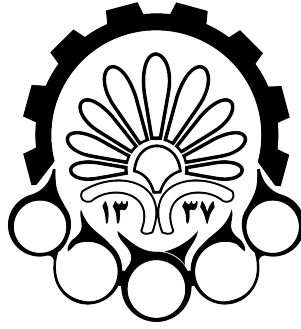




دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
گروه ریاضی محض

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش منطق ریاضی

عنوان

منطق موجّهات فورسینگ و اصل بیشینگی همکینز

نگارش

رحمان محمدپور

استاد راهنما

دکتر مسعود پورمهدیان

استاد مشاور

دکتر محمد گلشنی

شهریور ۱۳۹۴

تایید پایان نامه کارشناسی ارشد توسط دانشجو

اینجانب رحمان محمدپور متعهد می شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب تحت نظارت و راهنمایی اساتید دانشگاه صنعتی امیرکبیر بوده و به دستاوردهای دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است مطابق مقررات و روال متعارف ارجاع و در فهرست منابع و مآخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نگردیده است.

در صورت اثبات تخلف در هر زمان، مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از درجه اعتبار ساقط بوده و دانشگاه حق پیگیری قانونی خواهد داشت.

کلیه نتایج و حقوق اصل از این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی امیرکبیر می باشد. هرگونه استفاده از نتایج علمی و عملی، واگذاری اطلاعات به دیگران یا چاپ و تکثیر، نسخه برداری، ترجمه و اقتباس از این پایان نامه بدون موافقت کتبی دانشگاه صنعتی امیرکبیر ممنوع است. نقل مطالب با ذکر مآخذ بلامانع است.

امضاء:

تاریخ:

نام خانوادگی دانشجو: محمدپور

نام: رحمان

عنوان: منطق موجهات فورسینگ و اصل بیشینگی همکینز

استاد راهنما: دکتر مسعود پورمهدیان

استاد مشاور: دکتر محمد گلشنی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: منطق ریاضی

دانشگاه: دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۹۴

تعداد صفحات: ۹۱

واژگان کلیدی: اصول بیشینگی، استقلال، سازگاری، فورسینگ، کاردینال‌های بزرگ، منطق موجهات

چکیده

در این پایان‌نامه ارتباط بین فورسینگ و منطق موجهات را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این ارتباط توسط منطق‌دان‌ها در دهه‌های قبل مورد توجه قرار گرفته بود. در نهایت بندیکت لوه و جوئل همکینز این ارتباط را به نحو مطلوبی یافتند. در واقع آن‌ها آنچه را انجام دادند که رابرت سولوی برای اثبات‌پذیری انجام داده بود. این ارتباط را در فصل دوم می‌آوریم. در فصل سوم به اصول بیشینگی‌ای می‌پردازیم که توسط همکینز از دل این ارتباط به دست آمده است. سازگاری این اصول توسط همکینز به اثبات رسیده است، با این وجود ما اثبات‌های جدید و کوتاهی برای سازگاری این اصول می‌دهیم و یک نسخه جدید از اصل بیشینگی همکینز نیز معرفی کرده و سازگاری آن را به اثبات می‌رسانیم. در فصل آخر به یک قضیه جدید از محمد گلشنی می‌پردازیم که پاسخی است به سوالی از لوه و همکینز.

تقدیم بہ

نصرت ا... رشوند

و

حسین مچوزی

برخیز تا یک سو نهیم این دلق ازرق فام را
بر باد قلاشی دهیم این شرک تقوا نام را
هر ساعت از نو قبله‌ای با بت پرستی می‌رود
توحید بر ما عرضه کن تا بشکنیم اصنام را
می با جوانان خوردنم باری تمنا می‌کند
تا کودکان در پی فتند این پیر دردآشام را
از مایه بیچارگی قطمیر مردم می‌شود
ماخولیای مهتری سگ می‌کند بلعام را
زین تنگنای خلوتم خاطر به صحرا می‌کشد
کز بوستان باد سحر خوش می‌دهد پیغام را
غافل مباش از عاقلی دریاب اگر صاحب دلی
باشد که نتوان یافتن دیگر چنین ایام را
جایی که سرو بوستان با پای چوبین می‌چمد
ما نیز در رقص آوریم آن سرو سیم اندام را
دلبندم آن پیمان گسل منظور چشم آرام دل
نی نی دلارامش مخوان کز دل ببرد آرام را
دنیا و دین و صبر و عقل از من برفت اندر غمش
جایی که سلطان خیمه زد غوغا نماند عام را
باران اشکم می‌رود وز ابرم آتش می‌جهد
با پختگان گوی این سخن سوزش نباشد خام را
سعدی نصیحت نشنود و در جان در این ره می‌رود
صوفی گران جانی ببر ساقی بیار آن جام را

در نوشتن این پایان نامه افراد زیادی همکاری داشته اند، علمی و غیر علمی. همه ی این اشخاص سزاوار ستایش و قدردانی هستند.

در ابتدا مایلم از دکتر محمد گلشنی سپاسگزاری کنم. در طول مدت آشنایی من با او که شامل دو سال کارشناسی ارشد من نیز می شود، نه تنها او استاد راهنمایی خبره و حرفه ای بلکه دوستی واقعی و نزدیک برای من بوده است. از او بابت تمام آنچه برای من انجام داده است صمیمانه سپاسگزارم. از استاد راهنمای عزیزم دکتر مسعود پورمهدیان که همواره با رویی خوش میزبان مزاحمت های من بوده اند، بابت دلگرمی ها و زحمات های خالصانه صمیمانه سپاسگزاری می کنم. از پروفسور جوئل همکینز که در کمترین زمان ممکن به سوالات بنده با مهربانی پاسخ داده اند سپاسگزاری می کنم. از مدرسه ریاضیات پژوهشگاه دانش های بنیادی (IPM) که همواره محیطی انرژی بخش را برای دانشجویان فراهم می کند قدردانی می کنم. از آقایان دکتر سید محمد باقری (دانشگاه تربیت مدرس) و دکتر علیرضا مفیدی (دانشگاه صنعتی امیرکبیر) که زحمت داوری این پایان نامه را به عهده گرفتند قدردانی می کنم. از دوستان خوبم، حامد اوسطی، دکتر شهرام محسنی پور، جواد معافی و مصطفی میرابی برای کمک ها، تشویق ها، راهنمایی ها و دلگرمی هایشان صمیمانه سپاسگزاری می کنم.

در آخر ولی نه کمتر از دیگران، از پدر بزرگوار و تلاشگرم، خواهر مهربانم و خانواده ی محترم و دوست داشتنی ثمره هدایت زاده که بی منت راه علم را بر من هموار کردند صمیمانه سپاسگزارم. از فاطمه ثمره هدایت زاده، همسر مهربانم از صمیم قلب سپاسگزار می کنم که بدون شک تحمل سختی های زندگی و پیشبرد این پایان نامه بدون تشویق ها و دلگرمی هایش میسر نبود.

رحمان محمدپور
شهریور ۱۳۹۴

فهرست مطالب

۱	پیشنیازها	۱
۱	۱.۱ مدل‌های نظریه مجموعه‌ها	۱
۶	۲.۱ فورسینگ	۶
۱۶	۳.۱ منطق موجهات	۱۶
۲۲	۲ منطق موجهات فورسینگ	۲۲
۲۲	۱.۲ پیوند فورسینگ و منطق موجهات	۲۲
۲۸	۲.۲ درستی-کران‌های پایین	۲۸
۳۱	۳.۲ تمامیت-کران‌های بالا	۳۱
۴۳	۳ اصول بیشینگی همکینز	۴۳
۴۳	۱.۳ سازگاری اصول بیشینگی	۴۳
۵۷	۲.۳ یک نسخه میانی از اصل بیشینگی همکینز	۵۷
۵۹	۴ فرای S۵	۵۹
۵۹	۱.۴ کلاس فورسینگ‌های فروپاشی	۵۹
۶۱	۲.۴ برهان قضیه اصلی	۶۱
۸۳	مراجع	۸۳
۸۶	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	۸۶
۸۸	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	۸۸

مقدمه

در سال ۱۹۷۶ رابرت سُلوی^۱ مقاله‌ی درخشانی با عنوان “تعبیر اثبات‌پذیری منطق موجهات”^۲ را به چاپ رساند. او در این مقاله نشان داد که چه احکامی در منطق موجهات بر اثبات‌پذیری حاکم می‌باشد. در واقع او منطق موجهات را در حساب پیاو تعبیر کرد. بعدها منطق‌دانانی چون ملوین فیتینگ^۳، رایموند ام. اسمولیان^۴، آندراس بلاس^۵، سولوی، علی عنایت^۶ و عطاالله طوقی^۷ به برقراری ارتباط نظریه مجموعه‌ها و منطق موجهات پرداختند. به عبارتی آن‌ها به دنبال تعبیرپذیری خاصی از منطق موجهات در نظریه مجموعه‌ها بودند. سرانجام در سال ۲۰۰۷ بندیکت لوه^۸ و جوئل همکینز^۹ در مقاله “منطق موجهات فورسینگ” [۱۵] با در نظر گرفتن مدل‌های ZFC و رابطه‌ی فورسینگی روی این گردایه، منطق موجهات حاکم بر فورسینگ را یافتند. در واقع آن‌ها یک رابطه‌ی دسترسی روی این گردایه در نظر گرفتند؛ به ازای دو مدل V و W از ZFC ، گوئیم V به W دسترسی دارد، اگر W یک گسترش ژنریک از V توسط یک فورسینگ باشد. اساساً این تعبیر از منطق موجهات توسط همکینز در سال ۲۰۰۳ در مقاله‌ای با عنوان “یک اصل بیشینگی ساده” [۱۰] معرفی شده است. بعد از چاپ این مقالات محققان و دانشجویان قابل توجهی به این موضوع پرداختند، از جمله دو پایان‌نامه کارشناسی ارشد [۱۸] و [۲۷] همچنین پایان‌نامه‌های دکتری از جمله [۲۲] نوشته شدند. محققان نیز کار همکینز را گسترش دادند، برای مثال مقالاتی در ارتباط منطق موجهات و منطق‌های غیرکلاسیک، منطق

^۱Robert Solovay

^۲Provability Interpretation of Modal Logic

^۳Melvin Fitting

^۴Raymond M. Smullyan

^۵Andreas Blass

^۶Ali Enayat

^۷Attaolah Togha

^۸Benedikt Löwe

^۹Joel David Hamkins

موجهات مدل‌های درونی، منطق موجهات منطق اُمگا^{۱۰} و... نوشته شده است. همکینز نیز به کار خود در این زمینه ادامه داد و مقالات مرتبطی در این زمینه نوشت، از جمله مرجع [۱۳] که قضایای زیادی را در آن به اثبات رسانید و برخی قضایا را نیز تعمیم داد.

این پایان‌نامه متشکل از چهار فصل می‌باشد. در فصل اول پیشنیازهای نظریه مجموعه‌ها و منطق موجهات را آورده‌ایم. این پیشنیازها همگی در منابع [۱]، [۲]، [۱۹] و [۲۱] یافت می‌شوند. در فصل دوم به ارتباط بین منطق موجهات و فورسینگ-کار اساسی لووه و همکینز- می‌پردازیم. این فصل بر مبنای مراجع [۱۳] و [۱۴] می‌باشد. در این فصل قضیه اصلی لووه و همکینز را می‌آوریم که بیان می‌کند منطق موجهات فورسینگ دقیقاً $S4.2$ می‌باشد. همچنین منطق موجهات فورسینگ را تحت کلاس‌های خاص مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل سوم به اصول بیشینگی همکینز می‌پردازیم که در حقیقت اصل $S5$ در منطق موجهات می‌باشد. سازگاری این اصول را اثبات می‌کنیم. یکی از آن‌ها توسط همکینز و هیو وودین^{۱۱} و بقیه موارد آن توسط خود همکینز به اثبات رسیده‌اند. ما برای تمام این قضایا اثبات‌های جدیدی می‌دهیم که از اثبات‌های اولیه کوتاه‌تر می‌باشند. همچنین یک نسخه جدید از اصل بیشینگی همکینز که از قضیه همکینز و وودین قوی‌تر می‌باشد، معرفی می‌کنیم و سازگاری آن را به اثبات می‌رسانیم (مرجع [۲۶]).

فصل چهارم کمی مشکل‌تر است و از تکنیک‌های پیچیده برخوردار می‌باشد. این فصل به یک سوال از لووه و همکینز اختصاص دارد. سوال آن‌ها از دل منطق موجهات فورسینگ بیرون آمده است، اما به طرز غیر منتظره‌ای پاسخ دادن به آن نیازمند تکنیک‌های پیچیده و قدرتمند نظریه مجموعه‌ها از جمله فورسینگ ریدین^{۱۲} می‌باشد. در ابتدا پاسخی برای این سوال توسط ویلیام میشل^{۱۳} روی اینترنت قرار گرفت اما مشخص شد که پاسخ دچار ایراد می‌باشد. در نهایت محمد گلشنی^{۱۴} بر مبنای ایده میشل اما با جزئیات و استراتژی متفاوت مسئله را برای کاردینال‌های تالی حل کرد (نگاه کنید به [۷]). برهان این قضیه تقریباً تمام صفحات این فصل را به خود اختصاص داده است.

^{۱۰} Ω -Logic

^{۱۱} Hugh Woodin

^{۱۲} Radin Forcing

^{۱۳} William Mitchell

^{۱۴} Mohammad Golshani

فصل ۱

پیشنیازها

مقدمه: در این فصل به پیشنیازهای مورد نیاز برای قضایای اصلی سه فصل نخست می‌پردازیم. این مواد که متشکل از تعاریف، قضایا و نکات می‌باشند برای به دست آوردن قضایای اصلی کفایت می‌کنند، اما ضعیف‌تر از آن می‌باشند که بتوانند ما را در پرداختن به مباحث فصل ۴ یاری کنند، لذا پرداختن به عناصر مورد نیاز آن فصل را تا رسیدن به آن به تعویق می‌اندازیم. تقریباً تمام آنچه که در این فصل آمده در اغلب کتب درسی نظریه مجموعه‌ها و منطق موجهات از جمله [۱۹] و [۱] یافت می‌شوند. در ادامه ابتدا به بحث در مورد مدل‌های نظریه مجموعه‌ها، فورسینگ و سپس منطق موجهات می‌پردازیم.

۱.۱ مدل‌های نظریه مجموعه‌ها

همان‌طور که می‌دانیم مفهوم صدق تارسکی بر روی معنای مجموعه نهاده شده و همواره وقتی بحث از مدل در زبان منطق مرتبه اول می‌شود پای مجموعه در میان است. اما مفهوم کلاس با تعریف صدق تارسکی نیز سازگار می‌باشد ولی در واقع کار کردن با کلاس‌های سره قدرت نظریه مدل را از بین می‌برد و در این صورت خیلی از قضایای زیبا و مهم نظریه مدل‌ها را از دست خواهیم داد، شاید این موضوع از دید فراریاضیاتی قابل تأمل باشد ولی تاکنون جایگاهی در ریاضیات نداشته است، چرا که اساساً نظریه مدل‌ها به بررسی ساختارهای ملموس ریاضی می‌پردازد که به طور کلی مجموعه می‌باشند. اما اکنون ما به تعریف صدق در یک کلاس

می‌پردازیم و در حقیقت به آن نسبی سازی گوئیم ولی در ادامه خواهیم دید که این تعریف بر قدرت نظریه مرتبه اول مجموعه‌ها نمی‌افزاید ولی ابزارهای خوبی به دست می‌دهد. همچنین می‌توان نشان داد که این تعریف صدق به هیچ وجه در زبان مرتبه اول قابل بیان نمی‌باشد، که در واقع نتیجه‌ای از قضیه تارسکی در مورد تعریف ناپذیری صدق می‌باشد.

فرض کنید $\mathcal{L}_\in$ یک زبان بسط یافته از زبان $\{ \in \}$ باشد که فاقد نماد تابعی است. یک $\mathcal{L}_\in$ - ساختار عبارت است از چندتایی $\mathcal{M} = \langle M, E, \dots \rangle$ که E یک رابطه دوتایی روی کلاس M می‌باشد. همچنین منظور از نماد $\dots$ ، تعبیر بقیه عناصر زبان $\mathcal{L}_\in$ (اگر وجود داشته باشد) می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}_\in$ - ساختار با مجموعه زمینه M باشد و ϕ فرمولی در $\mathcal{L}_\in$ نسبی سازی ϕ در $\mathcal{M}$ را با استقرا به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x = y)^{\mathcal{M}} \longleftrightarrow x = y$$

$$(x = c)^{\mathcal{M}} \longleftrightarrow x = c^{\mathcal{M}}$$

$$(x \in y)^{\mathcal{M}} \longleftrightarrow x E y$$

و اگر R یک رابطه n - تایی و $R^{\mathcal{M}}$ تعبیر آن باشد. آنگاه به ازای ترم‌های $t_1, \dots, t_n$

$$(R(t_1, \dots, t_n))^{\mathcal{M}} = R^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_n^{\mathcal{M}})$$

$$(\neg \phi)^{\mathcal{M}} \longleftrightarrow \neg(\phi)^{\mathcal{M}}$$

$$(\phi \wedge \psi)^{\mathcal{M}} \longleftrightarrow (\phi)^{\mathcal{M}} \wedge (\psi)^{\mathcal{M}}$$

$$(\exists x \phi)^{\mathcal{M}} \longleftrightarrow (\exists x \in M)(\phi)^{\mathcal{M}}$$

c در بالا نماد یک ثابت می‌باشد و $c^{\mathcal{M}}$ تعبیر c در $\mathcal{M}$ می‌باشد.

می‌نویسیم $\mathcal{M} = (M, E, \dots) \models \phi$ اگر و تنها اگر $\phi^{\mathcal{M}}$.

ملاحظه ۲.۱.۱. با توجه به تعریف بالا، مفاهیم آشنای زیرساختار، زیرساختار مقدماتی، نشان دادن مقدماتی و هم‌ارز مقدماتی به راحتی قابل بیان است و در واقع همان تعاریف شناخته شده در نظریه مدل می‌باشند.

^۱Relativization

کلاس A را متعدی گوئیم، اگر به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم $x \subseteq A$. بستار تعدی A را کوچکترین کلاس متعدی شامل A تعریف کرده و با نماد $TC(A)$ نشان می‌دهیم و به ازای کاردینال κ قرار می‌دهیم $H(\kappa) = \{x : |TC(x)| < \kappa\}$. به راحتی می‌توان دید به ازای کاردینال منظم و ناشمارای κ ، $H(\kappa)$ یک مجموعه و مدلی از ZFC^- می‌باشد. منظور از ZFC^- نظریه ZFC به جز اصل موضوع مجموعه توانی می‌باشد.

