Teacher: Dr. M.R. Pournaki
A Course on Combinatorial Commutative Algebra, IPM
Dey 22, 1390
Writer: *Fatemeh Soheilnia*

درس ۹

مثال (بنابر تمرین جلسه ۸)

در حلقه $S=K[x_1,x_2,x_3]$، $I=\langle x_1^2x_2, x_1^2x_3^2, x_2^2, x_2x_3^2\rangle$ آن‌گاه:

$$I=\langle x_1^2, \cancel{x_1^2x_3^2}, x_2^2, x_2x_3^2\rangle \cap \langle x_2, x_1^2x_3^2, \cancel{x_2^2}, \cancel{x_2x_3^2}\rangle$$

$$=\underbrace{\langle x_1^2, \cancel{x_2^2}, x_2\rangle}_{*} \cap \langle x_1^2, x_2^2, x_3^2\rangle \cap \underbrace{\langle x_2, x_1^2\rangle}_{*} \cap \langle x_2, x_3^2\rangle$$

$$=\langle x_1^2, x_2, x_3^2\rangle \cap \langle x_2, x_1^2\rangle \cap \langle x_2, x_3^2\rangle.$$

نتیجه: هر ایده‌آل تک‌جمله‌ای خالی از مربع اشتراکی از ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای اول است. ■

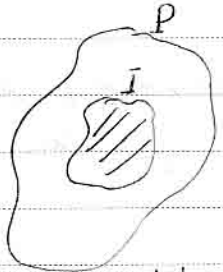
* به تمرین درس جبرهای جابجایی شارپ مراجعه شود.

تذکر: توجه کنید که به‌ازای مجتمع ساده‌ی Δ، I_Δ نیز یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای خالی از مربع است پس I_Δ را نیز می‌توان به صورت اشتراک اول‌ها نوشت. این کار را در ادامه انجام خواهیم داد.

لم ۱: فرض کنید I یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای در $S=K[x_1,\dots,x_n]$ باشد و $I=P_1\cap\dots\cap P_k$ یک تجزیه‌ی کاهش‌ناپذیر برای I باشد که در آن P_iها اول‌اند. در این صورت

$$\mathrm{Min}(I)=\{P_1,\dots,P_k\}.$$

برهان : ابتدا فرض کنید $p \in Min(I)$ دلخواه باشد.



$$P_1 \cdots P_k \subseteq P_1 \cap \cdots \cap P_k = I \subseteq P$$

$$\xrightarrow{\text{بنا به گزاره در جبر جابجایی}} \exists j \in [i] : P_j \subseteq P$$

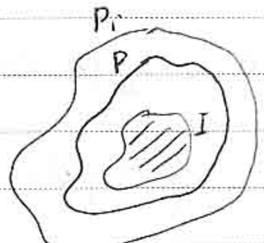
$$\xrightarrow{\text{مینیمال } P} P_j = P$$

$$\longrightarrow p \in \{P_1, \dots, P_k\}$$

$$\longrightarrow Min(I) \subseteq \{P_1, \dots, P_k\}.$$

برای نشان دادن رابطه شمول برعکس،

فرض کنید $P_i \notin Min(I)$. درنتیجه ایده‌آل اول P موجود است بطوریکه



$$I \subseteq P \subsetneq P_i$$

برای اثبات با استفاده از روند موجود در مبحث جبر جابجایی عمل می‌کنیم در واقع از ترفند

موضعی سازی استفاده می‌شود. بطور خلاصه می‌توان چنین بیان کرد:

Localization همواره روشی مناسب برای استفاده و بکارگیری بسیاری از مباحث جابجایی است.

$$IS_{P_i} = (P_1 \cap \dots \cap P_k) S_{P_i}$$

$$= P_1 S_{P_i} \cap \dots \cap P_k S_{P_i}$$

$$= S_{P_i} \cap \dots \cap P_j S_{P_i} \cap \dots S_{P_i}$$

$$= P_i S_{P_i} \qquad \times$$

زیرا :

$IS_{P_i} \subseteq P_i S_{P_i} \subsetneq P_j S_{P_i} = IS_{P_i}$ $\longrightarrow$ که این رابطه یک تناقض است .

