Математические заметки

том 77 выпуск 4 апрель 2005

УДК 511.36

ОЦЕНКИ СНИЗУ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ ОТ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛИЛОГАРИФМОВ

Т. Хессами Пилеруд, Х. Хессами Пилеруд

В работе с помощью аппроксимаций Эрмита–Паде второго рода получена оценка снизу для модуля линейной формы с целыми коэффициентами от значений полилогарифмических функций в рациональной точке. Эта оценка учитывает рост всех коэффициентов линейной формы.

Библиография: 15 названий.

Рассмотрим полилогарифмические функции

$$L_k(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu^k}, \qquad k\geqslant 1, \quad |z|<1. \tag{1}$$

В данной работе с помощью приближений Эрмита–Паде второго рода получена оценка снизу для модуля линейной формы с целыми коэффициентами от значений функций (1) в рациональной точке, зависящая от всех коэффициентов формы.

Теорема 1. *Пусть* $b\in\mathbb{Z}$, $a\in\mathbb{N}$, $a^{m+1}e^{m^2+m\ln m}<|b|$. *Тогда существует постоянная* $c=c(a,b,m)>0$ *такая, что для любых целых чисел* $x_0,x_1,\dots,x_m$, *в совокупности отличных от нуля, и* $\overline{x}_k\geqslant\max(1,|x_k|)$, $k=1,\dots,m$, *удовлетворяющих условию* $\overline{x}_1\geqslant\overline{x}_2\geqslant\dots\geqslant\overline{x}_m$, *справедливо неравенство*

$$\biggl|x_0+\sum_{k=1}^{m}x_kL_k\Bigl(\frac{a}{b}\Bigr)\biggr|>c\cdot(\overline{x}_1\cdots\overline{x}_m)^{-1}\cdot\overline{x}_1^{-\delta},$$
$$\delta=\frac{m^3+m^2\ln m+m^2+m(m+2)\ln 2+m(m+1)\ln a}{\ln|b|-(m+1)\ln a-m^2-m\ln m}. \tag{2}$$

Следствие 1. *Пусть* $b\in\mathbb{Z}$, $a\in\mathbb{N}$, $\varepsilon>0$,

$$|b|^{\varepsilon/(m+\varepsilon)}>a^{m+1}e^{m^2+m\ln m+4m}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Института исследований по теоретической физике и математике (Иран), гранты № 83110020 (первый автор) и № 83110021 (второй автор).

Тогда для любого ненулевого набора целых чисел $x_0, x_1, \dots, x_m$ и чисел $\overline{x}_k \geqslant \max(1, |x_k|)$, $k = 1, \dots, m$, удовлетворяющих условиям $\overline{x}_1 \geqslant \overline{x}_2 \geqslant \dots \geqslant \overline{x}_m$, $\overline{x}_1 \geqslant X_0 = X_0(a, b, m) > 0$, справедливо неравенство

$$\left|x_0 + \sum_{k=1}^{m} x_k L_k\left(\frac{a}{b}\right)\right| > (\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_m)^{-1} \cdot \overline{x}_1^{-\varepsilon}.$$

Принцип Дирихле показывает, что уточнение последнего неравенства возможно лишь за счет величины ε.

Подробную историю постановки задачи можно найти в [1, гл. 5, § 6]. Отметим также, что первая оценка линейной формы, зависящая от всех коэффициентов, для чисел e^{α_i}, $\alpha_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \dots, m$, была получена А. Бейкером в [2]. Оценки линейных форм, зависящие от всех коэффициентов, для значений некоторых конкретных гипергеометрических E-функций были получены в работах [3]–[5], а для произвольного набора E-функций, составляющих решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка и удовлетворяющих некоторым дополнительным ограничениям, – в работе [6].