قضیه ۳.۱.۱. (فروپاشی موستوفسکی) فرض کنید $M = \langle M, E, \dots \rangle$ یک $\mathcal{L}_\in$ - ساختار باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱. E خوش‌بنیاد است:

$$\forall x \subseteq M [x \neq \emptyset \longrightarrow \exists y \in x (\neg z \in x)(zEy)].$$

۲. به ازای هر $a \in M$ ، کلاس $\{x \in M : xEa\}$ یک مجموعه می‌باشد.

آنگاه

• یک تابع $K : \langle M, E, \dots \rangle \longrightarrow \langle \bar{M}, \in, \dots \rangle$ وجود دارد که $\bar{M} = Im(K)$ متعدی می‌باشد و $xEy \longrightarrow K(x) \in K(y)$.

• اگر علاوه بر شرایط ۱ و ۲، به ازای هر a, b در M داشته باشیم

$$[\forall x (xEa \longleftrightarrow xEb)] \longleftrightarrow a = b.$$

آنگاه K در قسمت قبل یک یکریختی می‌باشد و $xEy \longleftrightarrow K(x) \in K(y)$ به علاوه $\bar{M}$ و K یکتا می‌باشند.

قضیه ۴.۱.۱. (تست تارسکی-وات) فرض کنید $M = \langle M, E, \dots \rangle$ و $N = \langle N, E', \dots \rangle$ دو $\mathcal{L}_\in$ - ساختار باشند و $M \subseteq N$. موارد زیر معادلند.

۱. $M \prec N$.

۲. به ازای هر فرمول ϕ با یک متغیر آزاد x ،

$$\mathcal{N} \models \exists x \phi(x) \implies \exists a \in M; \mathcal{N} \models \phi(a)$$

حال در زیر تعریف سلسله مرتبه انباشتگی فون نیومان^۲ را می‌آوریم که نقش مهمی را در نظریه مجموعه‌ها بازی می‌کند. در واقع این سلسله مرتبه به شناخت بهتر ما از جهانی که در آن کار می‌کنیم کمک می‌کند، جهانی که با V نمایش می‌دهیم و شامل همه‌ی مجموعه‌ها می‌باشد.

تعریف ۵.۱.۱. برای اردینال α تعریف کنید:

$$V_0 = \emptyset$$

$$V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$$

و اگر α یک اردینال حدی باشد، تعریف کنید

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$$

و در نهایت قرار دهید

$$V = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} V_\alpha.$$

قضیه ۶.۱.۱. (بازتاب لوی^۳) فرض کنید نظریه T یک گسترش از ZFC باشد و $\phi_0, \dots, \phi_n$ اصولی از آن باشند. آنگاه

$$T \vdash \forall \alpha \exists \beta > \alpha \left(\bigwedge_{i \leq n} \phi_i^{V_\beta} \right)$$

و

$$T \vdash \exists M (|M| = \aleph_0 \wedge TC(M) = M \wedge \bigwedge_{i \leq n} \phi_i^M).$$

^۲John von Neumann

^۳Levy Reflection

به ازای مجموعه‌ی X فرض کنید $Def_A(X)$ مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های تعریف‌پذیر X در زبان $\mathcal{L}_\in(A \cap X)$ باشد. کورت گودل^۴ با بهره‌گیری از شهود بالای خود با بنیان گذاشتن تعریف زیر و تحلیل آن سازگاری فرضیه پیوستار تعمیم یافته و اصل انتخاب را به اثبات رساند. در واقع اساس کار گودل در اثبات سازگاری فرضیه پیوستار تعمیم یافته^۵، کنترل جهان ساخته شده توسط فون نیومان به نحو احسنست می‌باشد.

تعریف ۷.۱.۱. برای اردینال α تعریف کنید:

$$L_0[A] = \emptyset$$

$$L_{\alpha+1}[A] = Def_A(L_\alpha[A])$$

و اگر α یک اردینال حدی باشد

$$L_\alpha[A] = \bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta[A]$$

و در نهایت قرار دهید

$$L[A] = \bigcup_{\alpha \in Ord} L_\alpha[A].$$

هنگامی که A تهی باشد $L[A]$ را با L نمایش می‌دهیم و به آن جهان مجموعه‌های ساخت‌پذیر^۶ گودل گوییم.

قضیه ۸.۱.۱.

۱. $L[A]$ مدل ZFC می‌باشد.

۲. اگر $A \subseteq \omega$ آنگاه $L[A] \models GCH$.

۳. یک رابطه‌ی خوشترتیبی $<_{L[A]}$ روی $L[A]$ وجود دارد که در زبان $\mathcal{L}_\in(A)$ مطلقاً تعریف‌پذیر می‌باشد.

^۴Kurt Gödel

^۵Generalized Continuum Hypothesis

^۶Universe of Constructible Sets

۲.۱ فورسینگ

در این زیربخش فورسینگ را تعریف می‌کنیم و قضایای اصلی آن را می‌آوریم.

تعریف ۱.۲.۱. یک مفهوم فورسینگ عبارت است از یک سه تایی مرتب $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, 1_{\mathbb{P}})$ که در آن $\leq_{\mathbb{P}}$ یک رابطه‌ی مرتب جزئی روی مجموعه‌ی $\mathbb{P}$ می‌باشد و $1_{\mathbb{P}}$ عضو بیشینه $\mathbb{P}$ با رابطه‌ی $\leq_{\mathbb{P}}$ می‌باشد.

هرجا که مشکلی پیش نیاید، اندیس $\mathbb{P}$ را از $\leq_{\mathbb{P}}$ و $1_{\mathbb{P}}$ حذف می‌کنیم.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $\mathbb{P}$ یک مفهوم فورسینگ، $p, q \in \mathbb{P}$ و $A \subseteq \mathbb{P}$ باشد.

۱. گوئیم p و q سازگارند اگر $r \in \mathbb{P}$ وجود داشته باشد که $r \leq p$ و $r \leq q$. در غیر اینصورت گوئیم p و q ناسازگارند. در حالت اول می‌نویسم $q \parallel p$ و در حالت دوم می‌نویسم $p \perp q$.

۲. A در $\mathbb{P}$ چگال است، اگر به ازای هر $p \in \mathbb{P}$ وجود داشته باشد $q \in A$ که $q \leq p$.

۳. A در $\mathbb{P}$ باز است، اگر به ازای هر $p \in A$ و هر $q \leq p$ ، داشته باشیم $q \in A$.

۴. A در $\mathbb{P}$ یک پادزنجیر است، اگر هر دو عضو متمایز از A ناسازگار باشند.

۵. A یک پادزنجیر بیشینه است، اگر یک پادزنجیر باشد و در بین پادزنجیرهای $\mathbb{P}$ با رابطه شمول بیشینه باشد.

۶. گوئیم A زیر p چگال، پادزنجیر، پادزنجیر بیشینه است اگر به ترتیب $A \cap \mathbb{P}/p$ در $\mathbb{P}/p$ چگال، پادزنجیر، پادزنجیر بیشینه باشد. جایی که $\mathbb{P}/p = \{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}$.

تعریف ۳.۲.۱. زیر مجموعه ناتهی G از فورسینگ $\mathbb{P}$ یک پالایه است، اگر:

۱. به ازای هر p و q در G ، وجود داشته $r \in G$ که $r \leq p$ و $r \leq q$.

۲. به ازای هر $p \in G$ ، اگر $p \leq q$ آنگاه $q \in G$.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید V یک مدل ZFC و $\mathbb{P}$ یک فورسینگ باشد. گوییم پالایه G یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ - ژنریک است، اگر به ازای هر مجموعه‌ی چگال $D \subseteq \mathbb{P}$ که $D \in V$ ، داشته باشیم $G \cap D \neq \emptyset$.

گزاره ۵.۲.۱. فرض کنید $\mathbb{P}$ یک فورسینگ و $G \subseteq \mathbb{P}$ یک پالایه باشد. G یک پالایه ژنریک است، اگر و تنها اگر به ازای هر پادزنجر بیشینه A داشته باشیم $A \cap G \neq \emptyset$.

فرض کنید $\mathbb{P}$ یک فورسینگ باشد. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{P}$ را با رابطه القایی از $\mathbb{P}$ در نظر بگیرید، گوییم $\mathbb{Q}$ یک زیرترتیب کامل از $\mathbb{P}$ است، اگر هر پادزنجر بیشینه در آن یک پادزنجره بیشینه در $\mathbb{P}$ نیز باشد. در این صورت می‌نویسیم $\mathbb{Q} \triangleleft \mathbb{P}$.

لم ۶.۲.۱. فرض کنید $\mathbb{Q} \triangleleft \mathbb{P}$ ، آنگاه $V^{\mathbb{Q}} \subseteq V^{\mathbb{P}}$.

قضیه زیر ضمانت وجود پالایه ژنریک را به ما می‌دهد.

قضیه ۷.۲.۱. فرض کنید $\mathbb{P}$ یک فورسینگ و $\mathcal{D}$ خانواده‌ای شمارا از زیر مجموعه‌های چگال $\mathbb{P}$ باشد. آنگاه به ازای هر $p \in \mathbb{P}$ یک پالایه G شامل p وجود دارد که

$$G \cap D \neq \emptyset \quad \forall D \in \mathcal{D}.$$

قضیه ۸.۲.۱. فرض کنید $(\mathbb{P}, \leq)$ یک فورسینگ باشد. در این صورت جبر بولی کامل $\mathbb{B}$ و نگاشت $e: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{B} \setminus \{0_{\mathbb{B}}\}$ وجود دارند که:

۱. $\{e(p) : p \in \mathbb{P}\}$ در $\mathbb{B} \setminus \{0_{\mathbb{B}}\}$ چگال می‌باشد. $(\mathbb{P} \setminus \{0_{\mathbb{P}}\})$ را با رابطه ترتیبی طبیعی که از جبر آن به دست می‌آید در نظر بگیرید.

۲. برای هر p و q در $\mathbb{P}$ ، اگر $p \leq q$ آنگاه $e(p) \leq e(q)$.

۳. برای هر p و q در $\mathbb{P}$ ، اگر $p \perp q$ آنگاه $e(p) \wedge e(q) = 0_{\mathbb{B}}$.

همچنین $\mathbb{B}$ در حد یکریختی یکتا می‌باشد و آن را با $RO(\mathbb{P})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۲.۱. گوییم دو فورسینگ $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$ هم‌ارز فورسینگی می‌باشند اگر $RO(\mathbb{P})$ و $RO(\mathbb{Q})$ به عنوان جبر بولی کامل یکریخت باشند.

تعریف ۱۰.۲.۱. فورسینگ $\mathbb{P}$ را نابديهی گوئیم، اگر برای هر $p \in \mathbb{P}$ عناصر q و r در $\mathbb{P}$ وجود داشته باشند به قسمی که $q, r \leq p$ و $q \perp r$. در غیر این صورت گوئیم $\mathbb{P}$ بدیهی است.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید V مدل ZFC و $\mathbb{P}$ یک فورسینگ در V باشد ($\mathbb{P} \leq \mathbb{P}$ در V هستند). حال فرض کنید G یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ - ژنریک باشد. رابطه $\in_G$ را روی V به صورت زیر تعریف کنید:

$$a \in_G b \longleftrightarrow \exists p \in G (a, p) \in b$$

واضح است که $(V, \in_G)$ در شرایط قضیه فروپاشی موستوفسکی صدق می‌کند.

فرض کنید K_G تابع فروپاشی موستوفسکی روی $(V, \in_G)$ باشد. قرار دهید

$$V[G] = \{K_G(a) : a \in V\}.$$

فرض کنید $a \in V[G]$. به هر b که $K_G(b) = a$ یک $\mathbb{P}$ - نام برای a گوئیم. همچنین به ازای $a \in V$ به طور بازگشتی تعریف کنید $\check{a} = \{(\check{b}, 1_{\mathbb{P}}) : b \in a\}$. به راحتی دیده می‌شود که $K_G(\check{a}) = a$ و لذا $\check{a}$ یک $\mathbb{P}$ - نام برای a می‌باشد. هرچند الزاما $G \notin V$ اما می‌توان یک $\mathbb{P}$ - نام متعارف در V برای آن انتخاب کرد، قرار دهید $\dot{G} = \{(\check{p}, p) : p \in \mathbb{P}\}$ ، داریم $K_G(\dot{G}) = G$ و لذا $\dot{G}$ یک $\mathbb{P}$ - نام برای G می‌باشد.

فرض کنید $p \in \mathbb{P}$. به ازای فرمول $\phi(x_1, \dots, x_n)$ در زبان $\mathcal{L}_{\in}$ و $\mathbb{P}$ - نام‌های $\dot{a}_1, \dots, \dot{a}_n$ ، می‌نویسیم $p \Vdash \phi(\dot{a}_1, \dots, \dot{a}_n)$ به این معنی که به ازای هر پالایه $(V, \mathbb{P})$ - ژنریک G که شامل p باشد. داریم $V[G] \models \phi[K_G(\dot{a}_1), \dots, K_G(\dot{a}_n)]$. رابطه $\Vdash$ به طور استقرایی قابل تعریف می‌باشد و در واقع یک رابطه تعریف پذیر می‌باشد، اما ما از آوردن تعریف آن اجتناب می‌کنیم. همچنین از نماد $V^{\mathbb{P}}$ به عنوان یک گسترش به دست آمده از V توسط $\mathbb{P}$ استفاده می‌کنیم. نماد $\phi \Vdash_{\mathbb{P}}$ به این معنی است که $1_{\mathbb{P}} \Vdash \phi$.

سه لم مهم و کاربردی در روش فورسینگ را می‌آوریم.

لم ۱۲.۲.۱. (لم تعریف‌پذیری^۷) فرض کنید $\phi(x_1, \dots, x_n)$ یک فرمول در زبان $\mathcal{L}_{\in}$ با متغیرهای آزاد $x_1, \dots, x_n$ باشد، آنگاه $\{(\dot{p}, \dot{a}_1, \dots, \dot{a}_n) : p \Vdash \phi(\dot{a}_1, \dots, \dot{a}_n)\}$ در V تعریف‌پذیر است.

^۷Definability Lemma

لم ۱۳.۲.۱. (لم گسترش^۸) اگر $p \Vdash \phi$ و $q \leq p$ ، آنگاه $q \Vdash \phi$.

لم ۱۴.۲.۱. (لم درستی^۹) $V[G] \models \phi$ اگر و تنها اگر $p \in G$ وجود داشته باشد که $p \Vdash \phi$.

از این به بعد، برای هر $a \in V[G]$ ، از نماد $\dot{a}$ به عنوان یک $\mathbb{P}$ - نام برای a استفاده می‌کنیم به قسمی که $a = K_G(\dot{a})$. همچنین نمادهای $\dot{a}^G$ ، $\dot{a}_G$ و $\dot{a}[G]$ را نیز به جای $K_G(\dot{a})$ بکار می‌بریم.

قضیه ۱۵.۲.۱. فرض کنید V یک مدل متعدی از ZFC ، $\mathbb{P}$ یک فورسینگ و G یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ - ژنریک باشد. آنگاه

$$1. V[G] \models ZFC.$$

$$2. V \cup \{G\} \subseteq V[G] \text{ (گسترشی از } V \text{ می‌باشد).}$$

$$3. Ord^V = Ord^{V[G]}.$$

$$4. V[G] \text{ کوچکترین مدل متعدی } ZFC \text{ می‌باشد که شامل } V \cup \{G\} \text{ است و } Ord^V = Ord^{V[G]}.$$

در ادامه به معرفی فورسینگ حاصل ضربی می‌پردازیم، سپس قضایای مرتبط با آن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۶.۲.۱. فرض کنید $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in V$ دو فورسینگ باشند و رابطه $\leq$ را روی $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ به صورت $(p, q) \leq (p', q') \iff p \leq p' \wedge q \leq q'$ تعریف کنید، آنگاه $G \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ یک پالایه $(V, \mathbb{P} \times \mathbb{Q})$ - ژنریک است، اگر و تنها اگر، پالایه‌های $(V, \mathbb{P})$ - ژنریک G_1 و $(V[G_1], \mathbb{Q})$ - ژنریک G_2 وجود داشته باشند که $G = G_1 \times G_2$. همچنین اگر G_1 یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ - ژنریک و G_2 یک پالایه $(V[G_1], \mathbb{Q})$ - ژنریک باشند، آنگاه G_1 یک پالایه $(V[G_2], \mathbb{P})$ - ژنریک می‌باشد و $V[G_1][G_2] = V[G_2][G_1]$.

^۸Extension Lemma

^۹Truth Lemma

فرض کنید $\{(\mathbb{P}_i, \leq_i, \mathbf{1}_i) : i \in I\}$ خانواده‌ای از فورسینگ‌ها باشد. تکیه‌گاه p را به ازای هر $p = \langle p_i : i \in I \rangle \in \prod_{i \in I} \mathbb{P}_i$ به صورت زیر تعریف کنید

$$s(p) = \{i \in I : p_i \neq \mathbf{1}_i\}.$$

حال قرار دهید $\mathbb{P} = \{p \in \prod_{i \in I} \mathbb{P}_i : |s(p)| < \aleph_0\}$ و رابطه $\leq$ را روی $\mathbb{P}$ به صورت زیر تعریف کنید

$$p \leq q \iff p_i \leq_i q_i \quad \forall i \in I.$$

حال با قراردادن $\mathbf{1} = \langle \mathbf{1}_i : i \in I \rangle$ ، سه‌تایی $(\mathbb{P}, \leq, \mathbf{1})$ یک فورسینگ می‌باشد که به آن ضرب فورسینگ‌های $\{\mathbb{P}_i\}_{i \in I}$ با تکیه‌گاه متناهی گوئیم. فرض کنید G یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ – ژنریک باشد. قرار دهید $G_i = \{p_i : p \in G\}$ ، آنگاه G_i یک پالایه $(V, \mathbb{P}_i)$ ژنریک می‌باشد.

تعریف ۱۷.۲.۱. (فورسینگ مکرر ^{۱۰}) فرض کنید $\mathbb{P} \in V$ یک فورسینگ باشد و $\dot{\mathbb{Q}}$ یک $\mathbb{P}$ – نام برای مجموعه مرتب جزئی $\mathbb{Q}$. قرار دهید $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} = \{(p, \dot{q}) : p \in \mathbb{P} \text{ و } \mathbf{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}\}$ و رابطه $\leq$ را روی $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ به صورت زیر تعریف کنید:

$$(p, \dot{q}) \leq (p', \dot{q}') \text{ اگر و تنها اگر } p \leq p' \text{ و } p \Vdash \dot{q} \leq \dot{q}'.$$

قضیه ۱۸.۲.۱. محتوای تعریف بالا را در نظر بگیرید.

۱. فرض کنید G یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ – ژنریک باشد. قرار دهید $\mathbb{Q} = \dot{\mathbb{Q}}^G$ و فرض کنید H یک پالایه $(V[G], \mathbb{Q})$ – ژنریک باشد. آنگاه

$$G * H = \{(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} : p \in G \wedge \dot{q}^G \in H\}.$$

یک پالایه $(V, \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})$ – ژنریک می‌باشد و $V[G * H] = V[G][H]$

۲. فرض کنید K یک پالایه $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ – ژنریک باشد. آنگاه

$$G = \{p \in \mathbb{P} : \exists \dot{q} (p, \dot{q}) \in K\}$$

^{۱۰}Iterated Forcing

و

$$H = \{\dot{q}^G : \exists p (p, \dot{q}) \in K\}.$$

به ترتیب پالایه‌های $(V, \mathbb{P})$ - ژنریک و $(V[G], \dot{\mathbb{Q}}^G)$ - ژنریک می‌باشند و $K = G * H$.

