نظریه اطلاعات کوانتمی ۱ ترم پاییز ۱۳۹۲-۱۳۹۱

مدرسین: ابوالفتح بیگی و امین زاده گوهری
نویسنده: محمّدحسن آرام

جلسه ۱۶

تا اینجا با دو دیدگاه مختلف و دو عامل اصلی برای تعریف و استفاده از ماتریس چگالی جهت معرفی حالت یک سیستم کوانتومی آشنا شدیم. دیدگاه و عامل اول نداشتن اطلاعات کافی از وضعیتی است که سیستم در آن قرار دارد. در این دیدگاه ما تنها احتمال حضور سیستم در یک حالت مشخص را در اختیار داریم و حالت سیستم را به طور قطعی نمی توانیم تعیین کنیم. یعنی مثلاً می‌دانیم سیستم کوانتومی مورد نظر با احتمال p_1 در حالت $|\psi_1\rangle$، با احتمال p_2 در حالت $|\psi_2\rangle$ و $\ldots$ و با احتمال p_k در حالت $|\psi_k\rangle$ قرار دارد. وضعیت سیستم را ابتدا به طور خلاصه به صورت $\{p_i\,, |\psi_i\rangle\}$ نشان دادیم. اما برای آنکه هر بار مجبور به بیان حالت‌های مختلفی که سیستم با احتمال‌های متفاوت در آن قرار دارد نشویم از ماتریس چگالی که به صورت زیر تعریف می‌شود برای بیان حالت سیستم استفاده کردیم.

$$\rho = \sum_{i=1}^{k} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

عامل دوم وجود سیستم‌های ترکیبی در هم تنیده[1] است. دیدیم در این وضعیت نمی‌توان به هرکدام از زیرسیستمها یک بردار حالت مجزا نسبت داد. به عنوان مثال اگر حالت یک سیستم ترکیبی (دو کیوبیت) A و B به صورت یک حالت بل[2]

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

باشد، هیچ برداری برای بیان حالت کیوبیت A و یا B به تنهایی وجود ندارد. بررسی عدم وجود بردار حالت برای بیان وضعیت هر کدام از کیوبیت‌ها کار دشواری نیست. کافیست قرار دهیم $|\varphi\rangle_A = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ و $|\varphi\rangle_B = \alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle$ در این صورت طبق اصل چهارم مکانیک کوانتومی حالت سیستم مرکب از هر دو کیوبیت، از ضرب تانسوری $|\varphi\rangle_A$ و $|\varphi\rangle_B$ بدست می آید. در نتیجه باید داشته باشیم

$$|\psi\rangle_{AB} = |\varphi\rangle_A \otimes |\varphi\rangle_B \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right) = \left(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right) \otimes \left(\alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle\right)$$

---

[1] Entangled
[2] Bell state

برای برقراری تساوی دوم باید روابط زیر بین α ، α' ، β و β' برقرار باشد.

$$\alpha\alpha' = 1/\sqrt{2} \tag{۱}$$

$$\alpha\beta' = 0 \tag{۲}$$

$$\beta\alpha' = 0 \tag{۳}$$

$$\beta\beta' = 1/\sqrt{2} \tag{۴}$$

از معادلات (۱) و (۴) نتیجه می شود که α و β' مخالف صفر هستند. در این صورت معادله (۲) هیچ وقت نمی‌تواند برقرار شود. پس فرض این که حالت کیوبیت A و B به صورت $|\varphi\rangle_A$ و $|\varphi\rangle_B$ است، از ابتدا غلط بوده است. به همین سبب در این مواقع مجبور به استفاده از ماتریس چگالی برای بیان حالت هر یک از زیرسیستم‌ها (کیوبیت‌ها) شدیم. ماتریس چگالی زیر سیستم A و B را بر حسب ماتریس چگالی کل سیستم (و یا بردار حالت کل سیستم) به صورت زیر بدست آوردیم.

$$\rho_A = \mathrm{tr}_B\left(\rho_{AB}\right) = \mathrm{tr}_B\left(|\psi\rangle\langle\psi|_{AB}\right)$$
$$\rho_B = \mathrm{tr}_A\left(\rho_{AB}\right) = \mathrm{tr}_A\left(|\psi\rangle\langle\psi|_{AB}\right)$$

سوالی که در این جا پیش می‌آید این است که اگر ماتریس چگالی یک سیستم کوانتومی مثلاً کیوبیت A را داشته باشیم، آیا می‌توان یک سیستم دیگر مانند B و حالت محضی روی AB یافت به طوری که ماتریس چگالی داده شده روی A از اثر جزئی بردار محض حالت AB بدست آید؟ در بخش بعد سعی می‌کنیم پاسخی جامع به این سوال بدهیم.