Для значений G-функций оценки подобного типа были доказаны лишь для некоторых совокупностей функций [7]–[11]. Теорема 1 уточняет результат работы [10]. Этого удается достичь за счет применения конструкции приближений Эрмита–Паде второго рода к полилогарифмическим функциям, а не первого как в работе [10]. Заметим, что диагональные аппроксимации Эрмита–Паде второго рода для полилогарифмов применялись в работах [12]–[14] для получения результатов об иррациональности значений функций (1) и оценок снизу соответствующих линейных форм, зависящих от максимума модуля коэффициентов формы. Функциональные свойства матричных аппроксимаций Эрмита–Паде полилогарифмов изучались в [15].

Перейдем к доказательству теоремы.

1. Построение приближающих форм. Пусть $n_1, \dots, n_m$ – натуральные числа, $n_1 \geqslant \dots \geqslant n_m$, $N = \sum_{k=1}^{m} n_k$, $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$.

Положим

$$R_{\mathbf{n}}(\nu) = \frac{(-1)^N \cdot N!}{n_1! \cdots n_m!} \cdot \frac{(\nu - n_1)_{n_1}(\nu - n_2)_{n_2} \cdots (\nu - n_m)_{n_m}}{\nu(\nu+1)\cdots(\nu+N)}, \tag{3}$$

где $(\nu)_0 = 1$ и $(\nu)_k = \nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1)$ при $k \geqslant 1$.

Для $\mu = 1, 2, \dots, m$ рассмотрим функции

$$E_{\mathbf{n},\mu}(z) = \frac{(-1)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \sum_{\nu=1}^{\infty} R_{\mathbf{n}}^{(\mu-1)}(\nu) z^{-\nu}. \tag{4}$$

Так как $R_{\mathbf{n}}(\nu) = O(1/\nu)$ при $\nu \to \infty$, ряды в (4) абсолютно сходятся при $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$. Пусть $D_N = \text{НОК}(1, 2, \dots, N)$.

Лемма 1. *Для $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^m$, $\mu = 1, 2, \dots, m$ и $|z| > 1$ справедливо равенство*

$$E_{\mathbf{n},\mu}(z) = Q_{\mathbf{n}}(z) \cdot L_\mu\left(\frac{1}{z}\right) - P_{\mathbf{n},\mu}(z), \tag{5}$$

где

$$Q_{\mathbf{n}}(z) \in \mathbb{Z}[z], \quad D_N^\mu P_{\mathbf{n},\mu}(z) \in \mathbb{Z}[z], \qquad \deg Q_{\mathbf{n}}(z) = N, \quad \deg P_{\mathbf{n},\mu}(z) \leqslant N - 1$$

и

$$\operatorname{ord}_{z=\infty} E_{\mathbf{n},\mu}(z) \geqslant n_\mu + 1. \tag{6}$$

Доказательство. Раскладывая $R_{\mathbf{n}}(\nu)$ в сумму простейших дробей, получим

$$R_{\mathbf{n}}(\nu)=\sum_{k=0}^{N}\frac{\omega_{\mathbf{n},k}}{\nu+k},$$

где

$$\omega_{\mathbf{n},k}=R_{\mathbf{n}}(\nu)(\nu+k)\big|_{\nu=-k}=(-1)^k\binom{N}{k}\prod_{j=1}^{m}\binom{k+n_j}{n_j}\in\mathbb{Z}. \tag{7}$$

Тогда согласно (4) имеем

$$\begin{aligned}E_{\mathbf{n},\mu}(z)&=\sum_{k=0}^{N}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\omega_{\mathbf{n},k}}{(\nu+k)^\mu}z^{-\nu}=\sum_{k=0}^{N}\omega_{\mathbf{n},k}z^k\cdot\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z^{-(\nu+k)}}{(\nu+k)^\mu}\\&=Q_{\mathbf{n}}(z)\cdot L_\mu\left(\frac{1}{z}\right)-P_{\mathbf{n},\mu}(z),\end{aligned}$$

где

$$Q_{\mathbf{n}}(z)=\sum_{k=0}^{N}\omega_{\mathbf{n},k}z^k\in\mathbb{Z}[z],\quad P_{\mathbf{n},\mu}(z)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=1}^{k}\frac{\omega_{\mathbf{n},k}}{l^\mu}z^{k-l}\in\mathbb{Q}[z], \tag{8}$$
$$\deg Q_{\mathbf{n}}(z)=N,\quad \deg P_{\mathbf{n},\mu}(z)\leqslant N-1.$$

Ввиду справедливости включений (7) и

$$D_N^\mu\cdot\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l^\mu}\in\mathbb{Z},\qquad k=1,2,\dots,N,$$

заключаем, что $D_N^\mu\cdot P_{\mathbf{n},\mu}\in\mathbb{Z}[z]$.