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنید $\mathbb{P}$ یک فورسینگ باشد و κ یک کاردینال.

۱. گوئیم $\mathbb{P}$ خاصیت κ - بسته دارد اگر هر دنباله نزولی $\langle p_\alpha : \alpha < \lambda < \kappa \rangle$ دارای یک کران پایین در $\mathbb{P}$ باشد.

۲. گوئیم $\mathbb{P}$ دارای خاصیت $\kappa.c.c$ می‌باشد اگر کاردینال هر پادزنجیر آن از κ کمتر باشد. همچنین در حالتی که $\kappa = \omega_1$ گوئیم $\mathbb{P}$ خاصیت $c.c.c$ دارد و یا $\mathbb{P}$ یک $c.c.c$ - فورسینگ می‌باشد.

۳. گوئیم فورسینگ $\mathbb{P}$ حافظ کاردینال κ می‌باشد، اگر $\Vdash_{\mathbb{P}} \text{Card}(\kappa)$. همچنین گوئیم کاردینال‌ها را حفظ می‌کند، اگر به ازای هر کاردینال λ ، $\Vdash_{\mathbb{P}} \text{Card}(\lambda)$. منظور از $\text{Card}(x)$ یعنی x یک کاردینال می‌باشد.

۴. گوئیم فورسینگ $\mathbb{P}$ خاصیت κ - توزیع‌پذیری دارد، اگر اشتراک هر گردایه با اندازه کمتر از κ از زیرمجموعه‌های باز و چگال $\mathbb{P}$ چگال باشد.

قضیه ۲۰.۲.۱. فرض کنید $\mathbb{P}$ یک فورسینگ باشد.

۱. اگر $\mathbb{P}$ خاصیت κ - بسته داشته باشد، آنگاه $\mathbb{P}$ حافظ کاردینال‌های کوچکتر یا مساوی κ می‌باشد.

۲. اگر $\mathbb{P}$ خاصیت κ - توزیع‌پذیری داشته باشد، آنگاه هیچ دنباله جدیدی از اردینال‌ها از طول کمتر از κ اضافه نمی‌کند، به ویژه آنکه $\mathbb{P}$ حافظ کاردینال‌های کوچکتر یا مساوی κ می‌باشد.

۳. اگر $\mathbb{P}$ خاصیت $\kappa.c.c$ داشته باشد، آنگاه $\mathbb{P}$ حافظ کاردینال‌های بزرگتر یا مساوی κ می‌باشد.

قضیه ۲۱.۲.۱. فرض کنید $V[G]$ گسترشی فورسینگ از V باشد و $V \subseteq W \subseteq V^{\mathbb{P}}$. آنگاه فورسینگ‌های $\mathbb{Q} \in V$ و $\mathbb{R} \in W$ به همراه پالایه‌های $(V, \mathbb{Q})$ – ژنریک G و $(W, \mathbb{R})$ – ژنریک H وجود دارند که $W = V[G]$ و $W[H] = V^{\mathbb{P}}$.
به علاوه، اگر $\mathbb{P}$ دارای خاصیت $\kappa.c.c$ باشد، آنگاه هر دوی $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ نیز دارای خاصیت $\kappa.c.c$ می‌باشند.

گزاره ۲۲.۲.۱. فرض کنید $\mathbb{P}$ یک $\kappa.c.c$ – فورسینگ باشد، G یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ – ژنریک و $\omega < \lambda$ یک کاردینال در V باشد، آنگاه در $V[G]$ داریم

$$2^\lambda \leq [(|\mathbb{P}|^{<\kappa})^\lambda]^V.$$

گزاره ۲۳.۲.۱. فرض کنید $\mathbb{P}$ یک فورسینگ κ – بسته و $\mathbb{Q}$ فورسینگ با خاصیت $\kappa.c.c$ باشد. اگر $G \times H$ یک پالایه $(V, \mathbb{P} \times \mathbb{Q})$ – ژنریک باشد، آنگاه به ازای هر $\lambda \leq \kappa$ و هر تابع $f: \lambda \rightarrow V$ در $V[G \times H]$ قرار دارد و

$$P^{V[G \times H]}(\lambda) = P^{V[H]}(\lambda).$$

گزاره بالا از لم پرکاربرد زیر به دست می‌آید.

لم ۲۴.۲.۱. (لم ایستون^{۱۱}) فرض کنید κ یک کاردینال ناشمارا و منظم باشد. اگر $\mathbb{P}$ یک فورسینگ با خاصیت $\kappa.c.c$ و $\mathbb{Q}$ یک فورسینگ با خاصیت κ – بسته باشد، آنگاه

۱. ” κ یک کاردینال ناشمارا و منظم می‌باشد“ $\Vdash_{\mathbb{P} \times \mathbb{Q}}$

۲. ” $\mathbb{P}$ خاصیت $\kappa.c.c$ دارد“ $\Vdash_{\mathbb{Q}}$

۳. ” $\mathbb{Q}$ خاصیت κ – توزیع‌پذیری دارد“ $\Vdash_{\mathbb{P}}$

در ادامه به معرفی چند فورسینگ مهم می‌پردازیم، که با تمام سادگی‌شان تاکنون قضایای مهمی از آن‌ها به دست آمده است.

^{۱۱}Easton Lemma

فورسینگ کوهن^{۱۲}

مجموعه‌ی $\mathcal{C}_\omega = \{p : n \rightarrow \omega : n \in \omega\}$ را با رابطه عکس شمول در نظر بگیرید، به این فورسینگ، فورسینگ کوهن گوئیم. $\mathcal{C}_\omega$ یک c.c.c - فورسینگ است. فورسینگ توسط درخت سوسلین^{۱۳}

تعریف ۲۵.۲.۱. فرض کنید $(T, <)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد. گوئیم T یک درخت است، اگر به ازای هر $x \in T$ مجموعه‌ی $\text{pred}(x) = \{y \in T : y < x\}$ با رابطه $<$ خوش‌ترتیب باشد.

فرض کنید T یک درخت باشد، لذا به ازای هر $x \in T$ مجموعه‌ی $\text{pred}(x)$ با یک اردینال یکتا β یکرخت ترتیبی می‌باشد، قرار دهید $ht(x) = \beta$. همچنین به ازای اردینال α تعریف کنید

$$T_\alpha = \{x \in T : ht(x) = \alpha\}$$

و

$$ht(T) = \sup\{ht(x) + 1 : x \in T\}.$$

زیرمجموعه کلاً مرتب b از درخت T را یک شاخه گوئیم، اگر نسبت به رابطه شمول بیشینه باشد.

تعریف ۲۶.۲.۱. درخت T را یک درخت سوسلین گوئیم، اگر:

$$1. |T_0| = 1,$$

$$2. ht(T) = \omega_1,$$

۳. کاردینال هر شاخه از آن حداکثر شمارا باشد،

^{۱۲}Cohen Forcing^{۱۳}Forcing with Suslin Tree

۴. کاردینال هر پادزنجیر از آن حداکثر شمارا باشد.

فرض کنید $(T, <)$ یک درخت سوسلین باشد، قرار دهید $\mathbb{P}_T = T$ ، آنگاه $(\mathbb{P}_T, >)$ یک فورسینگ می باشد که c.c.c است.

تعریف ۲۷.۲.۱. به ازای کاردینال κ فرض کنید MA_κ جمله زیر باشد:
به ازای هر c.c.c فورسینگ $\mathbb{P}$ و هر خانواده $\mathcal{D}$ از زیر مجموعه های چگال $\mathbb{P}$ که $|D| \leq \kappa$ ، یک پالایه G وجود دارد که

$$G \cap D \neq \emptyset \quad \forall D \in \mathcal{D}$$

MA جمله MA_κ ($\forall \kappa < 2^\omega$) می باشد.

واضح است که $\text{MA}_{\omega_1} + \neg \text{CH}$ نتیجه می دهد هیچ درخت سوسلینی وجود ندارد.

قضیه ۲۸.۲.۱. فرض کنید GCH در V برقرار باشد و κ کاردینالی با هم پایانی ناشمارا باشد. آنگاه یک c.c.c - فورسینگ $\mathbb{P}$ وجود دارد که $V^\mathbb{P}$ مدلی از $\kappa = 2^{\aleph_0} + \text{MA}$ می باشد.

فورسینگ Add

به ازای کاردینال κ و اردینال α مجموعه ی زیر را با رابطه عکس شمول در نظر بگیرید

$$Add(\kappa, \alpha) = \{p : \kappa \times \alpha \longrightarrow 2 : |p| < \kappa\}.$$

این مجموعه مرتب جزئی یک فورسینگ می باشد که α - تا زیر مجموعه جدید به κ اضافه می کند.

قضیه ۲۹.۲.۱. فرض کنید κ یک کاردینال منظم باشد و $2^{<\kappa} = \kappa$. به ازای کاردینال $\kappa < \lambda$ اگر $\lambda^\kappa = \lambda$. آنگاه $Add(\kappa, \lambda)$ دارای خواص زیر می باشد،

۱. κ - بسته می باشد.

۲. $\kappa^+ . c.c$ می باشد.

۳. $2^\kappa = \lambda$ $\Vdash_{Add(\kappa, \lambda)}$

۴. $Add(\kappa, \lambda)$ هیچ زیر مجموعه‌ای با طول کمتر از κ اضافه نمی‌کند.

فورسینگ فروپاشی^{۱۴}

به ازای کاردینال κ و اردینال $\kappa < \alpha$ مجموعه‌ی $Coll(\kappa, \alpha) = \{p : \beta \longrightarrow \alpha : \beta < \kappa\}$ را با رابطه عکس شمول در نظر بگیرید، به این فورسینگ، فورسینگ فروپاشی گوئیم. اگر G یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ - ژنریک باشد، آنگاه در $V[G]$ یک تابع پوشا $F : \kappa \longrightarrow \alpha$ وجود دارد.

تعریف ۳۰.۲.۱. کاردینال منظم و ناشمارای κ را دسترس‌ناپذیر گوئیم، اگر برای هر کاردینال $\lambda < \kappa$ داشته باشیم $\kappa < 2^\lambda$.

فورسینگ فروپاشی لوی^{۱۵}

به ازای کاردینال منظم κ و کاردینال دسترس‌ناپذیر $\kappa < \mu$ مجموعه‌ی

$$Col(\kappa, < \mu) = \{p : \mu \times \kappa \longrightarrow \mu : |p| < \kappa \wedge p(\alpha, \beta) < \alpha \forall (\alpha, \beta) \in dom(p)\}$$

را با رابطه عکس شمول در نظر بگیرید. آنگاه

۱. $Col(\kappa, < \mu)$ یک فورسینگ κ - بسته می‌باشد.

۲. $Col(\kappa, < \mu)$ یک $\mu.c.c$ - فورسینگ می‌باشد.

۳. اگر G یک پالایه $(V, Col(\kappa, < \mu))$ - ژنریک باشد، آنگاه

$$V[G] \models \forall \alpha; \kappa \leq \alpha < \mu \quad |\alpha| = \kappa$$

و

$$V[G] \models \mu = \kappa^+.$$

قضیه ۳۱.۲.۱.

^{۱۴}Collapse Forcing

^{۱۵}Levy Collapse Forcing

۱. اگر $\mathbb{P}$ یک مفهوم فورسینگ از اندازه κ باشد و $| \kappa | = \aleph_0$ و $\Vdash_{\mathbb{P}} \text{آنگاه } Col(\omega, \kappa) \approx \mathbb{P}$.
۲. اگر κ یک کاردینال دسترس ناپذیر باشد و $\mathbb{P} \in V_\kappa$ یک مفهوم فورسینگ باشد، آنگاه $V^\mathbb{P} \subseteq V^{Col(\omega, < \kappa)}$.

۳.۱ منطق موجها

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $\mathcal{P}$ یک مجموعه‌ی شمارا از نمادهای گزاره‌ای باشد. با اضافه کردن دو عملگر یک‌تایی $\Diamond$ (امکان) و $\Box$ (ضرورت) به زبان منطق گزاره‌ای کلاسیک، زبان منطق موجها گزاره‌ای به دست می‌آید که آن را با $\mathcal{L}_m$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۳.۱. فرمول‌های زبان $\mathcal{L}_m$ با استقرا به صورت زیر تعریف می‌شوند.

۱. هر $p \in \mathcal{P}$ یک فرمول (اتمیک) می‌باشد.
۲. اگر τ یک فرمول باشد، آنگاه $\neg \tau$ یک فرمول می‌باشد.
۳. اگر τ و τ' فرمول باشند، آنگاه $\tau \vee \tau'$ یک فرمول می‌باشد.
۴. اگر τ یک فرمول باشد، آنگاه $\Diamond \tau$ و $\Box \tau$ فرمول می‌باشند.
۵. τ یک فرمول است اگر و تنها اگر توسط ۴ - ۱ به دست بیاید.

ملاحظه ۳.۳.۱. عملگرهای $\longleftrightarrow$ ، $\longrightarrow$ و $\wedge$ نیز به مانند منطق گزاره‌ای کلاسیک تعریف می‌شوند.

$\Diamond \tau$ را بخوانید τ ممکن است. و $\Box \tau$ را بخوانید τ لازم است.

تعریف ۴.۳.۱. یک جایگزینی یکنواخت^{۱۶} عبارت است از یک تابع

$$\sigma : \text{Sent}(\mathcal{L}_m) \longrightarrow \text{Sent}(\mathcal{L}_m)$$

^{۱۶}Uniform Substitution

به طوری که به ازای هر فرمول τ و τ' داریم

$$\sigma(\tau \vee \tau') = \sigma(\tau) \vee \sigma(\tau')$$

$$\sigma(\Diamond \tau) = \Diamond \sigma(\tau)$$

$$\sigma(\Box \tau) = \Box \sigma(\tau)$$

$$\sigma(\neg \tau) = \neg \sigma(\tau).$$

$Sent(\mathcal{L}_m)$ مجموعه‌ی تمام جملات زبان $\mathcal{L}_m$ می‌باشد.

تعریف ۵.۳.۱. یک ساختار (مدل) کریپکی برای زبان $\mathcal{L}_m$ عبارت است از سه‌تایی $(F, \mathcal{R}, \mathcal{V})$ که دارای شرایط زیر می‌باشد:

۱. $\mathcal{F} = (F, \mathcal{R})$ یک گراف ناتهی جهت‌دار.

۲. $\mathcal{V} : \mathcal{P} \longrightarrow P(F)$ یک تابع می‌باشد.

به $\mathcal{F} = (F, \mathcal{R})$ یک قاب و به $\mathcal{V}$ یک ارزش‌دهی می‌گوییم.

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنید $\mathcal{M} = (F, \mathcal{R}, \mathcal{V})$ یک مدل کریپکی باشد. مفهوم ارضاپذیری فرمول τ در نقطه w از F را بانماد $\mathcal{M}, w \models \tau$ نشان می‌دهیم و به استقرا به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

۱. اگر $\tau = p$ یک نماد گزاره‌ای باشد، $\mathcal{M}, w \models \tau$ اگر و تنها اگر، $w \in \mathcal{V}(p)$.

۲. اگر $\tau = \neg \tau'$ ، آنگاه $\mathcal{M}, w \models \tau$ اگر و تنها اگر این گونه نباشد که $\mathcal{M}, w \models \tau'$.

۳. اگر $\tau = \tau' \vee \tau''$ ، آنگاه، $\mathcal{M}, w \models \tau$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M}, w \models \tau'$ یا $\mathcal{M}, w \models \tau''$.

۴. اگر $\tau = \Diamond \tau'$ آنگاه $\mathcal{M}, w \models \tau$ اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $v \in F$ که $w \mathcal{R} v$ و $\mathcal{M}, v \models \tau'$.

۵. اگر $\tau = \Box \tau'$ آنگاه $\mathcal{M}, w \models \tau$ اگر و تنها اگر به ازای هر $v \in F$ که $w \mathcal{R} v$ و $\mathcal{M}, v \models \tau'$.

۱. فرض کنید $\mathcal{F}$ یک قاب و τ یک فرمول وجهیت باشد، گوییم τ برای $\mathcal{F}$ در نقطه $w \in F$ درست است، اگر به ازای هر ارزش دهی $\mathcal{V}$ داشته باشیم $\tau \models ((\mathcal{F}, \mathcal{V}), w)$.

۲. فرض کنید $\mathcal{F} = (F, \mathcal{R})$ یک قاب و τ یک فرمول وجهیت باشد، گوییم τ برای $\mathcal{F}$ درست است، اگر τ برای F به ازای هر $w \in F$ درست باشد.

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنید $\mathcal{F} = (F, \mathcal{R})$ یک قاب متناهی باشد و $w \in F$. زیرقاب تولید شده توسط w را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{F}[w] = (F[w], \mathcal{R} \cap F[w] \times F[w])$$

که در آن $F[w]$ مجموعه‌ی تمام نقاط F است که یک مسیر متناهی از w به آنها وجود دارد (از جمله خود w).

گزاره ۸.۳.۱. فرض کنید $\mathcal{F} = (F, \mathcal{R})$ یک قاب باشد. فرمول τ در نقطه $w \in F$ برای قاب $\mathcal{F}$ درست می‌باشد، اگر و تنها اگر در نقطه w برای قاب $\mathcal{F}[w]$ درست باشد.

برهان. با استقرا روی فرمول‌ها واضح می‌باشد. $\square$

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنید C کلاسی از قاب‌ها و T یک نظریه در زبان وجهیت باشد.

۱. گوییم T نسبت به C درست می‌باشد، اگر هر فرمول در T برای هر قاب در C درست باشد.

۲. گوییم T نسبت به C تمام می‌باشد، اگر هر فرمول درست در همه‌ی قاب‌ها در C عضوی از T باشد.

۳. گوییم T توسط C مشخص^{۱۷} می‌شود، اگر T نسبت به C هم درست و هم تمام باشد.

برهان در منطق موجهات

در زیر فهرستی از برخی اصول (جملات) منطق موجهات را می‌آوریم که در فصل ۲ مدام از آنها استفاده خواهیم کرد.