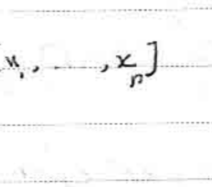
پس $P_i \in Min(I)$. $\blacksquare$

تعمیم. اگر I یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای خالی از مربع در حلقهٔ $S = K[x_1, \dots, x_n]$ باشد، آن‌گاه $I = \bigcap_{P_i \in Min(I)} P_i$.

تعریف : فرض کنید Q ایده‌آل تک‌جمله‌ای سره‌ای از $S = K[x_1, \dots, x_n]$ باشد.

Q را تحویل‌ناپذیر گوئیم. هرگاه نتوان Q را بصورت $Q = I \cap J$ نوشت

که در آن $I \supsetneq Q$, $J \supsetneq Q$.



(I و J ایده‌آل های تک‌جمله‌ای هستند.)

ایده‌آل تک جمله‌ای سره است. زیرا توسط یک تعداد متناهی تک جمله‌ای ها تولید می‌شود.

تفسیر: فرض کنید Q یک ایده‌آل تک جمله‌ای سره از S باشد. در این صورت

توجه وجود سره الزامی است.

Q تحویل ناپذیر است اگر و تنها اگر Q توسط توانی از متغیرها در نظر گرفته شود.

برهان: $(\Longrightarrow)$

فرض کنید $Q=\langle x_1^{a_1},\dots,x_k^{a_k}\rangle$. اگر Q تحویل ناپذیر نباشد. آن گاه

ایده‌آل های تک جمله‌ای I و J موجودند که $Q=I\cap J$ و $I \supsetneq Q$ و $J\supsetneq Q$

بنابر تفسیر قبل، $I=\bigcap_{i=1}^{k} Q_i$ و $J=\bigcap_{j=1}^{k} Q'_j$ و که در آن Q_i ها و Q'_j ها

توسط توانی از متغیرها تولید می‌شود.

$$Q=\left(\bigcap_{i=1}^{k} Q_i\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{k} Q'_j\right)$$

فرض کنید Q_i ها و Q'_j های اضافی را از طرف راست حذف می‌کنیم تا یک

تجزیه کاهش ناپذیر بنویسیم. بنابراین

$Q=Q_i$ یا $Q=Q'_j$ (برای یک i و j)

لذا $I=Q$ یا $J=Q$ که تناقض است. پس Q تحویل ناپذیر می‌باشد.

$(\Longleftarrow)$

عکس تفسیر بنابر تعریف واضح است.

یک سوال: آیا تعریف ارائه شده در کتاب های مربوط به این مبحث که مبهم کمی بیان شده را می‌توان این گونه استدلال کرد که اگر $Q=I\cap J$ که Q تک جمله‌ای باشد آیا I و J تک جمله‌ای هستند و یا اگر I و J تک جمله‌ای باشند آیا $Q=I\cap J$ یک تک جمله‌ای است؟

بازنویسی صورت قضیهٔ قبل :

قضیه. فرض کنید I یک ایده‌آل تک جمله‌ای سره از $S=K[x_1,\dots,x_n]$ باشد. در این صورت I تجزیه‌ای بصورت $I=\bigcap_{i=1}^{m} Q_i$ دارد که در آن هر Q_i یک ایده‌آل تحویل ناپذیر از S و بصورت $Q_i=\langle x_{i_1}^{a_1},\dots,x_{i_k}^{a_k}\rangle$ است علاوه به صورت بالا، یکتاست.

تعریف : فرض کنید Q ایده‌آل سره‌ای از حلقه‌های $S=K[x_1,\dots,x_n]$ باشد. گوئیم Q ایده‌آل اولیه S است هرگاه برای هر $a,b\in S$:

$$ab\in Q \Rightarrow a\in Q \text{ یا } b\in\sqrt{Q}$$

قضیه : هر ایده‌آل تحویل ناپذیر از حلقه S، ایده‌آل اولیه است.