Неравенство (6) следует из (4) и (3), и лемма доказана.

Лемма 2. *При $|z|>1$ справедливо неравенство*

$$|Q_{\mathbf{n}}(z)|<(N+1)\cdot 2^{(m+2)N}|z|^N.$$

Доказательство. Так как согласно (7) и (8)

$$Q_{\mathbf{n}}(z)=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\binom{N}{k}\binom{k+n_1}{n_1}\cdots\binom{k+n_m}{n_m}z^k, \tag{9}$$

требуемая оценка следует из неравенства $\binom{n}{k}\leqslant 2^n$ для всех $k=0,1,\dots,n,\ n\in\mathbb{N}$.

Лемма 3. *При $|z|>1$ и всех $\mu=1,2,\dots,m$ имеет место неравенство*

$$|E_{\mathbf{n},\mu}(z)|\leqslant\frac{2^\mu\cdot m^N\cdot|z|^{-n_\mu}}{|z|-1}.$$

Доказательство. Из (4) и (6) получаем, что

$$|E_{\mathbf{n},\mu}(z)| \leqslant \frac{1}{(\mu-1)!} \sum_{\nu=n_\mu+1}^{\infty} |R_{\mathbf{n}}^{(\mu-1)}(\nu)| \cdot |z|^{-\nu}, \tag{10}$$

где

$$R_{\mathbf{n}}^{(\mu-1)}(\nu) = \frac{(\mu-1)!}{2\pi i} \oint_{|\xi-\nu|=1/2} \frac{R_{\mathbf{n}}(\xi)}{(\xi-\nu)^\mu}\, d\xi. \tag{11}$$

Для всех целых k и комплексных $\xi = \nu + e^{i\varphi}/2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\nu \in \mathbb{N}$, находим $|\xi+k|^2 = (\nu+k)^2 + (\nu+k)\cos\varphi + 1/4$, откуда следует, что

$$|\nu+k| - \frac{1}{2} \leqslant |\xi+k| \leqslant |\nu+k| + \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Тогда для $\nu > 1$ и $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$|(\xi-n)_n| \leqslant |\xi-1| \cdot (|\xi-1|+1) \cdots (|\xi-1|+n-1) \leqslant \left(\nu - \frac{1}{2}\right)_n. \tag{13}$$

Далее, учитывая (3), (12) и (13), получим, что на контуре интегрирования

$$|R_{\mathbf{n}}(\xi)| \leqslant \frac{N!}{n_1! \cdots n_m!} \cdot \frac{(\nu-1/2)_{n_1}(\nu-1/2)_{n_2} \cdots (\nu-1/2)_{n_m}}{(\nu-1/2)(\nu+1/2)\cdots(\nu+N-1/2)}.$$

Представим произведение, стоящее в знаменателе последней дроби, в следующем виде:

$$\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\nu+N-\frac{3}{2}\right) = \left(\nu-\frac{1}{2}\right)_{n_1} \cdots \left(\nu - \frac{1}{2} + n_1 + \cdots + n_{m-1}\right)_{n_m}.$$

Тогда

$$|R_{\mathbf{n}}(\xi)| \leqslant \frac{N!}{n_1! \cdots n_m!} \cdot \frac{1}{\nu+N-1/2} \leqslant \frac{m^N}{\nu+N-1/2}.$$

Учитывая (11), окончательно получаем

$$|R_{\mathbf{n}}^{(\mu-1)}(\nu)| \leqslant \frac{(\mu-1)! \cdot 2^{\mu-1} \cdot m^N}{\nu+N-1/2} \leqslant \frac{(\mu-1)! \cdot 2^{\mu} \cdot m^N}{\nu+N},$$

и утверждение леммы теперь следует из (10).

