل یک جمله‌ای است. دلیل ↓

$$I\lhd S \xrightarrow{S\ \text{نوتری}} I=\langle f_1,\dots,f_t\rangle \quad \begin{pmatrix} f_i\in S\\ 1\leq i\leq t\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{1\leq i\leq t\\ \mathrm{supp}(f_i)\subseteq I}]{f_i\in I} I=\langle u \mid u\in\mathrm{supp}(f_i),\ 1\leq i\leq t\rangle=\text{ایده‌آل یک جمله‌ای}$$ □

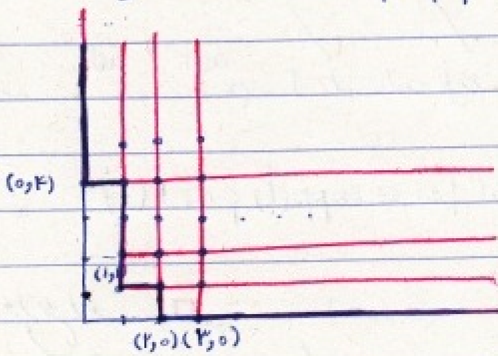
تذکر: اگر I یک ایده‌آل از S باشد، آنگاه I یک K-زیرفضای S می‌باشد. به علاوه اگر I ایده‌آل یک جمله‌ای باشد آنگاه $B_I=\{x^b \mid x^b\in I\}$ یک پایه برای I می‌باشد. □

نتیجه: اگر I و J دو ایده‌آل یک جمله‌ای در S باشند آنگاه

$$I=J \underset{(\text{بدیهی})\,\otimes}{\overset{(\text{بدیهی})\,①}{\Longleftrightarrow}} B_I=B_J \overset{(\text{بدیهی})\,\circledast}{\Longleftrightarrow} \Gamma(I)=\Gamma(J)$$

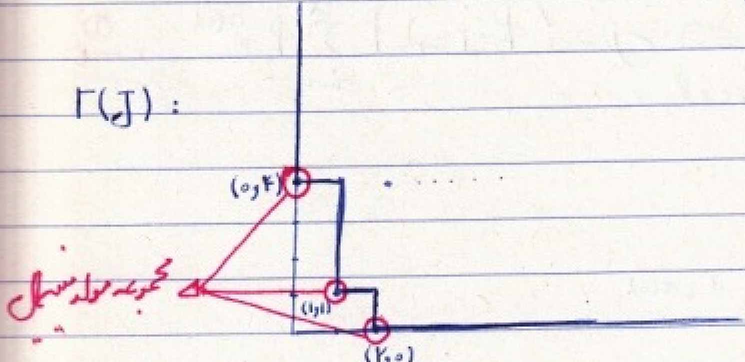
مثال: حلقه‌ی $S=K[x_1,x_2]$ و ایده‌آل $I=\langle x_1^3, x_1x_2, x_2^4, x_1^2, x_1x_2^2\rangle$ از S را در نظر بگیرید.

$\Gamma(I)$:




$\rightarrow \Gamma(I)=\Gamma(J) \Rightarrow I=J$

$\Gamma(J)$:




$J=\langle x_2^4, x_1x_2, x_1^2\rangle$

عملیات جبری روی ایده‌آل‌های یک جمله‌ای:

فرض کنید I و J دو ایده‌آل یک جمله‌ای در $S=K[x_1,\dots,x_n]$ باشند.

$$I=\langle \underbrace{G(I)} \rangle=\langle \underbrace{x^{a(1)},\dots,x^{a(r)}} \rangle$$

$$J=\langle \underbrace{G(J)} \rangle=\langle \underbrace{x^{b(1)},\dots,x^{b(s)}} \rangle$$

الف) جمع:

$$I+J=\langle x^{a(i)}, x^{b(j)} \mid \begin{smallmatrix}1\le i\le r\\ 1\le j\le s\end{smallmatrix}\rangle$$

ایده‌ال تک جمله‌ای

* اگر I و J ایده‌ال تک جمله‌ای باشند جمع آنها نیز ایده‌ال تک جمله‌ای است.

ولی: $G(I+J)\subseteq G(I)\cup G(J)$

هم: $\Gamma(I+J)=\Gamma(I)\cup\Gamma(J)$

ب) ضرب:

$$IJ=\langle x^{a(i)+b(j)} \mid \begin{smallmatrix}1\le i\le r\\ 1\le j\le s\end{smallmatrix}\rangle$$

ایده‌ال تک جمله‌ای

* ضرب دو ایده‌ال تک جمله‌ای، ایده‌ال تک جمله‌ای است.