برهان : تمرین .

قضیه : فرض کنید I ایده‌آل تک جمله‌ای سره از $S=K[x_1,\dots,x_n]$ باشد. در این صورت I تجزیه ای بصورت $I=\bigcap_{i=1}^{m} Q_i$ دارد که در آن هر Q_i یک ایده‌آل اولیه از S و بصورت $Q_i=\langle x_{i_1}^{a_1},\dots,x_{i_k}^{a_k}\rangle$ است.

I را تجزیهٔ اولیه می نامیم.

* اثبات و تعمیم قضایای مربوط به تجزیه اولیه‌ها بعنوان تمرین واگذار می‌شود.

مثال: در حلقهٔ $S=k[x_1,x_2,x_3]$ لذا برای I داریم:

$$I=\langle x_1^3, x_2^3, x_1^2x_3^2, x_1x_2x_3^2, x_2^2x_3^2\rangle$$

$$= \dots = \langle x_1^3, x_2^3, x_3^2\rangle \cap \langle x_1^2, x_2\rangle \cap \langle x_1, x_2^2\rangle$$

$$= \underbrace{\langle x_1^3, x_2^3, x_3^2\rangle}_{\text{اولیه } \langle x_1,x_2,x_3\rangle} \cap \underbrace{\langle x_1^2, x_1x_2, x_2^2\rangle}_{\text{اولیه } \langle x_1,x_2\rangle}$$

$$I \text{ ایده‌آل‌های اول وابسته} = \{\langle x_1,x_2,x_3\rangle, \langle x_1,x_2\rangle\} **$$

در اینجا می‌توان مجموعه ... را برای حالت بوچبام آن بررسی نمود. بعنوان تمرین این مطلب اثبات شود.

یادآوری: فرض کنید Δ یک مجتمع سادکی روی $[n]$ باشد، ایده‌آل استنلی-رایزنر وابسته به Δ بصورت زیر است:

$$I_\Delta = \{\langle x_F \mid F\notin\Delta\rangle\} = \langle x_F \mid F\in \underbrace{N(\Delta)}_{\text{ط}}\rangle$$

$$\left(x_F=\prod_{i\in F} x_i\right) \quad \text{مثل ناوجه‌های باشد.}$$

نمادگذاری: فرض کنید $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ یک تک‌جمله‌ای در $S = K[x_1, \dots, x_n]$ باشد. قرار دهید $F_u = \{i \in [n] : a_i \neq 0\}$.

لم ۱: فرض کنید $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ یک تک‌جمله‌ای در S باشد و Δ را یک مجتمع سادکی روی $[n]$ بگیرید. در این صورت $u \in I_\Delta \Longleftrightarrow F_u \notin \Delta$.

برهان:

$$(\Rightarrow) \quad (\sqrt{u} =) \prod_{\substack{i=1 \\ a_i \neq 0}}^{n} x_i = \prod_{i \in F_u} x_i = x_{F_u} \overset{\text{فرض}}{\in} I_\Delta .$$

با ضرب طرفین در متغیرهای مناسب داریم:

$u \in I_\Delta$. ∎

$(\Leftarrow)$

$$u \in I_\Delta \xrightarrow[\text{جلسه ۸}]{\text{بنابر قضایای}} \sqrt{u} \in \sqrt{I_\Delta}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{I_\Delta} = I_\Delta} \sqrt{u} \in I_\Delta$$

$$\Longrightarrow \prod_{\substack{i=1 \\ a_i \neq 0}}^{n} x_i \in I_\Delta$$

$$\Longrightarrow \prod_{i \in F_u} x_i = x_{F_u} \in I_\Delta$$

$$\Longrightarrow F_u \notin \Delta. \quad ∎$$

نمادگذاری: فرض کنید $F \subseteq [n]$. قرار دهید $P_F = \langle x_i \mid i \in F \rangle$.