^{۱۷}Charactrized

$$(S) \quad \Box p \longrightarrow p$$

$$(۵) \quad \Diamond \Box p \longrightarrow p$$

$$(۴) \quad \Box p \longrightarrow \Box \Box p$$

$$(\cdot ۲) \quad \Diamond \Box p \longrightarrow \Box \Diamond p$$

$$(Dual) \quad \Diamond p \longleftrightarrow \neg \Box \neg p$$

$$(Löb) \quad \Box(\Box \tau \longrightarrow \tau) \longrightarrow \Box \tau$$

$$(K) \quad \Box(p \longrightarrow q) \longrightarrow (\Box p \longrightarrow \Box q)$$

$$(\cdot ۳) \quad (\Diamond p \wedge \Diamond q) \longrightarrow \Diamond[(\Diamond p \wedge q)(p \wedge \Diamond p)]$$

در زیر تعریف K – برهان و قوانین استنتاج آن را تعریف می‌کنیم، در این رساله منظور از یک برهان در منطق موجّهات همواره یک K – برهان می‌باشد. ابتدا قوانین استنتاج K – برهان را می‌آوریم.

تعریف ۱۰.۳.۱. قوانین K – برهان عبارتند از:

- (قیاس استثنایی) از τ و $\tau \longrightarrow \tau'$ ، اثبات می‌شود.
- (جایگزینی یکنواخت) اگر σ یک جایگزینی یکنواخت باشد و τ یک فرمول باشد، از τ ، $\sigma(\tau)$ اثبات می‌شود.
- (ضرورت) از τ ، $\Box \tau$ اثبات می‌شود.

تعریف ۱۱.۳.۱. K – اصول عبارت است از کوچکترین مجموعه از جملات که شامل K و $Dual$ باشد، که تحت جایگذاری یکنواخت تاتولوژی‌ها بسته می‌باشد.

تعریف ۱۲.۳.۱. یک K – برهان عبارت است از یک دنباله متناهی از جملات که هر جمله یا یک K – اصل می‌باشد، یا با استفاده از قوانین استنتاج از جملات قبلی خود به دست آمده است.

گوییم مجموعه جملات T جمله τ را اثبات می‌کند، اگر $\tau_1, \dots, \tau_n$ در T وجود داشته باشند به طوری که برای τ برای $(\tau_1 \wedge \dots \wedge \tau_n) \rightarrow \tau$ یک K -برهان وجود داشته باشد. در این حالت می‌نویسیم $T \vdash \tau$.

فرض کنید T مجموعه‌ای از جملات در زبان $\mathcal{L}_m$ باشد، $\bar{T}$ را قرار دهید مجموعه‌ی همه‌ی فرمول‌های وجهیت که T آن را اثبات می‌کند.

از این به بعد به $\bar{T}$ یک نظریه وجهیت و یا منطق وجهیت می‌گوییم و منظورمان از T همواره $\bar{T}$ می‌باشد.

تعریف ۱۳.۳.۱.

$$S\mathbf{4} = \{K, Dual, S, \mathbf{4}\}$$

$$S\mathbf{4} \cdot \mathbf{2} = \{S\mathbf{4}, \mathbf{2}\}$$

$$S\mathbf{4} \cdot \mathbf{3} = \{S\mathbf{4}, \mathbf{3}\}$$

$$S\mathbf{5} = \{S\mathbf{4}, \mathbf{5}\}$$

رابطه $\leq$ روی مجموعه X را یک پیش‌ترتیب گوییم، اگر بازتابی و متعدی باشد و پیش‌ترتیب خطی گوییم، اگر هر دو عضو X مقایسه پذیر باشند. به ازای مجموعه پیش‌مرتب X فرض کنید $X/ \equiv$ خارج قسمت ترتیبی آن باشد، واضح است که X یک مجموعه مرتب جزئی است و اگر $\leq$ پیش‌ترتیب خطی باشد، $X/ \equiv$ نیز کلا مرتب است. مجموعه پیش‌مرتب X را یک پیش‌جبر بولی گوییم، اگر خارج قسمت تقسیمی آن یک جبر بولی باشد.

همواره خارج قسمت تقسیمی $(X, \leq)$ را با X^* نشان می‌دهیم.

گزاره ۱۴.۳.۱. $S\mathbf{4} \cdot \mathbf{3}$ به وسیله کلاس تمام قاب‌های پیش‌مرتب خطی متناهی مشخص می‌شود.

□

برهان. نگاه کنید به [۱] تمرین ۴۰۳۳ قضیه، ۴۰۹۶ و لم ۴۰۴.

گزاره ۱۵.۳.۱. $S\mathbf{5}$ به وسیله کلاس تمام قاب‌ها با رابطه هم‌ارزی که تنها یک کلاس هم‌ارزی دارند مشخص می‌شود.

□

برهان. نگاه کنید به [۱] قضایای ۴۰.۲۹ و ۴۰.۹۶.

ملاحظه ۱۶.۳.۱.

۱. فرض کنید $\mathcal{F} = (F, \mathcal{R})$ یک قاب باشد و a عضوی خارج از آن، همچنین فرض کنید $x \in F$. حال $\mathcal{F}' = (F', \mathcal{R}')$ را در نظر بگیرید که در آن $F' = F \cup \{a\}$ و $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \{(a, x), (x, a)\}$. فرمول τ را در نظر بگیرید و فرض کنید $M = (\mathcal{F}, \mathcal{V})$ یک مدل کریپکی و $w \in F$ باشد. آنگاه $(M, w) \models \tau$ اگر و تنها اگر $(M', w) \models \tau$ جایی که $M' = (\mathcal{F}', \mathcal{V})$.

۲. فرض کنید $(X, \leq)$ یک مجموعه پیش مرتب خطی باشد و $x \in X$ ، مجموعه $\{y \in X : x \leq y\}$ را در نظر بگیرید با رابطه القایی از X ، لذا $\{y \in X : x \leq y\}$ نیز یک مجموعه پیش مرتب خطی است و لذا کلاس تمام مجموعه‌های پیش مرتب خطی تحت زیرقاب تولید شده بسته می‌باشد. همچنین اگر $(X, \leq)$ یک جبر بولی باشد و $x \in X$ آنگاه $X/ \equiv$ یک جبر بولی است و لذا $\{y \in X/ : x \leq y\}$ یک جبر بول می‌باشد، بنابراین $\{y \in X : x \leq y\}$ یک پیش جبر بولی می‌باشد، که نتیجه می‌دهد کلاس تمام پیش جبرهای بولی تحت زیرقاب تولید شده بسته می‌باشد.

فصل ۲

منطق موجّهات فورسینگ

همانطور که در مقدمه وعده داده بودیم، قضیه اصلی لئوه و همکینز را در این فصل می‌آوریم. علاوه بر قضیه اصلی لئوه و همکینز قضایای دیگر هم پا به پای آن اثبات خواهند شد. بالطبع در پرتو قضایا و سوالات مرتبط دیگر، اساس قضیه اصلی را بیشتر درک خواهیم کرد و نگاه عمیق لئوه و همکینز ملموس‌تر خواهد شد. آنچه در ادامه می‌آید اساساً قلب استدلال لئوه و همکینز در اثبات قضایا می‌باشد.

۱.۲ پیوند فورسینگ و منطق موجّهات

در این فصل همواره فرض بر آن است که نظریه سازگار T در زبان نظریه مجموعه‌ها و شامل ZFC می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید T یک نظریه سازگار در زبان $\mathcal{L}_\in(X)$ باشد، کلاس تعریف‌پذیر Γ را در زبان $\mathcal{L}_\in(X)$ یک کلاس از فورسینگ‌ها گوئیم، اگر به ازای هر مدل V از T داشته باشیم:

۱. هر عضو Γ^V یک فورسینگ باشد،

۲. Γ^V شامل فورسینگ بدیهی باشد،

۳. اگر $\mathbb{P} \in \Gamma^V$ و $\mathbb{Q} \in \Gamma^{V^{\mathbb{P}}}$ ، آنگاه $\mathbb{P} * \mathbb{Q} \in \Gamma^V$ که در آن $\mathbb{Q}$ یک $\mathbb{P}$ - نام برای $\mathbb{Q}$ می‌باشد،

۴. اگر $\mathbb{P} \in \Gamma^V$ و $(\mathbb{P} \approx \mathbb{Q})^V$ ، آنگاه $\mathbb{Q} \in \Gamma^V$.

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنید Γ یک کلاس از فورسینگ‌ها و V مدلی از ZFC باشد. گوییم:

۱. Γ پایا^۱ می‌باشد، اگر $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in \Gamma^V$ نتیجه دهد $\mathbb{P} \in \Gamma^{V^{\mathbb{Q}}}$.

۲. Γ جهت‌دار^۲ می‌باشد، اگر به ازای هر $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$ در Γ^V ، فورسینگ‌های $\mathbb{R} \in \Gamma^{V^{\mathbb{P}}}$ و $\mathbb{T} \in \Gamma^{V^{\mathbb{Q}}}$ وجود داشته باشند که $(\mathbb{R} \approx \mathbb{P} * \dot{\mathbb{S}})^V$ و $(\mathbb{R} \approx \mathbb{Q} * \dot{\mathbb{T}})^V$ ، که در آن $\dot{\mathbb{S}}$ یک $\mathbb{P}$ - نام برای $\mathbb{S}$ و $\dot{\mathbb{T}}$ یک $\mathbb{Q}$ - نام برای $\mathbb{T}$ می‌باشند.

۳. Γ خطی می‌باشد، اگر به ازای هر $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$ در Γ^V یا $\mathbb{R} \in \Gamma^{V^{\mathbb{Q}}}$ وجود داشته باشد که $(\mathbb{Q} \approx \mathbb{P} * \dot{\mathbb{R}})^V$ و $\mathbb{S} \in \Gamma^{V^{\mathbb{P}}}$ وجود داشته باشد که $(\mathbb{Q} \approx \mathbb{P} * \dot{\mathbb{S}})^V$.

تعریف ۳.۱.۲. فرض کنید $Coll$ کلاس تمام فورسینگ‌های $\mathbb{P}$ باشد که به ازای یک اردینال α داریم $\mathbb{P} \approx Coll(\omega, \alpha)$.

قضیه ۴.۱.۲. $Coll$ یک کلاس خطی پایا از فورسینگ‌ها می‌باشد که تحت ضرب بسته می‌باشد.

برهان. فرض کنید V مدلی از ZFC باشد. به وضوح $Coll^V$ شامل فورسینگ بدیهی می‌باشد. با توجه به قضیه ۳.۱.۲.۱ داریم $Coll(\omega, \max\{|\alpha|, |\beta|\}) \approx Coll(\omega, \alpha) * Coll(\omega, \beta)$ ، لذا شرط ۳ تعریف ۱، ۲، ۱ برقرار می‌باشد. به طور مشابه داریم $Coll(\omega, \alpha) \times Coll(\omega, \beta) \approx Coll(\omega, \max\{|\alpha|, |\beta|\})$ ، پس تحت ضرب نیز بسته می‌باشد. شرط چهارم نیز به وضوح برقرار می‌باشد. از طرفی چون هر شرط در $Coll(\omega, \alpha)$ متناهی می‌باشد، لذا بین مدل‌های متعددی مطلق می‌باشد، که نشان می‌دهد $Coll$ پایا می‌باشد. حال نشان می‌دهیم $Coll$ خطی می‌باشد.

فرض کنید $Coll(\omega, \alpha)$ و $Coll(\omega, \beta)$ در $Coll$ باشند. فرض کنید $\beta \leq \alpha$. حال قرار دهید $\mathbb{P} = \{p : n \rightarrow [\beta, \alpha]\}$ ، با توجه به قضیه ۳.۱.۲.۱ داریم $Coll(\omega, \beta) * \dot{\mathbb{P}} \approx Coll(\omega, \alpha)$ که نشان می‌دهد $Coll$ خطی می‌باشد. $\square$

تعریف ۵.۱.۲. فرض کنید κ یک کاردینال مطلقاً تعریف‌پذیر در زبان $\mathcal{L}_{\in}(X)$. $Coll_{\kappa}$ را تعریف میکنیم کلاس تمام فورسینگ‌های $\mathbb{P}$ که به ازای یک اردینال α داریم $\mathbb{P} \approx Coll(\kappa, \alpha)$.

^۱Persistent

^۲Directed

قضیه ۶.۱.۲. به ازای کاردینال κ که منظم و تعریف پذیر در زبان $\mathcal{L}_\in(X)$ می باشد، $Coll_\kappa$ یک کلاس خطی پایا می باشد که تحت ضرب بسته است.

برهان. مشابه برهان قضیه ۴.۱.۲ □

سه تایی $(\pi(X), T, \Gamma)$ را در نظر بگیرید که در آن $\pi(X)$ نشان دهنده مجموعه ی X به عنوان پارامترهای زبان، T یک نظریه سازگار در زبان $\mathcal{L}_\in(X)$ و Γ یک کلاس از فورسینگ ها در زبان $\mathcal{L}_\in(X)$ می باشد که تحت زیرقاب تولید شده بسته می باشد. فرض کنید $Sent(\mathcal{L}_\in(X))$ مجموعه ی تمام جملات زبان $\mathcal{L}_\in(X)$ باشد.

تعریف ۷.۱.۲. تابع $H : Sent(\mathcal{L}_m) \rightarrow Sent(\mathcal{L}_\in(X))$ که در شرایط زیر صدق می کند یک $(\pi(X), T, \Gamma)$ - ترجمه و یا به طور ساده ترجمه ^۳ نامیده می شود.

$$1. H(\tau \wedge \tau') = H(\tau) \wedge H(\tau')$$

$$2. H(\neg \tau) = \neg H(\tau)$$

$$3. \Box_\Gamma \tau =_{def} H(\Box \tau) = \forall \mathbb{P} \in \Gamma \Vdash_{\mathbb{P}} H(\tau)$$

$$4. \Diamond_\Gamma \tau =_{def} H(\Diamond \tau) = \exists \mathbb{P} \in \Gamma \Vdash_{\mathbb{P}} H(\tau)$$

گزاره ۸.۱.۲. فرض کنید $\mathcal{P}$ مجموعه ی تمام متغیرهای گزاره ای زبان $\mathcal{L}_m$ باشد، آنگاه هر تابع $h : \mathcal{P} \rightarrow Sent(\mathcal{L}_\in(X))$ را می توان به طور یکتا به یک $(\pi(X), T, \Gamma)$ - ترجمه گسترش داد.

برهان. با استفاده از لم زورن به راحتی اثبات می شود. □

به ازای سه تایی $(\pi(X), T, \Gamma)$ قرار دهید

$$\mathcal{H}(\pi(X), T, \Gamma) = \{H : (\pi(X), T, \Gamma) \text{ - ترجمه است.}\}$$

^۳Translation

حال تعریف می کنیم:

$$Force(\pi(X), T, V, \Gamma) = \{\tau \in \mathcal{L}_m : \forall H \in \mathcal{H}(\pi(X), T, \Gamma) [V \models T \implies V \models H(\tau)]\}$$

و

$$Force(\pi(X), T, \Gamma) = \bigcap_{V \models T} Force(\pi(X), T, V, \Gamma).$$

دقت داریم مجموعه های بالادر فرا زبان ساخته شده اند. هرگاه که $X = \emptyset$ ، $T = ZFC$ یا Γ کلاس تمام فورسینگ ها باشد آنها را در نمادگذاری حذف می کنیم. در ادامه مفهوم گزاره کنترلی را می آوریم. تعدادی از آنها را معرفی می کنیم و خواهیم دید که این مفاهیم چگونه در استدلال ها به کار می روند و به نقشی اساسی آنها در استدلال ها پی خواهیم برد.

تعریف ۹.۱.۲. فرض کنید Γ یک کلاس از فورسینگ ها در زبان $\mathcal{L}_\in$ ، V مدلی از نظریه مجموعه ها و b و s جملاتی در زبان $\mathcal{L}_\in$ باشند.

۱. b یک Γ - دکمه ^۴ روی V می باشد، اگر

$$V \models \Box_\Gamma \Diamond_\Gamma \Box_\Gamma b.$$

Γ - دکمه b فشرده می باشد، اگر $V \models b$ و در غیر این صورت می گوئیم b نافشرده است.

۲. s یک Γ - سویچ ^۵ روی V می باشد، اگر $V \models \Box_\Gamma \Diamond_\Gamma s \wedge \Box_\Gamma \Diamond_\Gamma \neg s$.

تعریف ۱۰.۱.۲. فرض کنید Γ یک کلاس از فورسینگ ها در زبان $\mathcal{L}_\in$ و V مدلی از نظریه مجموعه ها باشد.

۱. فرض کنید α یک اردینال ناصفر و یا $\alpha = Ord^V$ باشد. یک Γ - کنترلگر ^۶ از طول α

روی V یک دنباله $r = \langle r_\beta : \circ \neq \beta < \alpha \rangle$ می باشد که در شرایط زیر صدق می کند.

$$\forall \beta < \alpha, \beta \neq \circ \quad V \models \neg r_\beta,$$

^۴Button

^۵Switch

^۶ در مقالات کلمات Ratchet و Volume Control به کار رفته است.

$$\forall \beta < \alpha, \beta \neq \circ \quad V \models \Box_{\Gamma} \Diamond_{\Gamma} \Box_{\Gamma} r_{\beta},$$

$$\forall \gamma < \beta < \alpha, \beta, \gamma \neq \circ \quad V \models \Box_{\Gamma} (r_{\beta} \longrightarrow r_{\gamma}),$$

$$\forall \beta + 1 < \alpha, \beta \neq \circ \quad V \models \Box_{\Gamma} (\neg r_{\beta+1} \longrightarrow \Diamond_{\Gamma} (r_{\beta} \wedge \neg r_{\beta+1})).$$

همچنین قرار می‌دهیم $r_{\circ} = \top$ که نماد توتولوژی می‌باشد.

۲. Γ - کنترلگر r را یکنواخت گوئیم، اگر فرمول $r(z)$ با یک متغیر آزاد در زبان $\mathcal{L}_{\in}(X)$ وجود داشته باشد که به ازای هر اردینال α ، $r_{\alpha} = r(\alpha)$.

۳. به یک Γ - کنترلگر یکنواخت از طول Ord یک Γ - کنترلگر بلند روی V گوئیم، اگر هر Γ - گسترش از V تنها تعداد کراندار از $r(\alpha)$ ها را برقرار کند.

به جمله‌ای که در یکی از تعاریف ۹.۱.۲ و ۱۰.۱.۲ صدق کند یک جمله Γ - کنترلی گوئیم. گوئیم Γ - کنترلگر r روی V دارای مقدار β می‌باشد، اگر $V \models r_{\beta} \wedge \neg r_{\beta+1}$. فرض کنید θ یک جمله کنترلی باشد، گوئیم θ اجرا می‌شود، اگر وضعیت آن تغییر کند، مثلاً اگر θ یک Γ - دکمه روی V باشد، هنگامی که توسط عضوی از Γ فشرده می‌شود، گوئیم اجرا شده است و یا مثلاً زمانی که مقدار یک کنترلگر افزایش می‌یابد.

تعریف ۱۱.۱.۲. فرض کنید $\mathcal{K}$ مجموعه‌ای از جملات Γ - کنترلی روی V باشد، گوئیم $\mathcal{K}$ یک خانواده مستقل می‌باشد، اگر هر زیر مجموعه (الگو^۷) متناهی A از $\mathcal{K}$ بتواند توسط Γ اجرا شود بدون آنکه عضوی از $\mathcal{K}$ خارج از A اجرا شود.