۱ محض‌سازی

قضیه ۱ به ازای هر سیستم کوانتومی A با ماتریس چگالی دلخواه ρ_A، سیستم کوانتومی B وجود دارد به طوری که

$$\rho_A = tr_B\left(|\psi\rangle\langle\psi|_{AB}\right).$$

اثبات: این قضیه معروف به قضیه محض‌سازی[۳] است. برای اثبات آن کافی است $|\psi\rangle_{AB}$ را برای هر سیستم A درست کنیم. از آنجاکه ماتریس چگالی ρ_A مثبت نیمه معین است، می توان آن را در یک پایه متعامد یکه قطری کرد. بنابراین می توان ρ_A را به صورت

$$\rho_A = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|$$

نوشت. در این رابطه λ_i ها مقادیر ویژه ρ_A و نامنفی هستند و $\{|v_1\rangle, \ldots, |v_d\rangle\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه است. همچنین d بعد فضای هیلبرت $\mathcal{H}_A$ است. حال سیستم B را با فضای هیلبرت $\mathcal{H}_B$ d-بعدی و با پایه متعامد یکه $\{|1\rangle_B\,, |2\rangle_B\,, \ldots\,, |d\rangle_B\}$ در نظر گرفته و تعریف می‌کنیم

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i}|v_i\rangle_A|i\rangle_B.$$

[۳] Purification

حال اگر ماتریس چگالی کاهش یافته‌ی حالت $|\psi\rangle_{AB}$ را برای سیستم A محاسبه کنیم، خواهیم داشت

$$\mathrm{tr}_B\left(|\psi\rangle\langle\psi|_{AB}\right) = \sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}|v_i\rangle\langle v_j|\mathrm{tr}\left(|i\rangle\langle j|\right) = \sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}|v_i\rangle\langle v_j|\delta_{ij} = \sum_i \lambda_i|v_i\rangle\langle v_i| = \rho_A$$

$\square$

در اینجا می توان گفت که پیدایش ρ_A در واقع در اثر بوجود آمدن ابهام به خاطر دور انداختن سیستم B بوده است.

مثال ۱ ماتریس چگالی ρ را به صورت

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

در فضای $\mathbb{C}^2$ در نظر بگیرید. می‌خواهیم یک محض سازی از این سیستم در $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$ بدست آوریم. یعنی می‌خواهیم یک حالت محض $|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$ را به گونه‌ای بیابیم که ماتریس چگالی کاهش یافته آن با گرفتن اثر جزئی روی سیستم دوم برابر ρ شود. برای این منظور ابتدا بسط ρ را در پایه بردارهای ویژه آن یعنی

$$|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$$

با توجه به قضیه ۱ می‌توان حالت $|\Psi\rangle$ را به صورت

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes|\phi_2\rangle$$

نوشت که در آن $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه تشکیل است. اگر قرار دهیم $|\phi_1\rangle = |0\rangle$ و $|\phi_2\rangle = |1\rangle$ ، $|\Psi\rangle$ برابر یکی از حالت‌های بل می‌شود. یعنی داریم

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = |\Phi_+\rangle$$

می‌توان به راحتی نشان داد که سایر حالات بل، یعنی

$$|\Phi_-\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle - |11\rangle\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$|\Psi_+\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle + |10\rangle\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad |\Psi_-\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

نیز محض‌سازی‌هایی از سیستم مورد نظر هستند.