Определим набор мультииндексов

$$\mathbf{n}_j = (n_1+1, \dots, n_j+1, n_{j+1}, \dots, n_m), \qquad j = 0, 1, \dots, m.$$

Рассмотрим определитель

$$\Delta_{\mathbf{n}}(z) = \begin{vmatrix} Q_{\mathbf{n}_0}(z) & P_{\mathbf{n}_0,1}(z) & \dots & P_{\mathbf{n}_0,m}(z) \\ Q_{\mathbf{n}_1}(z) & P_{\mathbf{n}_1,1}(z) & \dots & P_{\mathbf{n}_1,m}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{\mathbf{n}_m}(z) & P_{\mathbf{n}_m,1}(z) & \dots & P_{\mathbf{n}_m,m}(z) \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Лемма 4. *Выполнено*

$$\Delta_{\mathbf{n}}(z) \equiv \mathrm{const} \neq 0.$$

Доказательство. Будем нумеровать строки и столбцы определителя (14) индексами от 0 до m. Прежде всего заметим, что этот определитель – многочлен. Далее, для каждого $j = 1, \dots, m$ вычтем из j-го столбца определителя $\Delta_{\mathbf{n}}(z)$ нулевой столбец, умноженный на $L_j(1/z)$. Согласно (5) получим

$$\Delta_{\mathbf{n}}(z) = (-1)^m \begin{vmatrix} Q_{\mathbf{n}_0}(z) & E_{\mathbf{n}_0,1}(z) & \dots & E_{\mathbf{n}_0,m}(z) \\ Q_{\mathbf{n}_1}(z) & E_{\mathbf{n}_1,1}(z) & \dots & E_{\mathbf{n}_1,m}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{\mathbf{n}_m}(z) & E_{\mathbf{n}_m,1}(z) & \dots & E_{\mathbf{n}_m,m}(z) \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Пусть $\Delta_{\mathbf{n},j}(z)$, $0 \leqslant j \leqslant m$, – алгебраическое дополнение элемента $Q_{\mathbf{n}_j}(z)$ определителя (15):

$$\Delta_{\mathbf{n},j}(z) = (-1)^j \begin{vmatrix} E_{\mathbf{n}_0,1}(z) & \dots & E_{\mathbf{n}_0,m}(z) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ E_{\mathbf{n}_{j-1},1}(z) & \dots & E_{\mathbf{n}_{j-1},m}(z) \\ E_{\mathbf{n}_{j+1},1}(z) & \dots & E_{\mathbf{n}_{j+1},m}(z) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ E_{\mathbf{n}_m,1}(z) & \dots & E_{\mathbf{n}_m,m}(z) \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\Delta_{\mathbf{n}}(z) = (-1)^m \sum_{j=0}^{m} Q_{\mathbf{n}_j}(z) \Delta_{\mathbf{n},j}(z). \tag{16}$$

Согласно лемме 1 находим

$$\deg Q_{\mathbf{n}_j}(z) = N + j, \quad j = 0, 1, \dots, m, \qquad \Delta_{\mathbf{n},0}(z) = O\biggl(\frac{1}{z^{N+m+1}}\biggr), \quad z \to \infty, \tag{17}$$

$$\Delta_{\mathbf{n},j}(z) = O\biggl(\frac{1}{z^{N+m}}\biggr), \qquad z \to \infty, \quad j = 1, \dots, m. \tag{18}$$

Из (16)–(18) вытекает, что $\Delta_{\mathbf{n}}(z) = O(1)$ при $z \to \infty$, т.е. $\Delta_{\mathbf{n}}(z)$ – многочлен нулевой степени: $\Delta_{\mathbf{n}}(z) \equiv \Delta_{\mathbf{n}}(0)$. Учитывая (16), (9), (4), (3), окончательно получаем

$$\Delta_{\mathbf{n}}(z) \equiv \Delta_{\mathbf{n}}(0) = \pm \prod_{k=1}^{m} \binom{N + m + n_k + 1}{n_k + 1} \cdot \prod_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} R_{\mathbf{n}_j}^{(j)}(n_{j+1} + 1) \neq 0,$$

и лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1. Пусть $z = b/a$, где числа $a \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют условию

$$|b| > a^{m+1} \cdot e^{m^2 + m \ln m}. \tag{19}$$

Тогда, в частности, $|z| > 1$. Рассмотрим форму

$$\ell = x_0 + x_1 L_1\biggl(\frac{a}{b}\biggr) + \dots + x_m L_m\biggl(\frac{a}{b}\biggr) \tag{20}$$

с произвольными целыми коэффициентами, не все из которых равны нулю, и пусть числа $\overline{x}_k \geqslant \max(1, |x_k|)$, $k = 1, \dots, m$, таковы, что $\overline{x}_1 \geqslant \dots \geqslant \overline{x}_m$. Определим натуральное число n_1 как наименьшее, удовлетворяющее условию

$$\overline{x}_1 \cdot \left(e^{m^2+m\ln m} \cdot \frac{a^{m+1}}{|b|}\right)^{n_1} < \frac{1}{2m}.$$

В силу (19) при достаточно большом $\overline{x}_1$ такое n_1 всегда существует. Для $1 < k \leqslant m$ определим n_k как наименьшее натуральное, удовлетворяющее условию

$$\overline{x}_k \cdot (e^{m^2+m\ln m} \cdot a^m)^{n_1} \cdot \left(\frac{a}{|b|}\right)^{n_k} < \frac{1}{2m}.$$

Легко видеть, что при таком выборе чисел n_k выполнено $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \dots \geqslant n_m$. Кроме того, при фиксированных a и b условия $\overline{x}_1 \to \infty$, $n_1 \to \infty$ и $N \to \infty$ эквивалентны. Далее по лемме 4 найдется такое $j = 0, 1, \dots, m$, зависящее от $\mathbf{n}$, что

$$x_0 Q_{\mathbf{n}_j}\left(\frac{b}{a}\right) + \sum_{k=1}^{m} x_k P_{\mathbf{n}_j,k}\left(\frac{b}{a}\right) \neq 0. \tag{21}$$

Умножим обе части равенства (20) на $a^{N+m} D_{N+m}^m Q_{\mathbf{n}_j}(b/a)$ и запишем полученное соотношение в виде

$$\begin{aligned} a^{N+m} D_{N+m}^m Q_{\mathbf{n}_j}\left(\frac{b}{a}\right)\ell = a^{N+m} D_{N+m}^m \left(x_0 Q_{\mathbf{n}_j}\left(\frac{b}{a}\right) + \sum_{k=1}^{m} x_k P_{\mathbf{n}_j,k}\left(\frac{b}{a}\right)\right) \\ + a^{N+m} D_{N+m}^m \sum_{k=1}^{m} x_k E_{\mathbf{n}_j,k}\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

В силу леммы 1 первое слагаемое в правой части (22) есть целое число, а в силу (21) это число отлично от нуля. Следовательно, абсолютная величина этого числа не меньше единицы. Тем самым, мы можем написать неравенство

$$a^{N+m} D_{N+m}^m \left|Q_{\mathbf{n}_j}\left(\frac{b}{a}\right)\right| \cdot |\ell| \geqslant 1 - a^{N+m} D_{N+m}^m \left|\sum_{k=1}^{m} x_k E_{\mathbf{n}_j,k}\left(\frac{b}{a}\right)\right|.$$

Согласно леммам 2, 3 при $|z| > 1$ и всех достаточно больших N справедливы оценки

$$\begin{gathered} a^{N+m} D_{N+m}^m \leqslant A \cdot e^{mN} a^N, \\ \left|Q_{\mathbf{n}_j}\left(\frac{b}{a}\right)\right| \leqslant B \cdot 2^{(m+2)N} \left(\frac{|b|}{a}\right)^N, \qquad \left|E_{\mathbf{n}_j,k}\left(\frac{b}{a}\right)\right| \leqslant C \cdot m^N \left(\frac{|b|}{a}\right)^{-n_k}, \end{gathered} \tag{23}$$

где $A = e^{o(N)}$, $B = e^{o(N)}$, $C = e^{o(N)}$ при $N \to \infty$.