گوئیم V دارای یک خانواده یکنواخت از Γ - دکمه‌ها به تعداد Ord دارد، اگر فرمول $\phi(z)$ با یک متغیر آزاد در زبان $\mathcal{L}_{\in}(X)$ وجود داشته باشد که

$$\phi(\alpha) = b_{\alpha}.$$

و $\{b_{\alpha} : \alpha \in Ord\}$ خانواده‌ای از Γ - دکمه‌ها باشد که تنها زیرمجموعه‌های کراندار آن مستقل باشند و به‌علاوه در هر Γ - گسترش از V تنها تعداد کراندار از دکمه‌ها فشرده شوند.

^۷Pattern

تعریف ۱۲.۱.۲. یک $(\pi(X), T, V, \Gamma)$ – برچسب‌گذاری^۸ از قاب F ، یک تابع $l : F \rightarrow \mathcal{L}_\in(X)$ می‌باشد. به طوری که :

۱. به ازای هر $\mathbb{P} \in \Gamma^V$ و هر پالایه $(V, \mathbb{P})$ – ژنریک G ، تنها یک $w \in F$ وجود دارد که $V[G] \models l(w)$ ،

۲. اگر $\mathbb{P} \in \Gamma^V$ و G یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ – ژنریک باشد و $V[G] \models l(w)$ آنگاه $V[G] \models \Diamond_\Gamma l(u)$ اگر و تنها اگر $w \leq u$ ،

۳. اگر w_0 یک نقطه آغازین از F باشد، $V \models l(w_0)$.

قضیه زیر که منطق موجّهات را به نظریه مجموعه‌ها پیوند می‌زند قلب استدلال قضایای منطق موجّهات فورسینگ می‌باشد. این قضیه چون ماشینی برای اثبات قضایا می‌ماند، ما آن را قضیه کلیدی می‌نامیم.

قضیه ۱۳.۱.۲. (قضیه کلیدی – لووه – همکینز [۱۳] و [۱۴])

فرض کنید l یک $(\pi(X), T, V, \Gamma)$ – برچسب‌گذاری از قاب متناهی F باشد. آنگاه به ازای هر مدل کریپکی M با قاب F ، یک $(\pi(X), T, \Gamma)$ – ترجمه H وجود دارد که به ازای هر $\tau \in \mathcal{L}_m$ و هر $\mathbb{P} \in \Gamma^\Gamma$ ، اگر G یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ – ژنریک باشد و $V[G] \models l(w)$ داریم:

$$(M, w) \models \tau \iff V[G] \models H(\tau).$$

برهان. تعریف کنید $H_\circ : \mathcal{P} \rightarrow \text{Sent}(\mathcal{L}_\in(X))$ که به ازای هر $p \in \mathcal{P}$ ،

$$H_\circ(p) = \bigvee \{l(w) : (M, w) \models p\}.$$

حال فرض کنید H گسترش $H_\circ$ باشد که توسط گزاره ۸.۱.۲ به دست آمده است. فرض کنید $\mathbb{P} \in \Gamma^V$ و فرض کنید G یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ – ژنریک روی V باشد. به استقرا روی فرمول‌های $\mathcal{L}_m$ نشان می‌دهیم:

$$(M, w) \models \tau \iff V[G] \models H(\tau).$$

^۸Labeling

با توجه به تعریف H ، حکم به ازای فرمول‌های اتمیک به وضوح برقرار می‌باشد. همچنین برای ترکیبات بولی و نقیض با استفاده از خواص ارضاپذیری در مدل به راحتی حکم برقرار می‌شود. لذا فرض کنید به ازای فرمول وجهیت τ که حکم به ازای آن برقرار می‌باشد داشته باشیم $V[G] \models H(\Diamond \tau)$. بنابراین یک Γ - گسترش $V[G][K]$ از $V[G]$ وجود دارد که $V[G][K] \models H(\tau)$. لذا طبق تعریف l ، $V[G * K] = V[G][K] \models l(u)$ ، به ازای یک u . لذا با توجه به فرض استقرا $(M, u) \models \tau$. چون $l(u)$ روی $V[G]$ ، Γ - ممکن است، پس $w \leq u$. از طرفی اگر $(M, w) \models \Diamond \tau$ لذا $w \leq u$ وجود دارد که $(M, u) \models \tau$. حال با توجه به فرض استقرا $l(u)$ روی $V[G]$ ، Γ - ممکن است، که نتیجه می‌دهد $V[G] \models H(\Diamond \tau)$. حالت $\Box \tau$ به طور مشابه اثبات می‌شود. $\square$

راهبری یافتن منطق موجهات کلاسی از فورسینگ‌ها در دو جهت پیش می‌رود. در وهله اول پیدا کردن اصول منطق موجهات که برای آن کلاس صادق می‌باشد که از آن به عنوان درستی^۹ و یا کران پایین یاد می‌کنیم، در این مرحله شهود و حدس و آزمایش به کمک ما می‌آید. دوم نشان دادن تمامیت^{۱۰} اصول مورد نظر می‌باشد، یعنی یافتن کران‌های بالا. در این مرحله است که قضیه کلیدی به کمک ما می‌آید. در زیر ابتدا به بحث در مورد کران‌های پایین می‌پردازیم.

۲.۲ درستی - کران‌های پایین

در مثال زیر نشان می‌دهیم که برخی از اصول منطق موجهات در $Force$ قرار ندارند، پس پیدا کردن اصولی که برای فورسینگ صادق باشند، ساده نمی‌باشد.

مثال ۱.۲.۲. $Löb \notin Force$.

فرض کنید

$$\phi \equiv "o = 1"$$

^۹Soundness

^{۱۰}Completeness

لذا $\Box\phi$ همواره نادرست است، بنابراین $\Box(\Box\phi \rightarrow \phi)$ همیشه درست می باشد ولی ϕ نادرست می باشد. بنابراین $Löb \notin Force$.

۲. $\Box\phi \notin Force$.

در نظر بگیرید

$$\phi \equiv "V \neq L"$$

فرض کنید $\neg\phi$ و $V \models \neg\phi$ یک $(V, \mathcal{C}_\omega)$ - ژنریک باشد، قرار دهید $a = \bigcup G$ ، لذا $a \in V[G] \setminus V$ ، اما داریم $L = V \neq V[G]$ لذا $V[G] \models \phi$. از طرفی اگر $\mathbb{Q}$ یک فورسینگ باشد و H یک پالایه $(V[G], \mathbb{Q})$ - ژنریک، آنگاه $L = V \neq V[G] \subseteq V[G][H]$. حال اگر $V[G][H] \models "V = L"$ آنگاه $V[G] = L$ که تناقض می باشد. بنابراین $V[G][H] \models \phi$ که به دست می دهد $V[G] \models \Diamond\Box\phi$ اما $V \models \neg\phi$ لذا $\Box\phi \notin Force$.

در قضیه زیر نشان می دهیم خواص مختلف کلاس های فورسینگ، کران های متفاوتی را به دست می دهند.

قضیه ۲.۲.۲. (همکینز [۱۳])

$$1. S\mathcal{F} \subseteq Force(\pi(X), T, V, \Gamma).$$

$$2. \text{ اگر } \Gamma \text{ جهت دار باشد، آنگاه } S\mathcal{F} \cdot 2 \subseteq Force(\pi(X), T, V, \Gamma).$$

$$3. \text{ اگر } \Gamma \text{ خطی باشد، آنگاه } S\mathcal{F} \cdot 3 \subseteq Force(\pi(X), T, V, \Gamma).$$

برهان.

۱. فرض کنید ϕ و ψ جملاتی در زبان نظریه مجموعه ها باشند.

• (اصل K) فرض کنید $V \models \Box_\Gamma(\phi \rightarrow \psi) \wedge \Box_\Gamma\phi$. اگر G یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ -

ژنریک باشد که $\mathbb{P} \in \Gamma^V$ ، آنگاه $V[G] \models \phi \rightarrow \psi$ و همچنین $V[G] \models \Box\phi$ لذا

$$V[G] \models \Box_\Gamma(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_\Gamma\phi \rightarrow \psi)$$

که نشان می‌دهد اصل موضوع K در $Force(\pi(X), T, V, \Gamma)$ قرار دارد.

- (اصل $Dual$) $V \models \neg \Diamond_{\Gamma} \phi$ اگر و تنها اگر به ازای هر پالایه $(V, \mathbb{P})$ - ژنریک G داشته باشیم $V[G] \models \neg \phi$ که نشان می‌دهد $V \models \Box_{\Gamma} \neg \phi$ لذا $V \models \neg \Diamond_{\Gamma} \phi \longleftrightarrow \Box_{\Gamma} \neg \phi$.
- (اصل S) چون Γ دارای فورسینگ بدیهی می‌باشد لذا V یک Γ^V - گسترش از خودش می‌باشد. لذا اگر $V \models \Box_{\Gamma} \phi$ آنگاه $V \models \phi$ بنابراین $V \models \Box_{\Gamma} \phi \longrightarrow \phi$.
- (اصل ۰۴) فرض کنید $V \models \Box_{\Gamma} \phi$ لذا به ازای هر فورسینگ $\mathbb{P} \in \Gamma^V$ داریم $V^{\mathbb{P}} \models \phi$ حال فرض کنید $\mathbb{Q} \in \Gamma$ و $\dot{\mathbb{Q}}$ یک $\mathbb{P}$ - نام برای $\mathbb{Q}$ باشد، بنابراین $(V^{\mathbb{P}})^{\dot{\mathbb{Q}}} = V^{\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}} \models \phi$ و چون $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} \in \Gamma^V$ ، لذا $V \models \Box_{\Gamma} \Box_{\Gamma} \phi$.

باتوجه به اینکه خواص ارضا پذیری در مدل تحت قیاس استثنایی و جایگزینی یکنواخت بسته می‌باشد بنابراین کافی است نشان دهیم $Force(\pi(X), T, V, \Gamma)$ تحت الزام نیز بسته می‌باشد. بنابراین فرض کنید τ یک فرمول در نظریه SF باشد، به قسمی که

$\tau \in Force(\pi(X), T, V, \Gamma)$ با استقرا روی طول کوتاهترین τ نشان می‌دهیم $\Box_{\Gamma} \tau \in Force(\pi(X), T, V, \Gamma)$. فرض کنید $m(\tau)$ طول کوتاه ترین برهان τ باشد. اگر $m(\tau) = ۱$ آنگاه τ یک اصل موضوعی می‌باشد، فرض کنید $V^{\mathbb{P}}$ یک Γ - گسترش از V باشد. طبق قسمت های قبل $\tau \in Force(\pi(X), T, V[G], \Gamma)$ و این بدین معنی است که $\Box_{\Gamma} \tau \in Force(\pi(X), T, V, \Gamma)$ حال فرض کنید $m(\tau) = n + ۱$ و $\langle s_0, s_1, \dots, s_n = \tau \rangle$ یک برهان از SF برای τ باشد. حال اگر τ با قیاس استثنایی از s_{n-1} بدست آمده باشد، به وضوح

$\Box_{\Gamma} \tau \in Force(\pi(X), T, V, \Gamma)$. اگر از الزام بدست آمده باشد، طبق آنچه دیدیم خواهیم داشت $\Box_{\Gamma} \tau \in Force(\pi(X), T, V, \Gamma)$.

توجه داریم برهان $\langle s_0, \dots, s_n \rangle$ برای τ ممکن است دارای جمله ای چون $s_i = \Box_{\Gamma} \tau$ باشد که توسط الزام بدست آمده باشد و لذا طبق فرض استقرا $s_i \in Force(\pi(X), T, V, \Gamma)$.

۲. با توجه به قسمت قبل کافی است نشان دهیم اصل موضوع ۰۲ در $Force(\pi(X), T, V, \Gamma)$ قرار دارد. لذا فرض کنید $\mathbb{P} \in \Gamma^V$ دلخواه باشد و $V \models \Diamond_{\Gamma} \Box_{\Gamma} \phi$ پس $\mathbb{Q} \in \Gamma^V$ وجود

دارد که $V^Q \models \Box_\Gamma \phi$ ، چون Γ جهت‌دار است لذا فورسینگ‌های $\mathbb{R} \in \Gamma^V$ ، $S \in \Gamma^{V^P}$ و $T \in \Gamma^{V^Q}$ وجود دارند که $(\mathbb{R} \approx P * \dot{S})^V$ و $(\mathbb{R} \approx Q * \dot{T})^V$. که $\dot{S}$ یک P - نام برای S و $\dot{T}$ یک Q - نام برای T می‌باشد. حال داریم $V^{Q*\dot{T}} = V^R = V^{P*\dot{S}}$ ، از طرفی $V^Q \models \Box_\Gamma \phi$ که نتیجه می‌دهد $V^{Q*\dot{T}} \models \phi$ و لذا $V \models \Box_\Gamma \Diamond_\Gamma \phi$.

۳. طبق اثبات‌های بالا کافی است نشان دهیم اصل موضوع ۳. در $Force(\pi(X), T, V, \Gamma)$ قرار دارد. فرض کنید $V \models \Diamond_\Gamma \phi \wedge \Diamond_\Gamma \psi$. لذا فورسینگ‌های P و Q در Γ وجود دارند که $V^P \models \phi$ و $V^Q \models \psi$. حال باتوجه به خطی بودن Γ ، یا $\mathbb{R} \in \Gamma^{V^Q}$ وجود دارد که $(P \approx Q * \dot{R})^V$ جایی که $\dot{R}$ یک Q - نام برای $\mathbb{R}$ می‌باشد و یا $S \in \Gamma^{V^P}$ وجود دارد که $(Q \approx P * \dot{S})^V$ و $\dot{S}$ یک P - نام برای S می‌باشد. فرض کنید حالت اول رخ دهد(حالت دوم به طور مشابه همان نتیجه را می‌دهد). لذا $V^P = V^{Q*\dot{R}}$ ، لذا $V^Q \models \Diamond_\Gamma \phi$ بنابراین $V^Q \models \psi \wedge \Diamond_\Gamma \phi$ که نتیجه می‌دهد

$$V \models [(\phi \wedge \Diamond_\Gamma \psi) \vee (\psi \wedge \Diamond_\Gamma \phi)].$$

لذا $\bullet ۳ \in Force(\pi(X), T, V, \Gamma)$.

□

همانطور که خواص کلاس‌های فورسینگ در یافتن کران‌های پایین موثر بود، در یافتن کران‌های بالا گزاره‌های کنترلی وارد کار می‌شوند. در زیر این موضوع را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۳.۲ تمامیت- کران‌های بالا

قضیه ۱.۳.۲. (همکینز [۱۳]) اگر Γ دارای خانواده‌های مستقل و متناهی به دلخواه بزرگ از سویچ‌ها و دکمه‌ها روی V باشد، آنگاه

$$Force(\pi(X), T, V, \Gamma) \subseteq S5.$$

برهان. فرض کنید $S5 \notin \tau$. لذا طبق قضیه کلیدی ۱۳.۱.۲ و گزاره ۱۴.۳.۱ τ در یک مدل کریپکی روی قاب متناهی F که $|F^*| = 1$ نادرست می‌باشد. فرض کنید $F = \{w_0, \dots, w_{n-1}\}$. باتوجه به ملاحظه ۱۶.۳.۱ می‌توان فرض کرد n به شکل 2^m می‌باشد. فرض کنید $\{s_0, \dots, s_{m-1}\}$ یک خانواده مستقل از Γ – سویچ‌ها روی V باشد. حال تابع $l : F \rightarrow \text{Sent}(\mathcal{L}_\in(X))$ را به صورت

$$l(w_j) = \left(\bigwedge_{i \in A_j} s_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \notin A_j} \neg s_i \right)$$

تعریف کنید که در آن A_j مجموعه‌ی تمام جایگاه‌های بسط دودویی j ^{۱۱} می‌باشد که j در آن مقدار ۱ را انتخاب می‌کند. اگر $j \neq k$ آنگاه $A_j \neq A_k$ لذا l در شرط اول برچسب‌گذاری صدق می‌کند. حال نشان می‌دهیم l در شرط دوم نیز صدق می‌کند، چون سویچ‌ها روی V ، Γ – مستقل می‌باشند لذا هر الگویی از سویچ‌ها Γ – ممکناً، Γ – لازم می‌باشد. این بدین معنی می‌باشد که به ازای هر Γ – گسترش $V[G]$ و هر j داریم $V[G] \models \Diamond l(w_j)$. از طرفی چون در ابتدا سویچ‌ها خاموش می‌باشند لذا شرط سوم نیز برقرار می‌باشد.

حال با توجه به قضیه کلیدی، $(\pi(X), T, \Gamma)$ – ترجمه H وجود دارد که

$$V \models H(\tau) \text{ اگر و تنها اگر } (M, w_0) \models \tau$$

چون هر نقطه F آغازین است لذا $(M, w_0) \not\models \tau$ لذا $V \not\models H(\tau)$ ، بنابراین $V \notin \text{Force}(\pi(X), T, V, \Gamma)$ ، $\tau \notin F$.

□

قضیه ۲.۳.۲. (همکینز [۱۳]) اگر Γ روی V دارای کنترلگرهای متناهی به دلخواه بزرگ و خانواده‌های متناهی به دلخواه بزرگ از سویچ‌های توأمّاً مستقل باشد، آنگاه

$$\text{Force}(\pi(X), T, V, \Gamma) \subseteq S4 \cdot 3.$$

برهان. فرض کنید $S4 \cdot 3 \notin \tau$. لذا طبق قضیه کلیدی و گزاره ۱۴.۳.۱ τ در یک مدل کریپکی روی قاب پیش‌مرتب خطی متناهی F و در نقطه آغازین w_0 نادرست می‌باشد. با توجه به گزاره

^{۱۱} در این پایان‌نامه، منظور از بسط دودویی عدد طبیعی j ، دنباله متناهی $\langle a_0, \dots, a_n \rangle$ از ۰ و ۱ می‌باشد که $A_j = \{m < n : a_m = 1\}$ بنابراین $j = \sum_{i=0}^n a_i 2^i$.

۸.۳.۱ می‌توان فرض کرد که τ در نقطه آغازین نادرست می‌باشد. فرض کنید

$$F = \{w_j^k : k = 1, \dots, n \text{ و } j = 0, \dots, n_k - 1\}$$

به وضوح $w_i^k < w_j^l$ اگر و تنها اگر $k < l$ و $w_i^k \equiv w_j^l$ اگر و تنها اگر $i = j$.