۲ ارتباط میان محض‌سازی‌های متفاوت یک سیستم

در قضیه ۱ نشان دادیم برای هر سیستم A می‌توان سیستم دیگری یافت که $\rho_A = \mathrm{tr}_B\left(|\psi\rangle\langle\psi|_{AB}\right)$ باشد. اما همان طور که در مثال بالا دیدیم این محض‌سازی یکتا نیست. سوال این است که چگونه می‌توان همه‌ی این محض‌سازی‌ها رو مشخص کرد.

اگر محض‌سازی $|\psi\rangle_{AB}$ (مثلا با استفاده از قضیه‌ی ۱) داده شده باشد آن گاه می‌توان محض‌سازی‌های دیگری با دو روش زیر ساخت:

- **بزرگ کردن فضای هیلبرت** $\mathcal{H}_B$:

  در این روش سیستم B' را معرفی کرده که بعد فضای $\mathcal{H}_{B'}$ به جای d، $d+n$ باشد. در اینصورت پایه متعامد یکه فضا به صورت $\{|1\rangle_B\,, |2\rangle_B\,, \ldots\,, |d\rangle_B\,, \ldots\,, |d+n\rangle_B\}$ خواهد بود. بدیهی است سیستم B' متفاوت با سیستم B است و بردار $|\psi\rangle$ را می‌توان به عنوان عضوی از فضای $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{B'}$ نیز در نظر گرفت. همچنین به راحتی قابل بررسی است که $\mathrm{tr}_{B'}|\psi\rangle\langle\psi|_{AB'} = \rho_A$.

- **چرخاندن سیستم** B:

  فرض کنید U_B عملگر یکانی روی فضای $\mathcal{H}_B$ باشد. تعریف کنید

$$|\psi'\rangle_{AB} = \left(I_A \otimes U_B\right)|\psi\rangle_{AB}.$$

  در این صورت $|\psi'\rangle_{AB}$ نیز یک محض‌سازی از ρ_A است زیرا

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_B\left(|\psi'\rangle\langle\psi'|\right) &= \mathrm{tr}_B\left(\Big(I_A \otimes U_B\Big)|\psi\rangle\langle\psi|_{AB}\left(I_A \otimes U_B^\dagger\right)\right) \\
&= \mathrm{tr}_B\left(\Big(I_A \otimes U_B^\dagger\Big)\Big(I_A \otimes U_B\Big)|\psi\rangle\langle\psi|_{AB}\right) \\
&= \mathrm{tr}_B\left(\Big(I_A \otimes U_B^\dagger U_B\Big)|\psi\rangle\langle\psi|_{AB}\right) \\
&= \mathrm{tr}_B\left(\left(I_A \otimes I_B\right)|\psi\rangle\langle\psi|_{AB}\right) \\
&= \mathrm{tr}_B\left(|\psi\rangle\langle\psi|_{AB}\right) \\
&= \rho_A
\end{aligned} \tag{۵}$$

  که در نوشتن رابطه (۵) از خاصیت دوری اثر جزئی استفاده شده است (جلسه ۱۵ را ببینید).

قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که همه‌ی محض‌سازی‌های ρ_A از دو روش فوق (و ترکیب آن‌ها) بدست می‌آید.

قضیه ۲ فرض کنید $\mathrm{rank}\left(\rho_A\right) = r$ و $|\psi\rangle_{AB}$ یک محض‌سازی از ρ_A باشد که در آن $\dim\mathcal{H}_B = r$. در این صورت $|\varphi\rangle_{AB'}$ یک محض‌سازی دیگر برای سیستم A است اگر و تنها اگر ایزومتری[۴] $V : \mathcal{H}_B \to \mathcal{H}_{B'}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$|\varphi\rangle_{AB'} = \left(I_A \otimes V\right)|\psi\rangle_{AB}.$$

[۴] Isometry

منظور از ایزومتری عملگری است که $VV^\dagger = I_B$.[۵]

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم اگر $|\psi\rangle_{AB}$ یک محض‌سازی از سیستم A و V یک ایزومتری است، آن گاه $|\varphi\rangle_{AB'} = (I \otimes V)\,|\psi\rangle_{AB}$ باشد به طوری که $|\varphi\rangle_{AB'}$ نیز یک محض‌سازی دیگر برای سیستم A است. برای این منظور کافیست درستی تساوی $\rho_A = \mathrm{tr}_{B'}\left(|\varphi\rangle\langle\varphi|_{AB'}\right)$ را نشان دهیم که اثبات آن مشابه آنچه در بالا در مورد عملگرهای یکانی آوردیم است.