ولی $IJ\subseteq I,\ IJ\subseteq J \Rightarrow \Gamma(IJ)\subseteq\Gamma(I),\ \Gamma(IJ)\subseteq\Gamma(J)$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma(IJ)\subseteq\Gamma(I)\cap\Gamma(J)}$$

ج) اشتراک:

$$I\cap J=\langle \operatorname{lcm}(x^{a(i)}, x^{b(j)}) \mid \begin{smallmatrix}1\le i\le r\\ 1\le j\le s\end{smallmatrix}\rangle$$

دلیل

$$\langle x^{a(i)}\rangle\cap\langle x^{b(j)}\rangle=\langle \operatorname{lcm}(x^{a(i)}, x^{b(j)})\rangle \to$$ به سادگی قابل اثبات است

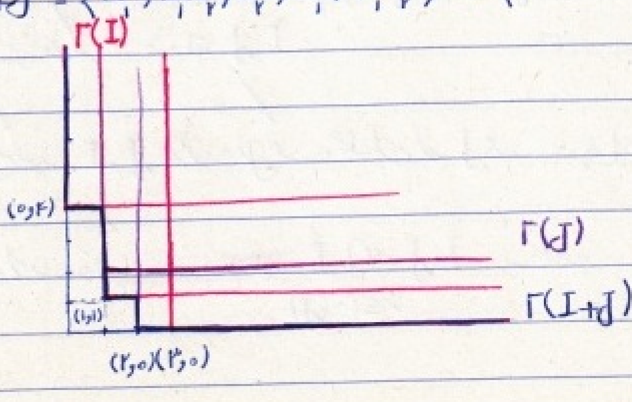
ایده‌ال تک جمله‌ای

$I,J,L\trianglelefteq S \qquad (I+J)\cap L\supseteq(I\cap L)+(J\cap L)$

* تساوی وقتی رخ می‌دهد I، J و L ایده‌آلهای تک جمله‌ای باشند.

مثال: $S=K[x_1,x_2]$ $\qquad I=\langle x_1^3, x_1x_2, x_2^4\rangle\trianglelefteq S$ $\qquad J=\langle x_1^2, x_1x_2^2\rangle\trianglelefteq S$

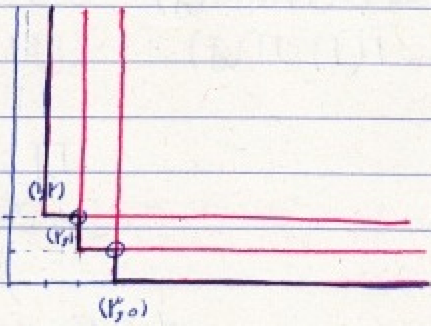
الف) $I+J=\langle x_1^3, x_1x_2, x_2^4, x_1^2, x_1x_2^2\rangle=\langle$



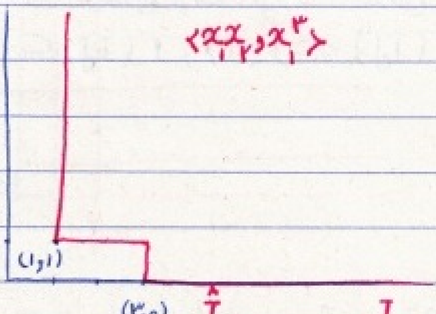
$$IJ = \langle x_1^5, x_1^4x_2^2, x_1^3x_2, x_1^2x_2^3, x_1^2x_2^4, x_1x_2^6\rangle = \langle x_1^5, x_1^3x_2, x_1^2x_2^3, x_1x_2^6\rangle$$

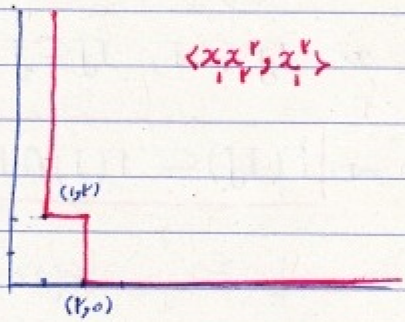
$$I\cap J = \langle x_1^3, x_1^3x_2^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1^2x_2^4, x_1x_2^4\rangle = \langle x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2\rangle$$

$$\langle x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2\rangle = \underbrace{I\cap J}_{\text{ظاهر شده در مثال}}$$