باتوجه به ملاحظه ۱۶.۳.۱ می‌توان فرض کرد عدد طبیعی m وجود دارد که هر n_k برابر با 2^m می‌باشد. فرض کنید $\{s_0, \dots, s_{m-1}\}$ یک خانواده مستقل از Γ - سویچ‌ها و $\langle r_1, \dots, r_n \rangle$ یک Γ - کنترلگر از طول n روی V باشد. بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم سویچ‌ها در V خاموش می‌باشند و تعریف می‌کنیم

$$1. \bar{r}_0 = \neg r_1$$

$$2. \bar{r}_k = r_k \wedge \neg r_{k+1} \text{ به ازای } 1 < k < n$$

$$3. \bar{r}_n = r_n$$

همچنین قرار دهید

$$4. \bar{s}_j = \left(\bigwedge_{i \in A_j} s_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \notin A_j} \neg s_i \right)$$

که در آن $2^m > j$ و A_j مجموعه‌ی تمام جایگاه‌های بسط دودویی j می‌باشد که j در آن مقدار ۱ را انتخاب می‌کند.

حال تابع $l : F \rightarrow \text{Sent}(\mathcal{L}_\epsilon(X))$ را به صورت $l(w_j^k) = \bar{r}_k \wedge \bar{s}_j$ تعریف کنید. فرض کنید $V[G] \models l(w_j^k) \wedge l(w_{j'}^{k'})$. باتوجه به تعریف $\bar{s}_j$ واضح است که $j = j'$. همچنین اگر به ازای $k' > k$ داشته باشیم $V[G] \models \bar{r}_k \wedge \bar{r}_{k'}$ آنگاه خواهیم داشت $V[G] \models r_{k+1} \wedge \neg r_{k+1}$ ، که تناقض می‌باشد. بنابراین l در شرط اول برچسب‌گذاری صدق می‌کند. برای نشان دادن شرط دوم فرض کنید $V[G] \models l(w_j^k)$ ، چون حجم کنترلگر نمی‌تواند کم شود و با توجه به استقلال همزمان با سویچ‌ها، هر الگویی از سویچ‌ها مستقل از افزایش حجم کنترلگر، Γ - ممکن می‌باشد بنابراین داریم

$$V[G] \models \Diamond_\Gamma l(w_i^m) \iff w_j^k \leq w_i^m \iff k \leq m.$$

از طرفی چون در ابتدا سویچ‌ها خاموش می‌باشند و حجم کنترلگر صفر می‌باشد لذا شرط سوم نیز برقرار می‌باشد. حال با توجه به قضیه کلیدی، ترجمه H وجود دارد که $(M, w_0) \models \tau$ اگر و تنها اگر $V \models H(\tau)$. بنابراین $V \not\models H(\tau)$ که ثابت می‌کند $\tau \notin \text{Force}(\pi(X), T, V, \Gamma)$. $\square$

قضیه ۳.۳.۲. (همکینز [۱۳]) اگر Γ دارای کنترلگر بلند روی V باشد، آنگاه

$$\text{Force}(\pi(X), T, V, \Gamma) \subseteq S\mathcal{F} \cdot 3.$$

برهان. فرض کنید $\langle r_\alpha : 0 < \alpha < \text{Ord} \rangle$ یک کنترلگر بلند و r فرمولی باشد که به ازای هر اردینال α ، $r_\alpha = r(\alpha)$. به ازای هر اردینال β اردینال α و عدد طبیعی k وجود دارد که $\beta = \omega \cdot \alpha + k$. به ازای i طبیعی فرض کنید s_i جمله «اگر مقدار r دقیقاً $r(\omega \cdot \alpha + k)$ باشد، آنگاه i -مین رقم k در بسط دودویی ۱ می‌باشد.» و به ازای اردینال ناصفر α فرض کنید $v(\alpha)$ ، گزاره $r(\omega \cdot \alpha)$ باشد. واضح است که $\langle v_\alpha : 0 \neq \alpha < \text{Ord} \rangle$ یک Γ - کنترلگر می‌باشد. از طرفی فرض کنید مقدار کنترلگر v_α دقیقاً γ باشد. چون کنترلگر یکنواخت می‌باشد، لذا مقدار r_α دقیقاً نمی‌تواند بزرگتر و یا مساوی $\gamma + 1$ باشد، بنابراین m وجود دارد که مقدار دقیق r_α برابر با $\omega \cdot \gamma + m$ می‌باشد، حال کافی است عدد طبیعی $m < k$ را طوری انتخاب کنید که i -مین رقم در بسط دودویی k برابر با ۱ باشد، و با توجه به اینکه می‌توان توسط Γ این کار را انجام داد، لذا می‌توان s_i را برقرار کرد و همچنین می‌توان $m < k$ را طوری انتخاب کرد که i -مین رقم در بسط دودویی آن ۱ نباشد ولی مقدار دقیق r_α برابر با $\omega \cdot \gamma + k$ باشد. لذا $\neg s_i$ می‌تواند توسط Γ برقرار شود. دقت کنیم در هر دو حالت مقدار v_α تغییر نمی‌کند. لذا هر s_i یک Γ - سویچ می‌باشد. حال نشان می‌دهیم که این سویچ‌ها به همراه $\langle v_\alpha : 0 \neq \alpha < \text{Ord} \rangle$ توأماً مستقل هستند و لذا قضیه قبل حکم را اثبات می‌کند.

ابتدا فرض کنید کنترلگر v مقدار دقیق α داشته باشد و قصد داریم $s_{i_1}, \dots, s_{i_n}$ و $\neg s_{j_1}, \dots, \neg s_{j_m}$ که در آن $\{i_1, \dots, i_n\} \cap \{j_1, \dots, j_m\} = \emptyset$ برقرار باشند. مانند قبل عدد طبیعی l وجود دارد که r_α دقیقاً مقدار $\omega \cdot \gamma + l$ دارد، لذا $l < k$ طوری انتخاب کنید که در بسط دودویی آن جایگاه‌های $i_1, \dots, i_n$ مقدار ۱ داشته باشند و جایگاه‌های $j_1, \dots, j_m$ مقدار صفر داشته باشند، واضح است که می‌توان توسط Γ مقدار r_α را تا $\omega \cdot \gamma + k$ افزایش داد و دقیقاً به این مقدار رساند و لذا سویچ‌ها توسط Γ انجام می‌شوند و همچنین مقدار دقیق v ثابت می‌ماند. از طرفی برعکس اگر الگویی

از سویچ‌ها داده شده باشد، k را مانند بالا انتخاب می‌کنیم. سپس می‌توانیم توسط Γ مقدار r_α را به هر مقدار $\omega.\beta + k$ رساند، که در نتیجه مقدار v دقیقاً β می‌شود و ضمناً الگوی سویچ‌ها ثابت باقی می‌ماند. $\square$

گزاره ۴.۳.۲. منطق $S\mathcal{F} \cdot 2$ به وسیله کلاس تمام قاب‌های پیش‌جبر بولی متناهی مشخص می‌شود.

برهان. نگاه کنید به [۱۴]. $\square$

قضیه ۵.۳.۲. (همکینز [۱۳]) اگر Γ دارای خانواده‌های به دلخواه بزرگ مستقل از سویچ‌ها و دکمه‌ها روی V باشد، آنگاه

$$Force(\pi(X), T, V, \Gamma) \subseteq S\mathcal{F} \cdot 2.$$

برهان. فرض کنید $\tau \notin S\mathcal{F} \cdot 2$. لذا طبق قضیه کلیدی، گزاره بالا، گزاره ۸.۳.۱ و ملاحظه ۱۶.۳.۱ τ در یک مدل کریپکی روی یک قاب پیش‌جبر بولی متناهی F و در نقطه آغازین w نادرست می‌باشد. لذا خارج قسمت تقسیمی F یک جبر بولی متناهی است که می‌توان فرض کرد این خارج قسمت ترتیبی F ، مجموعه توانی یک مجموعه متناهی مانند A می‌باشد. با توجه به ملاحظه ۱۶.۳.۱ می‌توان فرض کرد عدد طبیعی m وجود دارد که کاردینال هر کلاس هم‌ارزی برابر با 2^m می‌باشد. فرض کنید A دارای n عضو باشد. قرار دهید $B = P(A)$ و به هر عضو آن چون a ، 2^m عضو $w_0^a, \dots, w_{2^m-1}^a$ تخصیص دهید. با توجه به بالا به ازای $i, j < 2^m$ و $a, b \subseteq A$ داریم $w_i^a \leq w_j^b$ اگر و تنها اگر $a \subseteq b$. حال با توجه به فرض، n تا Γ - دکمه $b_0, \dots, b_{n-1}$ و m تا Γ - سویچ $s_0, \dots, s_{m-1}$ وجود دارند که توأم یک خانواده مستقل تشکیل می‌دهند. به ازای $j < 2^m$ فرض کنید $\bar{s}_j = (\bigwedge_{i \in A_j} s_i) \wedge (\bigwedge_{i \notin A_j} \neg s_i)$ که در آن A_j مجموعه‌ی تمام جایگاه‌های بسط دودویی j می‌باشد که j در آن مقدار ۱ را انتخاب می‌کند حال تابع $l : F \rightarrow Sent(\mathcal{L}_\in(X))$ را به صورت

$$l(w_j^a) = (\bigwedge_{i \in a} \Box b_i) \wedge (\bigwedge_{i \notin a} \neg \Box b_i) \wedge \bar{s}_j$$

تعریف کنید به وضوح شرط اول برچسب‌گذاری برای l برقرار می‌باشد. برای نشان دادن شرط دوم فرض کنید $V[G] \models l(w_j^a)$. چون هر خانواده بزرگتر چون $a \subseteq b$ از دکمه‌ها را می‌توان فشرد و

همزمان مستقلاً هر الگویی از سویچ‌ها را می‌توان برقرار کرد پس به ازای هر k ، $V[G] \models l(w_k^b)$ ، برعکس، زمانی $V[G] \models l(w_k^b)$ که $a \subseteq b$ ، چرا که دکمه‌های فشرده شده را نمی‌توان بازگرداند ولی همچنان هر الگویی از سویچ‌ها را می‌توان برقرار کرد، لذا $a \subseteq b \iff V[G] \models \Diamond l(w_k^b)$. از طرفی چون در ابتدا سویچ‌ها خاموش می‌باشند و هیچ دکمه‌ای فشرده نشده بنابراین شرط سوم برچسب‌گذاری نیز برقرار می‌باشد. حال با توجه به قضیه کلیدی، ترجمه H وجود دارد که $(M, w_0) \models \tau$ اگر و تنها اگر $V \models \tau$. لذا $V \not\models H(\tau)$ بنابراین $V \not\models \text{Force}(\pi(X), T, V, \Gamma)$ که $\tau \notin \text{Force}(\pi(X), T, V, \Gamma)$ که حکم را اثبات می‌کند. $\square$

نتیجه ۶.۳.۲. اگر Γ علاوه بر فرضیات قضیه قبل جهت‌دار نیز باشد، آنگاه

$$\text{Force}(\pi(X), V, \Gamma) = S \cdot 2.$$

برهان. با توجه به قضایای ۲.۲.۲ و ۵.۳.۲ واضح می‌باشد. $\square$

قضیه ۷.۳.۲. (قضیه اصلی منطق موجّهات فورسینگ – لوه – همکینز [۱۴])

$$\text{Force} = S \cdot 2.$$

برهان. برای به دست آوردن $\text{Force} = S \cdot 2$ کافی است نشان دهیم $\text{Force}(L) \subseteq S \cdot 2$. چرا که

$$\text{Force} \subseteq \text{Force}(L).$$

اما با توجه به قضیه ۵.۳.۲ کافی است نشان دهیم که خانواده‌های توأم مستقل و متناهی به دلخواه بزرگ از سویچ‌ها و دکمه‌ها روی L وجود دارد. در ادامه به این مطلب می‌پردازیم و در زیربخش بعدی خانواده‌های مستقل و متناهی به دلخواه بزرگ و از دکمه‌ها و سویچ‌ها روی L را معرفی می‌کنیم. $\square$

برهان قضیه اصلی – وجود دکمه‌ها و سویچ‌ها

تعریف ۸.۳.۲. فرض کنید κ یک کاردینال منظم باشد. مجموعه‌ی $C \subseteq \kappa$ را یک مجموعه‌ی بسته و بی‌کران گوئیم اگر حد هر دنباله‌ی $s = \langle \alpha_\zeta : \zeta < \gamma \rangle$ از عناصر C با $\sup(s) < \kappa$ در C

باشد و $\sup(C) = \kappa$. گوییم مجموعه‌ی S در κ مانا^{۱۲} می‌باشد، اگر $C \cap S \neq \emptyset$ به ازای هر مجموعه‌ی بسته و بی‌کران $C \subseteq \kappa$.

قضیه ۹.۳.۲. فرض کنید $S \subseteq \omega_1$ مانا باشد. قرار دهید

$$\mathbb{P}_S = \{p \subseteq S : p \text{ بسته و کراندار می‌باشد.}\}$$

$\mathbb{P}_S$ را با رابطه

$$p \leq q \iff \exists \alpha \in \text{Ord} \quad q = p \cap \max(q) + 1$$

در نظر بگیرید. فورسینگ $\mathbb{P}_S$ یک زیرمجموعه بسته و بی‌کران در S اضافه می‌کند و ω_1 را حفظ می‌کند، همچنین $\omega_1 \setminus S$ در مدل ژنریک مانا نمی‌باشد.

برهان. فرض کنید $ZFC \models V$ و G یک پالایه $(V, \mathbb{P}_S)$ - ژنریک باشد. قرار دهید $C = \bigcup G$. لذا $C \subseteq S$. فرض کنید $\alpha < \omega_1$ ، مجموعه‌ی $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P}_S : \alpha \leq \max(p)\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $p \in \mathbb{P}_S \setminus D$ و $\gamma = \max(p)$. حال با در نظر گرفتن $q = p \cup [\gamma, \alpha + 1)$ داریم $q \cap \gamma + 1 = p$ لذا $q \leq p$ و $q \in D_\alpha$ که نشان می‌دهد D_α در $\mathbb{P}_S$ چگال می‌باشد. بنابراین $\beta \in C$ وجود دارد که $\alpha \leq \beta$ ، بنابراین C یک مجموعه‌ی بسته و بی‌کران می‌باشد، لذا در $V[G]$ $S \setminus \omega_1$ مانا نمی‌باشد.

حال نشان می‌دهیم هر تابع $f : \omega \rightarrow V$ در $V[G]$ قرار دارد که اثبات می‌کند $\mathbb{P}_S$ هیچ زیرمجموعه‌ی شمارای جدید اضافه نمی‌کند و ω_1 را حفظ می‌کند. فرض کنید $p \Vdash \dot{f} : \omega \rightarrow V$. قرار دهید $A_\alpha = \{p\}$ و اگر α یک اردینال حدی باشد قرار دهید $A_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$. فرض کنید $\gamma_\alpha = \sup\{\max(q) : q \in A_\alpha\}$. حال به ازای هر $q \in A_\alpha$ و هر $n < \omega$ ، $r = r(q, n)$ را به گونه ای انتخاب کنید که $r \leq q$ و $r \Vdash \dot{f}(n)$ و $\max(r) > \gamma_\alpha$. حال قرار دهید

$$A_{\alpha+1} = A_\alpha \cup \{r(q, n) : q \in A_\alpha, n < \omega\}.$$

به وضوح هر A_α شمارا می‌باشد که انتخاب r را ممکن می‌سازد. نشان می‌دهیم مجموعه‌ی

$$E = \{\beta : \alpha < \beta \text{ آنگاه } \gamma_\alpha < \beta\}$$

^{۱۲}Stationary

بسته و بی‌کران می‌باشد؛ اگر $s = \langle \beta_n : n < \omega \rangle$ یک دنباله صعودی در E با $\beta = \sup(s)$ باشد و $\alpha < \beta$. آنگاه n وجود دارد که $\alpha < \beta_n$ و لذا $\gamma_\alpha < \beta_n < \beta$ که نتیجه می‌دهد $\beta \in C$. از طرفی فرض کنید $\beta' < \omega_1$. چون دنباله $\langle \gamma_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ صعودی و پیوسته می‌باشد لذا وجود دارد α که $\beta' < \gamma_\alpha = \alpha$. حال اگر $\gamma < \gamma_\alpha$ آنگاه $\gamma_\gamma < \gamma_\alpha = \gamma_\alpha$ که نتیجه می‌دهد $\gamma_\alpha \in E$. فرض کنید λ یک اردینال حدی در $E \cap S$ باشد و فرض کنید $\langle \alpha_n : n < \omega \rangle$ یک دنباله‌ی صعودی باشد که $\sup\{\alpha_n : n < \omega\} = \lambda$. بنابراین $\sup_{n < \omega} \gamma_{\alpha_n} = \lambda$. قرار دهید $p_\omega = p$ و به ازای هر n یک p_{n+1} انتخاب کنید، به طوری‌که:

$$p_{n+1} \in A_{\alpha_{n+1}} \quad ۱.$$

$$p_{n+1} \leq p_n \quad ۲.$$

$$p_{n+1} \parallel \dot{f}(n) \quad ۳.$$

از طرفی باتوجه به $\gamma_{\alpha_n} < \max(p_{n+1}) \leq \gamma_{\alpha_{n+1}}$ داریم $\sup\{\max(p_n) : n < \omega\} = \lambda$. و چون $\lambda \in S$ لذا $q = \bigcup_{n < \omega} p_n \cup \{\lambda\}$ عضوی از $\mathbb{P}_S$ می‌باشد و به ازای هر n داریم $q \leq p_n$ که نشان می‌دهد $f(n) \parallel q$ ، به ازای هر n . بنابراین تابع $g \in V$ وجود دارد که $q \Vdash f = g$ لذا $f \in V$. $\square$

حال در زیر خانواده‌ای مستقل و به دلخواه بزرگ از دکمه‌ها روی L می‌سازیم.

قضیه ۱۰.۳.۲. (سلوی) خانواده شمارا $\{S_n : n \in \omega\}$ از زیر مجموعه‌های مانای ω_1 وجود

$$\text{دارد که } \omega_1 = \bigcup_{n < \omega} S_n.$$

$\square$

برهان. نگاه کنید به [۱۹].

قضیه ۱۱.۳.۲. یک خانواده شمارا از دکمه‌های مستقل روی L وجود دارد.

برهان. فرض کنید $\omega_1 = \bigcup_{n < \omega} S_n$ که هر S_n مانا می‌باشد. به ازای هر n قرار دهید:

$$b_n \equiv "S_{n+1} \text{ مانا نمی‌باشد}"$$

لذا $L \models \neg b_n$ ، از طرفی به ازای n بزرگتر از صفر $T_n = \bigcup_{n \neq m < \omega} S_m$ مانا می‌باشد، لذا $\Vdash_{\mathbb{P}_{T_n}} b_n$ ، چرا که در مدل ژنریک $S_n = \omega_1 \setminus T_n$ مانا نمی‌باشد و لذا مجموعه بسته و کراندار C وجود دارد که $C \cap T_n^c = \emptyset$ و بنابراین اگر $\mathbb{Q} \in V^{\mathbb{P}_{T_n}}$ یک فورسینگ باشد، آنگاه در $(V^{\mathbb{P}_{T_n}})^{\mathbb{Q}}$ نیز $C \cap T_n^c = \emptyset$ لذا $\Vdash_{(V^{\mathbb{P}_{T_n}})^{\mathbb{Q}}} b_n$. لذا هر b_n روی L دکمه می‌باشد، اما دقت کنیم که b_n با پارامتر تعریف شده است، لذا به کمک رابطه خوش‌ترتیبی $<_L$ روی L می‌توان $\{S_n : n \in \omega\}$ را $<_L$ - کوچکترین افراز ω_1 در نظر گرفت که هر S_n مانا می‌باشد. لذا هر b_n دکمه می‌باشد.