اما برای کامل شدن اثبات لازم است نشان دهیم برای هر محض‌سازی دلخواه $|\varphi\rangle_{AB'}$ می توان عملگر ایزومتری V یافت به طوری که $|\varphi\rangle_{AB'} = (I \otimes V)\,|\psi\rangle_{AB}$.

برای این منظور ابتدا تجزیه اشمیت[۶] $|\psi\rangle_{AB}$ را به صورت

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i |v_i\rangle_A |w_i\rangle_B$$

می‌نویسیم که در آن $\lambda_i > 0$ و $\{|v_1\rangle, \dots, |v_s\rangle\}$ و $\{|w_1\rangle, \dots, |w_s\rangle\}$ بردارهایی یکه و دو به دو عمود بر هم باشند. توجه کنید که در این رابطه s عدد اشمیت (و نه لزوما بعد فضا) است. حال طبق فرض داریم

$$\begin{aligned}
\rho_A &= \mathrm{tr}_B\left(|\psi\rangle\langle\psi|_{AB}\right)\\
&= \mathrm{tr}_B\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \lambda_i\lambda_j \left(|v_i\rangle_A|w_i\rangle_B\right)\left(\langle v_j|_A\langle w_j|_B\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \lambda_i\lambda_j |v_i\rangle\langle v_j|_A \delta_{ij}\\
&= \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^2 |v_i\rangle\langle v_i|_A .
\end{aligned} \tag{۶}$$

از آن جا که λ_i-ها ناصفر هستند $\mathrm{rank}\rho_A = s$ پس طبق فرض باید داشته باشیم $s = r$. همچنین چون $\dim \mathcal{H}_B = r$ بردارهای $\{|w_1\rangle, \dots, |w_r\rangle\}$ باید یک پایه‌ی متعامد یکه برای فضای $\mathcal{H}_B$ تشکیل دهند.

حال تجزیه اشمیت $|\varphi\rangle_{AB'}$ را به صورت

$$|\varphi\rangle_{AB'} = \sum_{j=1}^{t} \mu_j |u_j\rangle_A |z_j\rangle_{B'}$$

در نظر می‌گیریم. در اینجا نیز فرض می‌کنیم $\mu_j > 0$ و $\{|z_1\rangle, |z_2\rangle, \dots, |z_t\rangle\}$ و $\{|u_1\rangle, \dots, |u_t\rangle\}$ بردارهایی یکه

[۵] عملگرهای ایزومتری همانند عملگرهای یکانی ضرب داخلی را حفظ می‌کنند. اما فضای برد آن‌ها لزوما با فضای دامنه یکسان نیست و ممکن است بعد بزرگتری داشته باشد. این عملگرها در واقع یک فضا را در یک فضای بزرگتر با حفظ طول‌ها (ضرب داخلی) می‌نشانند. به راحتی قابل بررسی است که یک عملگر ایزومتری است اگر و فقط اگر یک پایه‌ی متعامد یکه از فضای دامنه را بردارهایی به طول واحد و دو به دو عمود بر هم تصویر کند.

[۶] Schmidt decomposition

و دو به دو عمود بر هم هستند. از آن جا که $|\varphi\rangle_{AB'}$ نیز یک محض‌سازی ρ_A است داریم

$$\begin{aligned}
\rho_A &= \mathrm{tr}_{B'}\left(|\varphi\rangle\langle\varphi|_{AB'}\right)\\
&= \mathrm{tr}_{B'}\left(\sum_{i,j=1}^{l}\mu_i\mu_j\left(|u_i\rangle_A|z_i\rangle_{B'}\right)\left(\langle u_j|_A\langle z_j|_{B'}\right)\right)\\
&= \sum_{i,j=1}^{l}\mu_i\mu_j|u_i\rangle\langle u_j|_A\delta_{ij}\\
&= \sum_{i=1}^{l}\mu_i^2|u_i\rangle\langle u_i|_A. \qquad (۷)
\end{aligned}$$

در این جا هم با استفاده از $\mathrm{rank}\rho_A = r$ بدست می‌آوریم $t = r$.