صفحه ۶




نشان دهید چرا این الگوریتم کار می‌کند

?

$$\longrightarrow \langle x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2\rangle = \overbrace{\langle x_1x_2, x_1^3\rangle}^{I} \cap \overbrace{\langle x_1x_2^2, x_1^2\rangle}^{J}$$

بررسی به کمک محاسبه:

$$I\cap J = \langle x_1x_2^2, x_1^2x_2, x_1^3x_2^2, x_1^3\rangle = \langle x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2\rangle$$

**تمرین.** ایده‌آل $I = \langle x_1x_2^3, x_1^2x_2^2, x_1^4\rangle$ از $S = k[x_1,x_2]$ را به صورت اشتراک دو ایده‌آل بنویسید.

**۲) $I:J$**

$$I:J = \{f\in S \mid fJ\subseteq I\} = \{f\in S \mid fg\in I,\ \forall g\in J\}$$

به راحتی دیده می‌شود که $I:J \trianglelefteq S$

**قضیه.** فرض کنید $I$ و $J$ دو ایده‌آل یک جمله‌ای از $S = k[x_1,\dots,x_n]$ باشند. در این صورت $I:J$ نیز ایده‌آل یک جمله‌ای است و $I:J = \bigcap_{v\in G(J)} I:\langle v\rangle$. به علاوه $I:\langle v\rangle$ برای هر $v\in G(J)$ مجموعه مولدی به صورت

برابرند: $\left\{ \frac{u}{\gcd(u,v)} \mid u\in G(I) \right\}$

**برهان.** برای اثبات اینکه $I:J$ ایده‌آل تک‌جمله‌ای است کافی است ثابت کنیم به ازای هر $f\in S$

$$(*)\quad f\in I:J \Longrightarrow \mathrm{supp}(f)\subseteq I:J$$

$$\underbrace{u\in \mathrm{supp}(f)}_{\text{دلخواه}} \Longrightarrow f=\dots+a_u \underbrace{u}_{\text{تک‌جمله‌ای}}+\dots \quad (0\neq a_u\in K)$$

فرض کنید $r\in G(J)$ دلخواه باشد در این صورت داریم

$$ur\in \mathrm{supp}(fr) \text{ زیرا } fr=\dots+\underbrace{a_u}_{\neq 0}(ur)+\dots$$

$$f\in I:J \Longrightarrow fr\in I \Longrightarrow \mathrm{supp}(fr)\subseteq I \longrightarrow ur\in I \Longrightarrow u\in I:J$$

لذا $(*)$ ثابت می‌شود. پس $I:J$ ایده‌آل تک‌جمله‌ای است. واضح است که

$$\underbrace{I:J}_{\text{تک‌جمله‌ای}}=\bigcap_{v\in G(J)} I:\langle v\rangle$$

حال نشان می‌دهیم که $I:\langle v\rangle$ برای $\forall v\in G(I)$ توسط مجموعه داده شده تولید می‌شود

$$\underbrace{\overbrace{x^a}^{\text{تک‌جمله‌ای}}\in I:\langle v\rangle}_{\text{دلخواه}} \Longrightarrow \underbrace{vx^a}_{\text{تک‌جمله‌ای}}\in I \Longrightarrow u_a \mid vx^a \ (u_a\in G(I)) \longrightarrow \frac{u_a}{\gcd(u_a,v)} \,\Big|\, \frac{v}{\gcd(u_a,v)}x^a$$

$$\longrightarrow \frac{u_a}{\gcd(u_a,v)} \,\Big|\, x^a$$

$$\longrightarrow x^a=\underbrace{h_a}_{\text{تک‌جمله‌ای}}\frac{u_a}{\gcd(u_a,v)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{f\in I:\langle v\rangle}_{\text{دلخواه}},\ f=\sum_{\underset{\text{متناهی}}{a\in\omega}} k_a x^a \ (k_a\in K) \\ \underbrace{f\in I:\langle v\rangle}_{\text{ایده‌آل تک‌جمله‌ای}} \Longrightarrow \mathrm{supp}(f)\subseteq I:\langle v\rangle \Longrightarrow x^a\in I:\langle v\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow f=\sum_{a\in\omega}\overbrace{(k_a h_a)}^{h}\frac{u_a}{\gcd(u_a,v)}$$

$f$ مانند بالا برحسب اعضای مجموعه داده شده است. □