لم ۲. فرض کنید $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ یک تک جمله‌ای در S باشد و $F \subseteq [n]$ در این صورت $u \in P_F \Longleftrightarrow F \cap F_u \neq \phi$.

برهان:

$(\Longrightarrow)$

$$F \cap F_u \neq \phi \Rightarrow \exists\, j \text{ s.t } j \in F \cap F_u$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{j \in F_u} & u = \cdots x_j^{a_j} \cdots \\ \xrightarrow{j \in F} & x_j \in P_F \end{cases}$$

پس P_F ایده‌آل است. بنابراین $u \in P_F$. $\square$

$(\Longleftarrow)$

$$u \in P_F = \langle x_i \mid i \in F \rangle$$

بنابر تعریف وجود دارد $j \in F$ به طوریکه $x_j \mid u$. بنابراین $u \in x_j S$.

لذا $a_j \neq 0$. پس $j \in F_u$، در نتیجه $j \in F \cap F_u$. $\square$

تعریف: فرض کنید Δ یک مجتمع سادکی روی $[n]$ باشد. در این صورت

$$I_\Delta = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(\Delta)} P_{F^c}$$

ایده‌آل‌های اول

برهان: $u \in I_\Delta \overset{\text{لم ۱}}{\iff} F_u \notin \Delta$

$\iff F_u \not\subseteq F \qquad \forall F \in F(\Delta)$

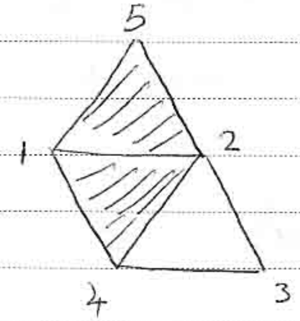
$\iff F_u \cap F^c \neq \emptyset \qquad \forall F \in F(\Delta)$

$\overset{\text{لم ۲}}{\iff} u \in P_{F^c} \qquad \forall F \in F(\Delta)$

$\iff u \in \bigcap_{F \in F(\Delta)} P_{F^c}$. ∎

مثال:

$\Delta =$



$I_\Delta : \langle x_3, x_4 \rangle \cap \langle x_3, x_5 \rangle \cap \langle x_1, x_2, x_5 \rangle \cap \langle x_1, x_4, x_5 \rangle .$

تعریف:
فرض کنید Δ یک مجتمع سادکی روی $[n]$ باشد. حلقه استنلی رایزنر را
وابسته به Δ را بعنوان $K[\Delta]$ نمایش می‌دهیم و برابر است با

$$K[\Delta] = \frac{S}{I_\Delta} \; ; \; (S = K[x_1, \dots, x_n])$$

و I_Δ یک ایده‌آل استنلی رایزنر است.

تعمیم: فرض کنید Δ مجتمع ساده‌ای روی $[n]$ باشد. در این صورت اعضای پایه‌ای $K[\Delta]$ به عنوان K- فضای برداری عبارتند از $u + I_\Delta$ که در آن $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ تک جمله‌ای است و $\{i \in [n] : a_i \neq 0\} \in \Delta$.

یادآوری:

V فضای برداری و W زیرفضای V باشد. $\frac{V}{W}$ را فضای خارج قسمتی نامیم

پایه $\frac{V}{W}$ چیست؟

$$\underbrace{\{w_1, \dots, w_n\}}_{\text{پایه برای } W} \xrightarrow{\text{گسترش}} \{w_1, \dots, w_n, \underbrace{v_{n+1}, \dots, v_m\}}_{\text{پایه برای } V}$$

پایه برای

$$\frac{V}{W} = \{v_{n+1} + W, \dots, v_m + W\}$$

برای این تعمیم نیز مشابه یادآوری داریم

$$\boxed{\text{تمام جملات } \in I_\Delta} \xrightarrow{\text{گسترش}} \boxed{\text{جملات که } \notin I_\Delta}$$

پس این تعمیم مشابه با یادآوری اثبات می‌شود.

اثبات قضایایی که بیان نشده حتماً مطالعه شود.