دو رابطه‌ی (۶) و (۷) در واقع دو قطری‌سازی عملگر ρ_A هستند و λ_i-ها و همچنین μ_j-ها مقادیر ویژه‌ی آن هستند. در واقع باید داشته باشیم $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\} = \{\mu_1,\ldots,\mu_r\}$. برای سادگی فرض می‌کنیم $\lambda_i = \mu_i$ برای هر $i = 1,\ldots,r$.

حال اگر فرض کنیم که مقادیر ویژه‌ی ρ_A تکرر 1 دارند، آن گاه بردار ویژه‌ی متناظر با هر مقدار ویژه یکتاست. با این فرض چون $|v_i\rangle$ و $|u_i\rangle$ هر دو بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه‌ی $\lambda_i^2 = \mu_i^2$ هستند، پس باید در یک راستا باشند. یعنی $\alpha_i \in \mathbb{C}$ وجود دارد به طوری که $|u_i\rangle = \alpha_i|v_i\rangle$. چون $|v_i\rangle$ و $|u_i\rangle$ هر دو بردار به طول واحد هستند $|\alpha_i| = 1$. توجه کنید که

$$|\varphi\rangle_{AB'} = \sum_{i=1}^{r}\mu_i|u_i\rangle|z_i\rangle = \sum_{i=1}^{r}\lambda_i|v_i\rangle_A(\alpha_i|z_i\rangle).$$

حال عملگر $V:\mathcal{H}_B\to\mathcal{H}_{B'}$ را روی پایه‌ی $\{|w_1\rangle,\ldots,|w_r\rangle\}$ از $\mathcal{H}_B$ به صورت

$$V|w_i\rangle = \alpha_i|z_i\rangle$$

تعریف می‌کنیم. بدیهی است که رابطه‌ی

$$\left(I\otimes V\right)|\psi\rangle_{AB} = |\varphi\rangle_{AB'}$$

برقرار است. تنها کافی است نشان دهیم V یک ایزومتری است. این مطلب نیز از تعریف V واضح است چرا که V یک پایه‌ی متعامد یکه از فضای $\mathcal{H}_B$ را به بردارهایی متعامد و یکه در فضای $\mathcal{H}_{B'}$ تصویر می‌کند (در اینجا از $|\alpha_i| = 1$ استفاده می‌کنیم).

حال فرض کنید که مقادیر ویژه‌ی ρ_A تکرار داشته باشند. مثلا فرض کنید که مقدار ویژه‌ی $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ تکرر 2 داشته باشد. یعنی فضای ویژه‌ی متناظر با این مقدار ویژه 2 بعدی است و توسط دو بردار $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle\}$ پوشیده می‌شود. به همین ترتیب این فضا توسط دو بردار $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ نیز پوشیده می‌شود. بنابراین ضرایب $c_{ij}\in\mathbb{C}$ وجود دارند به طوری که

$$|u_1\rangle = c_{11}|v_1\rangle + c_{12}|v_2\rangle \qquad \text{و} \qquad |u_2\rangle = c_{21}|v_1\rangle + c_{22}|v_2\rangle.$$

از آنجا که $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle\}$ و همچنین $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ متعامد یکه هستند ماتریس $C = (c_{ij})$ یکانی است. حال توجه کنید که

$$\begin{aligned}\mu_1|u_1\rangle|z_1\rangle + \mu_2|u_2\rangle|z_2\rangle &= \lambda_1(c_{11}|v_1\rangle + c_{12}|v_2\rangle)|z_1\rangle + \lambda_2(c_{21}|v_1\rangle + c_{22}|v_2\rangle)|z_2\rangle \\ &= \lambda_1|v_1\rangle(c_{11}|z_1\rangle + c_{21}|z_2\rangle) + \lambda_2|v_2\rangle(c_{12}|z_1\rangle + c_{22}|z_2\rangle)\end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $|z'_1\rangle = c_{11}|z_1\rangle + c_{21}|z_2\rangle$ و $|z'_2\rangle = c_{12}|z_1\rangle + c_{22}|z_2\rangle$ آنگاه با توجه به این که C یکانی است، $\{|z'_1\rangle, |z'_2\rangle\}$ متعامد یکه است و همچنین این دو بردار بر بقیه‌ی $|z_i\rangle$-ها $(i \neq 1, 2)$ عمود هستند و داریم