حال کافی است نشان دهیم این خانواده مستقل می‌باشد. فرض کنید $n_1, \dots, n_k$ داده شده باشند، بدون کاستن از کلیت فرض کنید $n_i = i$ و قرار دهید $T = \bigcup_{n=1}^k S_n$. حال با در نظر گرفتن فورسینگ $\mathbb{P}_T$ خواهیم داشت $V^{\mathbb{P}_T} \models b_i$ به ازای هر $0 < i < k$ و لذا کافی است نشان دهیم $V^{\mathbb{P}_T} \models (\forall i < k) b_i$ که این از مطلب زیر نتیجه می‌شود:

اگر T زیر مجموعه‌ی مانای S باشد، آنگاه در $V^{\mathbb{P}_S}$ نیز T مانا باقی می‌ماند.

برای اثبات مطلب بالا مانند اثبات قضیه ۹.۳.۲ عمل می‌کنیم، لذا به طور خلاصه بیان می‌کنیم. فرض کنید

” $\dot{D}$ یک مجموعه بسته و بی‌کران از ω_1 است “ $p \Vdash$

. قرار دهید $A_0 = \{p\}$ دنباله صعودی $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ از زیر مجموعه‌های شمارای ω_1 می‌سازیم. در حالتی که $\alpha = \beta + 1$ یک اردینال تالی باشد، به ازای $q \in A_\beta$ شرط $r(q) \leq q$ و $\beta(q) > \gamma_\alpha$ را انتخاب می‌کنیم که $r(q) \Vdash \check{\beta}(q) \in \dot{D}$ و قرار می‌دهیم $A_{\beta+1} = A_\beta \cup \{r(q) : q \in A_\beta\}$ همان E تعریف شده در اثبات قضیه ۹.۳.۲ را در نظر بگیرید. چون E در V یک مجموعه بسته و بی‌کران است، لذا $T \cap E \neq \emptyset$ و λ را مانند اثبات همان قضیه انتخاب می‌کنیم و در نهایت دنباله‌های $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$ و $\langle p_n : n \in \omega \rangle$ را با توجه به ساخت آن‌ها خواهیم داشت که

$$\lim_{n \in \omega} \max(p_n) = \lambda = \lim_{n \in \omega} \beta(p_n).$$

حال قرار دهید $q = \bigcup_{n \in \omega} p_n \cup \{\lambda\}$. بنابراین $q \leq p_n$ و چون $\beta(q_n) \in D$ داریم $p_{n+1} \Vdash \beta(q_n) \in \dot{D}$. همچنین $q \Vdash \forall n \beta(q_n) \in \dot{D}$. که خواهیم داشت $q \Vdash \check{\lambda} \in \dot{D}$. $\square$

قضیه ۱۲.۳.۲. یک خانواده شمارا مستقل از سوییچها روی L وجود دارد.

برهان. به ازای هر $n \in \omega$ فرض کنید s_n جمله زیر باشد:

$$s_n \equiv \text{“} 2^{\aleph_{n+3}} = \aleph_{n+5} \text{”}$$

نشان می‌دهیم $\{s_n : n \in \omega\}$ یک خانواده مستقل از سوییچها روی L می‌باشد.

فرض کنید $\mathbb{P}_n = \text{Add}(\aleph_{n+3}, \aleph_{n+5})$ و فرض کنید دنباله صعودی $A = \langle i_1, \dots, i_k \rangle \in \omega^{<\omega}$ داده شده باشند. قرار دهید $\mathbb{P} = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}_{i_j}$.

ابتدا فرض کنید $k = 2$ و فرض کنید $G = G_1 \times G_2$ یک پالایه $(L, \mathbb{P})$ -ژنریک باشد. لذا $L[G_2] \subseteq L[G_1][G_2]$ که نتیجه می‌دهد $2^{\aleph_{i_2+3}} = \aleph_{i_2+5}$ و چون $\mathbb{P}_{i_2}$ هیچ زیر مجموعه با طول کمتر از $\aleph_{i_2+2}$ اضافه نمی‌کند، لذا به ازای هر $\kappa < \aleph_{i_2+2}$ داریم $L[G_1] \models \kappa^+ = 2^\kappa$. به ویژه $2^{\aleph_{i_1}} = \aleph_{i_1}^+$. همچنین چون GCH در L برقرار می‌باشد، لذا با توجه به لم ایستون $\mathbb{P}_{i_2}$ حافظ کاردینالها می‌باشد. حال G_1 روی $L[G_2]$ ژنریک می‌باشد، بنابراین در $L[G]$ خواهیم داشت

$$(2^{\aleph_{i_1+3}})^{L[G_2]} = \aleph_{i_1+5}^L = \aleph_{i_1+5}^{L[G]}.$$

از طرفی به ازای $j < i_1$ مشابه آنچه دیدیم، توان $\aleph_j$ تغییر نمی‌کند.

اگر $j < i_2$ آنگاه با توجه به گزاره ۲۳.۲.۱ خواهیم داشت

$$(2^{\aleph_{j+3}})^{L[G]} \leq [(\aleph_{i_2+5}^{<\aleph_{j+3}})^{\aleph_{j+3}}]^L = (2^{\aleph_{j+3}})^L = \aleph_{j+3}^{+L} = \aleph_j^+$$

اگر $i_1 < j < i_2$ آنگاه چون $\mathbb{P}_{i_2}$ خاصیت $\aleph_{j+3}^+$ - بسته و $\mathbb{P}_{i_1}$ خاصیت $\aleph_{j+3}^{+c.c}$ دارد لذا با توجه به قضیه .. داریم:

$$P(\aleph_{j+3})^{L[G]} = P(\aleph_{j+3})^{L[G_2]} = \aleph_{j+3}^+.$$

که نشان می‌دهد این دو سوییچ مستقل هستند، با استقرا و به طور مشابه برای $k < 2$ نیز اثبات می‌شود. $\square$

نتیجه ۱۳.۳.۲. خانواده‌های مستقل متناهی به دلخواه بزرگ از سوییچها و دکمه‌ها روی L وجود دارد.

برهان. فرض کنید n و m دو عدد طبیعی باشند، فرض کنید $b_0, \dots, b_n$ دکمه‌های ساخته شده در قضیه ۱۱.۳.۲ و $s_0, \dots, s_m$ سویچ‌های ساخته شده در قضیه ۱۲.۳.۲ باشند. نشان می‌دهیم خانواده $\{b_0, \dots, b_n, s_0, \dots, s_m\}$ روی L مستقل می‌باشد. واضح است که روی L تمام دکمه‌ها نافشرده‌اند و تمام سویچ‌ها خاموش. لذا فرض کنید $\emptyset \neq A \subseteq m$ و $\emptyset \neq B \subseteq n$. نشان می‌دهیم

$$L \models \Diamond[(\bigwedge_{i \in A} b_i) \wedge (\bigwedge_{i \notin A} \neg b_i) \wedge (\bigwedge_{j \in B} s_j) \wedge (\bigwedge_{j \notin B} \neg s_j)]$$

که بیان می‌کند خانواده‌های مذکور توأمأً مستقل هستند.

قرار دهید $T = \bigcup_{i \notin A} S_i$ و $\mathbb{Q} = \prod_{j \in B} \text{Add}(\aleph_{j+3}, \aleph_{j+5})$. حال فورسینگ $\mathbb{P}_T \times \mathbb{Q}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید G یک پالایه $(L, \mathbb{P}_T \times \mathbb{Q})$ - ژنریک باشد، با توجه به قضیه ۱۱.۳.۲ واضح است که $| \mathbb{P}_T | = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ و همچنین چون $\mathbb{P}_T$ حافظ کاردینال‌ها می‌باشد و $L[G] \models (\bigwedge_{i \in A} b_i) \wedge (\bigwedge_{i \notin A} \neg b_i)$ لذا بنابر گزاره ۲۲.۲.۱ در $L^{\mathbb{P}_T}$ داریم

$$\forall \lambda \geq \aleph_1 \quad 2^\lambda \leq (2^\lambda)^V = \lambda^+.$$

مقدار $2^{\aleph_{j+3}}$ به ازای $j = 0, \dots, m$ توسط $\mathbb{Q}$ تعیین می‌شود، اما همانطور که در قضیه ۱۲.۳.۲

دیدیم، داریم

$$(V^{\mathbb{P}_T})^{\mathbb{Q}} \models (\bigwedge_{j \in B} s_j) \wedge (\bigwedge_{j \notin B} \neg s_j).$$

همچنین

$$L[G] \models [(\bigwedge_{i \in A} b_i) \wedge (\bigwedge_{i \notin A} \neg b_i) \wedge (\bigwedge_{j \in B} s_j) \wedge (\bigwedge_{j \notin B} \neg s_j)].$$

لذا اثبات قضیه اصلی به پایان می‌رسد.

□

نتیجه ۱۴.۳.۲. اگر V مطلقاً تعریف‌پذیر باشد، آنگاه $2 \cdot \aleph_4 = \text{Force}(V)$.

برهان. اثبات مانند قضیه اصلی می‌باشد. تنها نکته حایز اهمیت امکان تعریف دکمه‌ها به واسطه تعریف‌پذیر بودن V می‌باشد.

□

نتیجه ۱۵.۳.۲. $S\mathfrak{f} \cdot 2$. $Force(\pi(H_{\omega_2}), V) = S\mathfrak{f} \cdot 2$

برهان. طبق قضیه ۵.۳.۲ کافی است نشان دهیم روی V خانواده‌های متناهی به دلخواه بزرگ و مستقل از دکمه‌ها و سویچ‌ها وجود دارد، چون اجازه داریم پارامترها را از $H(\omega_2)$ انتخاب کنیم، لذا همان دکمه‌های ساخته شده در اثبات قضیه اصلی کار می‌کند و نیاز به رابطه خوش‌ترتیبی نداریم، همچنین چون کاردینال‌های $\aleph_n$ ($n \in \omega$) تعریف‌پذیرند، لذا می‌توان سویچ‌های ساخته شده در همان اثبات را نیز بکار برد، لذا اثبات قضیه اصلی دقیقاً کار می‌کند و حکم را نتیجه می‌دهد. $\square$

نتیجه ۱۶.۳.۲. فرض کنید $X \subseteq Y$ با توجه به تعاریف و قضایا داریم

$$S\mathfrak{f} \cdot 2 \subseteq Force(\pi(Y), V) \subseteq Force(\pi(X), V) \subseteq Force(V) \subseteq S\mathfrak{f}.$$

قضیه ۱۷.۳.۲. (همکینز [۱۳])

اگر Γ دارای یک خانواده یکنواخت از دکمه‌های مستقل به تعداد Ord روی V باشد، آنگاه

$$Force(\pi(X), V, \Gamma) \subseteq S\mathfrak{f} \cdot 2.$$

برهان. فرض کنید $\{b_\alpha : \alpha \in Ord\}$ خانواده مستقل داده شده از دکمه‌ها باشد. قرار دهید

$$B = \{b_n : n \in \omega\}.$$

همچنین به ازای هر اوردینال α

$$\zeta(\alpha) = \sup\{\gamma > \omega + \alpha : b_\gamma \text{ فشرده شده است.}\}$$

حال تعریف کنید $r_\alpha = b_{\zeta(\alpha)}$. واضح است که $\langle r_\alpha : \alpha \in Ord \rangle$ یک کنترلگر بلند می‌باشد. حال با توجه به اثبات قضیه ۳.۳.۲ این کنترلگر، سویچ‌های مستقل روی V به دست می‌دهد که توام با B مستقل می‌باشد، چرا که b_α ها در ابتدا مستقل بودند. $\square$

همانطور که دیدیم $S \cdot 5$ یک کران بالا برای منطق موجّهات فورسینگ می‌باشد. حال این

سوال طبیعی به وجود می‌آید که آیا مدلی از V وجود دارد که $S \cdot 5$ ؟ $Force(V) = S \cdot 5$

جواب به این سوال اصول جدیدی را در نظریه مجموعه‌ها معرفی می‌کند. پاسخ این سوال را در فصل بعد می‌آوریم.

فصل ۳

اصول بیشینگی همکینز

شاید کمتر اصل بیشینگی در نظریه مجموعه‌ها مرتبط با فورسینگ بتوان یافت که به سادگی اصول بیشینگی همکینز باشد و این شاید یکی از دلایلی است که همکینز نام مقاله‌ی خود را ”یک اصل بیشینگی ساده“ نهاده است. هرچند سازگاری مهم‌ترین و قوی‌ترین اصل بیشینگی همکینز در هاله‌ای از ابهام است، اما نتایج آن حیرت انگیز می‌باشند، نتایجی که سازگاری آنها مغزها و قلم‌های بسیاری را در جهان بیرون و درون کاغذ به کار گماشته است، و این همان چیزی است که اثبات سازگاری این اصل را سخت کرده است. در واقع اگر سازگار باشد، تاوان قدرت سازگاری نتایج بلافصل خود را باید در سختی و بغرنجی اثبات سازگاری خود بدهد.

۱.۳ سازگاری اصول بیشینگی

تعریف ۱.۱.۳. (اصل بیشینگی همکینز ^۱) فرض کنید Γ یک کلاس از مفاهیم فورسینگ در زبان $\mathcal{L}_\in(X)$ باشد، فرم کلی اصل بیشینگی همکینز بیان می‌کند که:

اگر ϕ یک جمله در زبان $\mathcal{L}_\in(X)$ باشد، آنگاه $\diamond_\Gamma \Box_\Gamma \phi \implies \phi$.

این اصل را با $MP_\Gamma(X)$ نمایش می‌دهیم.

دقت داریم در واقع به زبان منطق موجهات اصل بیشینگی ^۲ همان اصل $S \cdot 5$ می‌باشد. با

^۱Hamkins' Maximality Principle

^۲در این فصل منظور از اصل بیشینگی همواره اصل بیشینگی همکینز می‌باشد.

توجه به قضایایی که در ادامه می‌آید در حقیقت اثبات خواهیم کرد که مدل V از ZFC وجود دارد که $Force(V) = S \cdot 5$.

تعریف ۲.۱.۳. (اصل بیشینگی ضروری همکینز^۳) شکل دیگری از اصل بیشینگی وجود دارد که به آن اصل بیشینگی ضروری گوئیم که بیان می‌کند $MP_{\Gamma}(X)$ ضروری می‌باشد، یعنی

$$\Box_{\Gamma} MP_{\Gamma}(X).$$

در حالت کلی $\Box_{\Gamma} MP_{\Gamma}(X)$ سازگار نمی‌باشد (گزاره زیر را ببینید). در این فصل سعی بر آن است تا با محدودیت‌هایی روی X یا Γ سازگاری این اصول را مورد بررسی قرار دهیم.

گزاره ۳.۱.۳.

۱. $MP(A)$ که $A \not\subseteq H(\omega_1)$ سازگار نمی‌باشد.

۲. $\Box_{c.c.c} MP_{c.c.c}(H(\omega_2))$ ناسازگار می‌باشد.

برهان.

۱. فرض کنید $V \models ZFC$ و در V داشته باشیم $a \in A \setminus H(\omega_1)$. حال فرض کنید

$$\phi \equiv "a \in H(\omega_1)".$$

با فروپاشی $|a|$ بر روی ω خواهیم داشت $a \in H(\omega_1)$ و همچنین ϕ در تمام گسترش‌های فورسینگی بعدی نیز برقرار می‌باشد، لذا ϕ روی V ممکناً لازم می‌باشد اما ϕ در V برقرار نمی‌باشد، لذا $MP(A)$ نادرست می‌باشد.

۲. اثبات این قسمت را بعد از نتیجه ۲۲.۱.۳ می‌آوریم.

□

قضیه ۴.۱.۳. (همکینز [۱۰]) MP سازگار می‌باشد.

^۳Hamkins' Necessary Maximality Principle

برای اثبات این قضیه نیازمند لم زیر می‌باشیم که نقش اساسی در اثبات آن و چند قضیه دیگر بازی می‌کند.

لم ۵.۱.۳. اوردینال δ وجود دارد که $ZFC + V_\delta \prec V$ سازگار می‌باشد.

برهان. فرض کنید $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}_\infty \cup \{\delta^*\}$ که در آن δ^* یک نماد ثابت می‌باشد. اگر $T = ZFC + V_\delta \prec$ در زبان $\mathcal{L}_\infty$ ناسازگار باشد لذا در زبان $\mathcal{L}^*$ نیز ناسازگار می‌باشد، بنابراین کافی است نشان دهیم که در زبان $\mathcal{L}^*$ سازگار می‌باشد. فرض کنید $M \models ZFC$ باشد و $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ یک خانواده متناهی از نظریه T باشد، لذا با قضیه بازتاب لوی، اوردینال δ وجود دارد که $V_\delta \models \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n$. حال با تعبیر δ^* به δ هر زیرمجموعه‌ی متناهی از نظریه T یک مدل دارد. لذا با توجه به قضیه فشردگی، تمام نظریه T مدل دارد. $\square$

(برهان قضیه ۴.۱.۳). باتوجه به لم ۵.۱.۳ فرض کنید κ به گونه‌ای باشد که $V_\kappa \prec V$. فرض کنید که $\mathbb{P} = Col(\omega, \kappa)$ و G یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ - ژنریک باشد. نشان می‌دهیم که $V[G] \models MP$. لذا فرض کنید که $V[G] \models \Diamond \Box \phi$ ، پس $p \in \mathbb{P}$ وجود دارد که $p \Vdash \exists q (\exists q \in \mathbb{Q} q \Vdash \Box \phi)$. حال با نشان دادن مقدماتی $V_\kappa \prec V$ ، $\mathbb{Q} \in V_\kappa$ و $q \Vdash \Box \phi$ وجود دارند که $(p, q) \Vdash \Box \phi$. بنابراین $V^{\mathbb{P} * \mathbb{Q}} \models \Box \phi$ ولی با توجه به قضیه ۳۱.۲.۱ داریم $\mathbb{P} * \mathbb{Q} \approx \mathbb{P}$. لذا $V^{\mathbb{P}} \models \phi$ که نتیجه می‌دهد $V[G] \models MP$. $\square$

همانطور که لم ۵.۱.۳ در اثبات قضیه بالا نقشی اساسی بازی می‌کند، در اینجا نیز قضیه زیر به کمک ما می‌آید تا بتوانیم همان تکنیک را اجرا کنیم.

لم ۶.۱.۳. اگر $V_\kappa \prec V$ و $\mathbb{P} \subseteq V_\kappa$ یک مفهوم فورسینگ با خاصیت $\kappa.c.c$ و G ، یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ - ژنریک باشد. آنگاه $V_\kappa[G] \prec V[G]$.