Учитывая неравенства (23), для всех достаточно больших N находим

$$e^{mN} a^N \cdot 2^{(m+2)N} \left(\frac{|b|}{a}\right)^N |\ell| \geqslant 1 - e^{mN} a^N \sum_{k=1}^{m} \overline{x}_k m^N \left(\frac{a}{|b|}\right)^{n_k}. \tag{24}$$

Учитывая выбор чисел $\overline{x}_k$, $k = 1, \dots, m$, получаем, что для всех n_1, больших некоторого числа, зависящего от a и b, правая часть неравенства (24) будет больше $1/2$, т.е.

$$\begin{aligned}
|\ell| &> \frac{1}{2} e^{-(m+(m+2)\ln 2)N} |b|^{-N} \\
&> c(\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_m)^{-1} e^{-(m^3+m^2 \ln m)n_1} a^{-N-m^2 n_1} e^{-(m+(m+2)\ln 2)N} \\
&> c_*(\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_m)^{-1} \bigl(a^{m^2+m} e^{m^3+m^2 \ln m + m^2 + m(m+2)\ln 2}\bigr)^{-n_1} \\
&> c_{**}(\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_m)^{-1} \cdot \overline{x}_1^{-\delta},
\end{aligned}$$

где $c_{**} = c_{**}(a, b, m)$ и δ определено в (2). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Fel′dman N. I., Nesterenko Yu. V. Transcendental Numbers. Number Theory IV. Encyclopaedia of Math. Sci. V. 44. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
[2] Baker A. On some Diophantine inequalities involving the exponential function // Canad. J. Math. 1965. V. 17. P. 616–626.
[3] Фельдман Н. И. Оценки снизу для некоторых линейных форм // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1967. №2. С. 63–72.
[4] Väänänen K. On lower estimates for linear forms involving certain transcendental numbers // Bull. Austral. Math. Soc. 1976. V. 14. P. 161–179.
[5] Väänänen K. On linear forms of the values of one class of E-functions // Acta Univ. Ouluen. Ser. A. 1976. №41. P. 1–19.
[6] Зудилин В. В. Об оценках снизу многочленов от значений некоторых целых функций // Матем. сб. 1996. Т. 187. №12. С. 57–86.
[7] Фельдман Н. И. Об одной линейной форме // Acta Arith. 1972. V. 21. P. 347–355.
[8] Сорокин В. Н. Об иррациональности значений гипергеометрических функций // Матем. сб. 1985. Т. 127 (169). №2 (6). С. 245–258.
[9] Галочкин А. И. Оценки снизу линейных форм от значений некоторых G-функций // Матем. заметки. 1975. Т. 18. №4. С. 541–552.
[10] Хессами Пилеруд Т. Оценка снизу одной линейной формы // Матем. заметки. 1999. Т. 66. №4. С. 617–623.
[11] Хессами Пилеруд Т. Оценки снизу линейных форм от значений некоторых гипергеометрических функций // Матем. заметки. 2000. Т. 67. №3. С. 441–451.
[12] Chudnovsky G. V. Padé approximations to the generalized hypergeometric functions. I // J. Math. Pures Appl. 1979. V. 58. P. 445–476.
[13] Гутник Л. А. О линейной независимости над $\mathbb{Q}$ дилогарифмов в рациональных точках // УМН. 1982. Т. 37. №5. С. 179–180.
[14] Hata M. On the linear independence of the values of polylogarithmic functions // J. Math. Pures Appl. 1990. V. 69. №2. P. 133–173.
[15] Сорокин В. Н. Аппроксимации Эрмита–Паде полилогарифмов // Изв. вузов. Матем. 1994. №5. С. 49–59.

Shahrekord University, Shahrekord, Iran
E-mail: `hessamit@ipm.ir`

Поступило
28.01.2004
Исправленный вариант
29.06.2004