$$|\varphi\rangle = \sum_{i=1}^{r} \mu_i|u_i\rangle|z_i\rangle = \lambda_1|v_1\rangle|z'_1\rangle + \lambda_1|v_2\rangle|z'_2\rangle + \sum_{i=3}^{r} \mu_i|u_i\rangle|z_i\rangle.$$

ادامه‌ی این روند برای همه فضاهای ویژه[۷] به رابطه‌ای به صورت $|\varphi\rangle = \sum_i \lambda_i|v_i\rangle|z'_i\rangle$ می‌رسیم که در آن $\{|z'_1\rangle, \ldots, |z'_r\rangle\}$ متعامد یکه است. لذا می‌توانیم تعریف کنیم $V|w_i\rangle = |z_i\rangle$ که در آن V باز ایزومتری می‌شود. $\square$

مثال ۲ فرض کنید که آلیس و باب در آزمایشگاهی در دانشکده مهندسی برق دانشگاه صنعتی شریف دو سیستم A و B را به صورت درهم‌تنیده در حالت $|\psi\rangle_{AB}$ تولید کرده باشند. آلیس قرار است که به کره مریخ سفر کند و در آنجا با کمک باب (که در دانشکده است) یک پروتکل کوانتمی (مانند فرابرد) را با کمک این سیستم‌های درهم‌تنیده به اجرا بگذارند. آلیس سیستم A و باب سیستم B را بر می‌دارند، و سپس آلیس عازم سفر به مریخ می‌شود. پس از ترک آلیس، مشکلی جدی برای باب پیش می‌آید و تصمیم می‌گیرد که اجرای پروتکل را به دوستش چارلی (که در شهرستان زندگی می‌کند) واگذار کند. چارلی برای اجرای این پروتکل نیازمند سیستم B که در اختیار باب است، می‌باشد (زیرا امکان باز گرداندن آلیس و تولید سیستم درهم‌تنیده مشترک جدید وجود ندارد). پس یک راه این است که باب تمامی سیستم B را برای چارلی بفرستد. اما بدلیل زیاد شدن نرخ ارز، این ارسال پر هزینه است. سؤالی که پیش می آید این است که آیا امکان دارد که باب با ارسال تنها بخشی از سیستم خود بتواند امکان انجام پروتکل را به چارلی بدهد؟

جواب این است که در صورتی که B را بتوان به دو زیرسیستم B_1B_2 تقسیم کرد به طوری که حالت AB_1 محض باشد، این کار امکان‌پذیر است. به طور دقیق‌تر فرض کنید که باب یک عملگر ایزومتری V روی فضای $\mathcal{H}_B$ اعمال کند و آن را به فضای $\mathcal{H}_{B_1} \otimes \mathcal{H}_{B_2}$ بنگارد به طوری که $I \otimes V|\psi\rangle_{AB}$ که حالتی از سیستم AB_1B_2 است، به صورت $|\varphi\rangle_{AB_1} \otimes |v\rangle_{B_2}$ قابل نوشتن باشد.در این صورت باب کافی است که زیرسیستم B_1 را برای چارلی بفرستد. چارلی با داشتن B_1 یک حالت محض با آلیس تقسیم کرده‌اند. حال توجه کنید که $|\psi\rangle_{AB}$ و $|\varphi\rangle_{AB_1}$ هر دو محض‌سازی‌هایی از حالت آلیس یعنی $tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|_{AB}) = tr_{B_1}(|\varphi\rangle\langle\varphi|_{AB_1})$ هستند. همچنین طبق قضیه‌ی فوق هر دو محض سازی تحت یک ایزومتری از یکدیگر بدست می‌آیند. لذا چارلی با اعمال یک ایزومتری مناسب می‌تواند حالت اولیه‌ی $|\psi\rangle_{AB}$ را با داشتن $|\varphi\rangle_{AB_1}$ بدست بیاورد.

نکته ۳ در این مثال فرض شده است که باب و چارلی می‌توانند هر ایزومتری‌ای و نه فقط عملگرهای یکانی را روی سیستم خود اعمال کنند. این فرض برقرار است چون همان‌طور که قبلا هم دیدیم هر ایزومتری در واقع ترکیبی از بزرگ کردن

[۷] این روش را برای یک فضای ویژه‌ی با بعد 2 توضیح دادیم. تعمیم آن به ابعاد بالاتر مشابه است.

فضای هیلبرت و یک عملگر یکانی است. برای بزرگ کردن فضای هیلبرت یک سیستم کافی است سیستمی دیگر در حالتی کاملا مستقل به آن اضافه کنیم. نتیجه این که در فیزیک کوانتمی نه فقط عملگرهای یکانی، بلکه ایزومترها نیز عملگرهایی مجاز شناخته شده و متناظر با تحول‌هایی زمانی هستند.[۸]

تمرین ۱ فرض کنید ρ یک ماتریس چگالی است که قطری سازی آن در یک پایه‌ی متعامد یکه به فرم زیر است

$$\rho = \sum_{i=1}^{r} p_i |v_i\rangle\langle v_i|,$$

که در آن $p_i > 0$ برای هر $1 \leq i \leq r$. نشان دهید $\rho = \sum_j q_j |w_j\rangle\langle w_j|$ برای بردارهای یکه‌ی $|w_j\rangle$، اگر و تنها اگر ایزومتری $M = (m_{ji})$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر j داشته باشیم

$$\sqrt{q_j}|w_j\rangle = \sum_{i=1}^{r} m_{ji}\sqrt{p_i}|v_i\rangle$$

به طوریکه m_{ij} ها درایه‌های ماتریس ایزومتری $M = (m_{ij})$ هستند.

راهنمایی: $\sum_i \sqrt{p_i}|v_i\rangle|i\rangle$ و $\sum_j \sqrt{q_j}|w_j\rangle|j\rangle$ هر دو محض‌سازی‌هایی از ρ هستند.

تمرین ۲ سیستم A را که در حالت

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \frac{1+x}{4} & 0 & 0 & \frac{x}{2} \\ 0 & \frac{1-x}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-x}{4} & 0 \\ \frac{x}{2} & 0 & 0 & \frac{1+x}{4} \end{pmatrix} \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

قرار گرفته در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن سیستم B با بعد 4 یک محض‌سازی از این حالت را بیابید. ماتریس چگالی ρ_B را محاسبه کنید.

تمرین ۳ سیستم A را با ماتریس چگالی $\rho_A = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ در نظر بگیرید. فرض کنید $|\varphi\rangle_{AB}$ یک محض‌سازی دلخواه از ρ_A باشد. نشان دهید یک پایه متعامد یکه $\{|w_i\rangle\}$ برای سیستم B وجود دارد به طوری که اگر سیستم B در آن اندازه‌گیری شود، سیستم A بعد از اندازه‌گیری با احتمال p_i در حالت $|\psi_i\rangle$ قرار گیرد.

تمرین ۴ فرض کنید $\{|0\rangle, \dots, |d-1\rangle\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای سیستم A و ρ_A ماتریس چگالی دلخواهی باشند. نشان دهید

$$|\psi\rangle_{AA'} = \rho_A^{1/2} \otimes I_{A'} \left(\sum_{i=0}^{d-1} |i\rangle_A \otimes |i\rangle_{A'} \right)$$

یک محض‌سازی از ρ_A است. $tr_A(|\psi\rangle\langle\psi|_{AA'})$ را نیز محاسبه کنید.

[۸] تحول‌های زمانی سیستم‌های باز در حالت کلی در ادامه بررسی خواهند شد.

۳ کانال‌های کوانتومی

تا کنون با دو نوع تحول سیستم‌های کوانتومی آشنا شده‌ایم.

- تحول ناشی از اندازه‌گیری.
- تحول زمانی ناشی از اثر یک عملگر یکانی.

دیدیم اگر اندازه‌گیری $\{M_i\}$ را روی سیستم A با ماتریس چگالی ρ_A انجام دهیم، سیستم با احتمال $\mathrm{tr}\left(M_i\rho_A M_i^\dagger\right)$ به حالت $\frac{M_i\rho_A M_i^\dagger}{\mathrm{tr}\left(M_i\rho_A M_i^\dagger\right)}$ سقوط می‌کند. لذا حالت سیستم پس از اندازه‌گیری متناظر با هنگرد

$$\left\{\mathrm{tr}\left(M_i\rho_A M_i^\dagger\right); \frac{M_i\rho_A M_i^\dagger}{\mathrm{tr}\left(M_i\rho_A M_i^\dagger\right)}\right\}$$

است. ماتریس چگالی متناظر با این هنگرد برابر است با

$$\Psi\left(\rho_A\right) = \sum_i \mathrm{tr}\left(M_i\rho_A M_i^\dagger\right) \times \frac{M_i\rho_A M_i^\dagger}{\mathrm{tr}\left(M_i\rho_A M_i^\dagger\right)} = \sum_i M_i\rho_A M_i^\dagger.$$

تاکید می‌کنیم که $\Psi(\rho)$ نیز یک ماتریس چگالی است که حالت سیستم پس از اندازه‌گیری را توصیف می‌کند. در واقع نگاشت Ψ نگاشتی «خطی» است که روی فضای $\mathbf{L}(\mathcal{H}_A)$ به صورت

$$\Psi(X) = \sum_i M_i X M_i^\dagger \tag{۸}$$

عمل می‌کند و تحول ناشی از اندازه‌گیری $\{M_i\}$ روی سیستم A را توصیف می‌کند.

همچنین دیدیم اگر سیستم A بسته بوده و با محیط اطراف هیچ گونه بر هم‌کنشی نداشته باشد، تحول زمانی آن با یک ماتریس یکانی U بیان می‌شود. اگر حالت اولیه‌ی سیستم ρ_A باشد پس از تحول زمانی به $U_A\rho_A U_A^\dagger$ تغییر پیدا می‌کند. چنانچه سیستم A با محیط اطراف (E) که در حالت σ_E قرار گرفته، برهم‌کنشی داشته باشد، آنگاه حالت اولیه سیستم ترکیبی $\rho_A\otimes\sigma_E$ و بعد از تحول زمانی $U_{AE}(\rho_A\otimes\sigma_E)U_{AB}^\dagger$ خواهد بود. لذا حالت سیستم A بعد از تحول زمانی برابر است با

$$\Phi\left(\rho_A\right) = \mathrm{tr}_E\left(U_{AE}\left(\rho_A\otimes\sigma_E\right)U_{AE}^\dagger\right).$$

در اینجا هم Φ یک نگاشت خطی روی فضای $\mathbf{L}(\mathcal{H}_A)$ است و به صورت

$$\Phi(X) = \mathrm{tr}_E\left(U_{AE}\left(X_A\otimes\sigma_E\right)U_{AE}^\dagger\right) \tag{۹}$$

عمل می‌کند.

سوالی که در اینجا مطرح می شود این است که آیا دینامیک یک سیستم کوانتومی تنها ناشی از تحول زمانی و اندازه‌گیری است و یا فرآیند و مکانیزم دیگری نیز برای ایجاد تغییر در یک سیستم کوانتومی وجود دارد؟ مثلا آیا می‌توان با ترکیب اندازه‌گیری و تحول زمانی، دینامیک جدیدی متفاوت با Ψ و Φ بدست آورد؟

جلسه بعد نشان می‌دهیم که هر دینامیک کوانتومی معادل با Ψ و Φ است و همچنین این دو نیز با یکدیگر معادلند. به این معنا که هر دینامیک کوانتمی را می‌توان به صورت (۸) و (۹) نوشت و همچنین با انتخاب M_i-های مناسب Φ را می‌توان به صورت (۸) نوشت و بالعکس.

توجه کنید که هر یک از Ψ و Φ را می‌توان به عنوان یک کانال کوانتومی در نظر گرفت.