برهان. فرض کنید A یک پادزنجر بیشینه از $\mathbb{P}$ در V_κ باشد، چون $|A| < \kappa$ لذا $A \in V_\kappa$ و A یک پادزنجر بیشینه از $\mathbb{P}$ در V می‌باشد. از طرفی G یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ - ژنریک است و لذا $A \cap G \neq \emptyset$ ، اگر $p \in A \cap G$ ، آنگاه خواهیم داشت $p \in V_\kappa$ که نشان می‌دهد G یک پالایه $(V_\kappa, \mathbb{P})$ - ژنریک نیز می‌باشد.

با توجه به تست تارسکی-وات، فرض کنید $V[G] \models \exists x \phi(x)$ لذا $p \in \mathbb{P}$ وجود دارد که

$(p \Vdash \exists x \phi(x))^{V_\kappa}$ داریم $V_\kappa \prec V$ و اینکه $V_\kappa \prec V$ حال به لطف لم تعریف پذیری و این بدین معنی است که $V_\kappa[G] \models \exists x \phi(x)$ بنابراین $V_\kappa[G] \prec V[G]$. $\square$

قضیه ۷.۱.۳. (همکینز [۱۰]) موارد زیر هم سازگار می باشند.

۱. کاردینال دسترس ناپذیر κ وجود دارد که $V_\kappa \prec V$.

۲. $\text{MP}(\aleph^\omega)$.

برهان. $(1 \implies 2)$ فرض کنید $\mathbb{P} = \text{Col}(\omega, < \kappa)$ باشد و G یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ – ژنریک باشد. نشان می دهیم $V[G] \models \text{MP}(\aleph^\omega)$. لذا مانند برهان قضیه ۴.۱.۳ فرض کنید $V[G] \models \Diamond \Box \phi(\bar{x})$ که در آن $\bar{x} \in \aleph^\omega$ از طرفی $\lambda < \kappa$ وجود دارد که $\bar{x} \in V[G_\lambda]$ که در آن $G_\lambda = G \cap \text{Col}(\omega, < \lambda)$ و اینکه $V_\kappa \prec V$ داریم $V_\kappa[G_\lambda] \prec V[G_\lambda]$ لذا $\mathbb{Q} \in V_\kappa[G_\lambda]$ وجود دارد که $V[G_\lambda]^\mathbb{Q} \models \Box \phi(\bar{x})$ و لذا $V^{\mathbb{P}_\lambda * \dot{\mathbb{Q}}} \models \Box \phi(\bar{x})$ حال با توجه به اینکه $|\mathbb{P}_\lambda * \dot{\mathbb{Q}}| < \kappa$ از قضیه ۳۱.۲.۱ داریم $V^{\mathbb{P}_\lambda * \dot{\mathbb{Q}}} \subseteq V^\mathbb{P}$ ، پس $V[G] \models \phi(\bar{x})$ که حکم را اثبات می کند.

$(2 \implies 1)$ فرض کنید $\text{MP}(\aleph^\omega)$ برقرار باشد. قرار دهید $\delta = \omega_1$. فرض کنید r یک عدد حقیقی باشد و ϕ جمله زیر باشد

” اولین کاردینال ناشمارای $L[r]$ ، شمارا می باشد.“

چون $\text{MP}(\aleph^\omega)$ برقرار می باشد و ϕ ممکناً ضروری می باشد، بنابراین $\omega_1^{L[r]} < \delta$. که قضیه ۱۷.۱.۳ نتیجه می دهد δ در L دسترس ناپذیر می باشد. حال نشان می دهیم L_δ یک زیرساختار مقدماتی از L می باشد. فرض کنید $L \models \exists x \psi(x)$ و فرض کنید α کوچکترین اردینال باشد که $a \in L_\alpha$ وجود دارد به قسمی که $L \models \psi(a)$. فرض کنید ξ جمله زیر باشد

” کوچکترین اردینال α که $a \in L_\alpha$ وجود دارد به قسمی که $\psi(a)^L$ ، شمارا می باشد.“

چون پارامترهای احتمالی ψ در L_δ قرار دارند، می توان آن ها را در یک عدد حقیقی کد کرد، بنابراین پارامترهای ξ در $\aleph^\omega$ قرار دارند، از طرفی ξ ممکناً ضروری می باشد. پس باید درست باشد. لذا a می تواند در L_δ پیدا شود که با تست تارسکی – وات داریم $L_\delta \prec L$. $\square$

تعریف ۸.۱.۳. گوئیم کاردینال ناشمارای κ یک کاردینال به طور ضعیف فشرده^۴ می باشد، اگر

^۴Weakly Compact Cardinal

به ازای هر $\kappa < \lambda$ و هر تابع $F : [\kappa]^2 \rightarrow \lambda$ یک زیرمجموعه $\mathcal{H} \subseteq \kappa$ از اندازه κ وجود دارد که F روی $[\mathcal{H}]^2$ ثابت می‌باشد. به ازای مجموعه A ، $[A]^2$ یعنی مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی A .

لم ۹.۱.۳. کاردینال κ به طور ضعیف فشرده است، اگر و تنها اگر، به ازای هر مدل متعدی M از ZFC^- که در آن

$$1. |M| = \kappa,$$

$$2. \kappa \in M,$$

$$3. M^{<\kappa} \subseteq M.$$

آنگاه مدل متعدی N و نشان دادن مقدماتی $j : M \rightarrow N$ وجود دارد که $\text{crit}(j) = \kappa$. جایی که $\text{crit}(j)$ کوچکترین اوردینال α است که $j(\alpha) > \alpha$.

برهان. نگاه کنید به [۱۹]. □

گزاره ۱۰.۱.۳. فرض کنید κ یک کاردینال به طور ضعیف فشرده باشد آنگاه حاصلضرب با تکیه متناهی هر خانواده از فورسینگ‌ها با خاصیت $\kappa.c.c$ ، خاصیت $\kappa.c.c$ دارد.

برهان. نگاه کنید به [۱۹]. □

قضیه ۱۱.۱.۳. (همکینز-وودین [۱۰]) موارد زیر معادلند:

۱. یک کاردینال به طور ضعیف فشرده وجود دارد.

۲. $\square_{c.c.c} \text{MP}_{c.c.c}(\aleph_1)$ سازگار می‌باشد.

برهان. برای اثبات نیاز به چند لم داریم، بنابراین برهان را بعد از این لم‌ها می‌آوریم. □

لم ۱۲.۱.۳. فرض کنید κ یک کاردینال به طور ضعیف فشرده و $\mathbb{P}$ یک $\kappa.c.c$ - فورسینگ باشد. اگر G یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ - ژنریک باشد و $x \in H(\kappa)^{V[G]}$ ، آنگاه $\kappa.c.c$ - فورسینگ $\mathbb{Q}$ وجود دارد که $x \in V^{\mathbb{Q}}$ و اندازه $\mathbb{Q}$ از κ کمتر می‌باشد.

برهان. واضح است که اگر $|\mathbb{P}| < \kappa$ حکم برقرار می‌باشد، لذا فرض کنید $|\mathbb{P}| \geq \kappa$. فرض کنید کاردینال منظم $\kappa < \theta$ به‌گونه‌ای باشد که $\mathbb{P} \in H(\theta)$ و فرض کنید τ یک $\mathbb{P}$ – نام برای x باشد، بدون کاستن از کلیت، فرض کنید $x \subseteq \kappa$ و $|x| < \kappa$. زیرساخت مقدماتی $\mathcal{M}$ از $H(\theta)$ را به گونه‌ای انتخاب کنید که

$$\bullet \kappa, \tau, \mathbb{P} \in \mathcal{M}.$$

$$\bullet |\mathcal{M}| = \kappa.$$

$$\bullet \mathcal{M}^{<\kappa} \subseteq \mathcal{M}.$$

چون κ دسترس‌ناپذیر است، چنین $\mathcal{M}$ ای وجود دارد.

- حالت اول، $|\mathbb{P}| = \kappa$: با توجه به لم ۹.۱.۳ N متعدی و نشانیدن مقدماتی $j : M \rightarrow N$ وجود دارند که $\text{crit}(j) = \kappa$. حال نشان می‌دهیم

$$N \models (\exists Q \triangleleft j(\mathbb{P})) [|Q| < |j(\mathbb{P})| \wedge (\exists \sigma \restriction_{j(\mathbb{P})} \Vdash \sigma = j(\tau))]$$

جایی که σ یک Q – نام در N است.

چون $|\mathbb{P}| = \kappa$ لذا می‌توان فرض کرد $\mathbb{P} \subseteq V_\kappa^M$ که نتیجه می‌دهد $\mathbb{P} \subseteq j(\mathbb{P})$. حال فرض کنید $A \subseteq \mathbb{P}$ یک پادزنجیر بیشینه در N باشد، لذا $|A| < \kappa$ که نتیجه می‌دهد

$$M \models \forall p \in \mathbb{P} \exists q \in A \parallel q \parallel p.$$

و لذا با نشانیدن مقدماتی داریم:

$$N \models \forall p \in j(\mathbb{P}) \exists q \in j(A) = A \parallel q \parallel p.$$

از طرفی چون τ یک $\mathbb{P}$ – نام برای x است و $x \in H(\kappa)$ لذا می‌توان فرض کرد $x \subseteq \kappa$ و $|\tau| < \kappa$ بنابراین $j(\tau) = \tau$. قرار دهید $\sigma = \tau$. لذا $\restriction_{j(\mathbb{P})} \Vdash \sigma = \tau$. حال با توجه به نشانیدن مقدماتی، $\mathbb{Q} \triangleleft \mathbb{P}$ و یک Q – نام وجود دارند که $\restriction_{\mathbb{P}} \Vdash \sigma = \tau$. لذا حکم اثبات می‌شود.

• حالت دوم، $|\mathbb{P}| > \kappa : \mathbb{P} \cap \mathcal{M}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $A \subseteq \mathbb{P} \cap \mathcal{M}$ یک پادزنجیر بیشینه باشد، چون $\mathbb{P}$ خاصیت $\kappa.c.c$ دارد لذا $|A| < \kappa$ و چون $\mathcal{M}$ تحت دنباله‌های با طول کمتر از κ بسته است لذا $A \in \mathcal{M}$ و بعلاوه با توجه به زیرساخت مقدماتی، A در $\mathcal{M}$ نیز بیشینه می‌باشد و لذا $\mathbb{P} \cap \mathcal{M} \triangleleft \mathbb{P}$ حال با توجه به حالت اول، $\mathbb{Q}$ از اندازه کمتر از κ وجود دارد که $\mathbb{Q} \triangleleft \mathbb{P} \cap \mathcal{M} \triangleleft \mathbb{P}$ و $\mathbb{Q} - \mathbb{P}$ نام σ وجود دارد که $\Vdash_{\mathbb{P} \cap \mathcal{M}} \tau = \sigma$ که حکم را اثبات می‌کند.

□

فورسینگ فضای ترم^۵

در این قسمت یک فورسینگ جدید می‌آوریم و به آن فورسینگ فضای ترم گوییم. این فورسینگ توسط دو فورسینگ داده شده ساخته می‌شود.

تعریف ۱۳.۱.۳. فرض کنید $\mathbb{P}$ یک فورسینگ و $\dot{\mathbb{Q}}$ یک $\mathbb{P}$ - نام برای فورسینگ $\mathbb{Q}$ باشد. فرض کنید $A(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ مجموعه‌ی تمام $\mathbb{P}$ - نام‌های متعارف از اعضای $\dot{\mathbb{Q}}$ باشد. $A(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ را با رابطه زیر در نظر بگیرید.

$$\dot{\sigma} \leq_{A(\mathbb{P}, \mathbb{Q})} \dot{\tau} \iff \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{\sigma} \leq_{\dot{\mathbb{Q}}} \dot{\tau}$$

به این فورسینگ، فورسینگ فضای ترم به دست آمده از $\dot{\mathbb{Q}}$ روی $\mathbb{P}$ گوییم.

لم ۱۴.۱.۳. فرض کنید H یک پالایه $(V, A(\mathbb{P}, \mathbb{Q}))$ - ژنریک باشد و W مدلی از نظریه مجموعه‌ها که $V[H] \subseteq W$. اگر یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ - ژنریک G وجود داشته باشد، آنگاه یک پالایه $(V[G], \mathbb{Q})$ - ژنریک در W وجود دارد.

برهان. فرض کنید $K = \{q[G] : q \in A(\mathbb{P}, \mathbb{Q})\}$ ، لذا $K \in W$. ادعا می‌کنیم K یک پالایه $(V[G], \mathbb{Q})$ - ژنریک می‌باشد. پالایه بودن K با توجه به تعریف $A(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ واضح است. فرض کنید $D \in V[G]$ در $\mathbb{Q}$ چگال باشد و $\dot{D}$ یک $\mathbb{P}$ - نام برای D باشد که " $\dot{D}$ چگال می‌باشد" $\Vdash$ ۱. فرض کنید $D^* = \{\dot{q} : 1 \Vdash \dot{q} \in \dot{D}\}$. D^* در $A(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ چگال می‌باشد؛ فرض کنید $\dot{p} \in A(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ بنابراین یک $q \leq p$ وجود دارد که $q \in D$ لذا $q \in D^*$ و چون $\dot{D}$ "چگال می‌باشد"

^۵TermSpace Forcing

“ $1 \Vdash \dot{q} \in D^*$ ، لذا $1 \Vdash \dot{q} \in D^* \cap H$. فرض کنید $q \in D^* \cap H$ ، پس داریم $q[G] \in K \cap D$ که نتیجه می‌دهد K یک پالایه $(V[G], \mathbb{Q})$ – ژنریک می‌باشد. $\square$

لم ۱۵.۱.۳. فرض کنید κ یک کاردینال به طور ضعیف فشرده باشد و $\mathbb{P}$ یک فورسینگ با $|\mathbb{P}| < \kappa$ که “ $\dot{\mathbb{Q}}$ خاصیت $\kappa.c.c$ دارد” $1_{\mathbb{P}} \Vdash$ ، آنگاه $A(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ خاصیت $\kappa.c.c$ دارد.

برهان. به برهان خلف فرض کنید $A = \{\dot{q}_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq A(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ یک پادزنجیر از اندازه κ باشد. لذا به ازای هر دو $\dot{q}_\beta$ و $\dot{q}_\gamma$ متمایز در A شرطی مانند $\dot{q}$ وجود ندارد که

$$1_{\mathbb{P}} \Vdash \dot{q} \leq_{\mathbb{Q}} \dot{q}_\beta \wedge \dot{q} \leq_{\mathbb{Q}} \dot{q}_\gamma.$$

بنابراین $p \in \mathbb{P}$ وجود دارد که $p \Vdash \dot{q}_\beta \perp_{\dot{\mathbb{Q}}} \dot{q}_\gamma$. با استفاده از اصل انتخاب، به ازای هر دو شرط $\dot{q}_\beta$ و $\dot{q}_\gamma$ یک p با ویژگی بالا انتخاب می‌کنیم و با نماد $p_{\gamma, \beta}$ نمایش می‌دهیم. حال تابع $F : [\kappa]^2 \rightarrow \mathbb{P}$ را با ضابطه $F(\{\alpha, \beta\}) = p_{\alpha, \beta}$ تعریف می‌کنیم، چون κ به طور ضعیف فشرده است، لذا $\mathcal{H} \subseteq \kappa$ از اندازه κ و $p \in \mathbb{P}$ وجود دارند که $F \restriction_{[\mathcal{H}]^2} = p$ و این بدین معنی است که

$$p \Vdash \dot{q}_\beta \perp_{\dot{\mathbb{Q}}} \dot{q}_\gamma \quad \forall \beta, \gamma \in \mathcal{H}$$

و اما این در تناقض با “ $\dot{\mathbb{Q}}$ خاصیت $\kappa.c.c$ دارد” $1_{\mathbb{P}} \Vdash$ می‌باشد. $\square$

(برهان قضیه ۲ $\implies$ ۱.۱.۳). فرض کنید κ یک کاردینال به طور ضعیف فشرده در V باشد و $V_\delta \prec V$ بنابراین در V_δ یک کاردینال به طور ضعیف فشرده وجود دارد که با توجه به زیرساختار مقدماتی بودن V_δ این کاردینال در V نیز به طور ضعیف فشرده می‌باشد، لذا بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد $\kappa < \delta$.

حال فرض کنید I گردایه تمام $\langle \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}, \phi(\dot{x}) \rangle$ در V_δ باشد که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\bullet \mathbb{P} \in V_\kappa$$

$$\bullet \dot{x} \text{ یک } \mathbb{P} \text{ – نام برای عضوی از } H(\kappa) \text{ می‌باشد،}$$

$$\bullet \dot{\mathbb{Q}} \in V_\delta^{\mathbb{P}} \text{ یک } \kappa.c.c \text{ – فورسینگ می‌باشد، که } 1_{\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}} \text{ روی } V_\delta \text{ فورس می‌کند که } \phi(\dot{x}) \text{ در}$$

$$\text{تمام } \kappa.c.c \text{ – گسترش‌های } V_\delta^{\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}} \text{ برقرار باشد.}$$

قرار دهید $Q_{\langle \mathbb{P} * \dot{Q}, \phi(\dot{x}) \rangle} = A(\mathbb{P}, Q)$ ، باتوجه به گزاره ۱۰.۱.۳ یک $\kappa.c.c$ – فورسینگ می باشد همچنین با توجه به گزاره ۱۰.۱.۳ بنابراین حاصلضرب آنها با تکیه گاه متناهی $\mathbb{R} = \prod_I A(\mathbb{P}, Q)$ نیز $\kappa.c.c$ می باشد. فرض کنید K یک پالایه $(V, \mathbb{R})$ – ژنریک باشد. ادعا می کنیم $V[K] \models \square_{\kappa.c.c} \text{MP}_{\kappa.c.c}(\mathfrak{V}^\omega)$.

فرض کنید $\mathbb{P} \in V[K]$ یک فورسینگ باشد که عنصر جدید $\dot{x}$ را به $H(\kappa)$ اضافه می کند و $V[K]^{\mathbb{P} * \dot{Q}} \models \diamond_{\kappa.c.c} \square_{\kappa.c.c} \phi(\dot{x})$. بنابراین یک $\kappa.c.c$ فوسینگ $\dot{Q}$ وجود دارد که $V[K]^{\mathbb{P} * \dot{Q}} \models \square_{\kappa.c.c} \phi(\dot{x})$. از طرفی چون $\mathbb{R} * \dot{\mathbb{P}}$ عنصر $\dot{x}$ را در $H(\kappa)$ روی V اضافه می کند، لم ۱۲.۱.۳ تضمین می کند که $\mathbb{P}_* \triangleleft \mathbb{R} * \dot{\mathbb{P}}$ از اندازه کمتر از κ وجود دارد که $\dot{x}$ را اضافه می کند، پس فرض کنید $\dot{x}$ یک $\mathbb{P}_*$ – نام می باشد. از طرفی چون $\mathbb{P}_* \triangleleft \mathbb{R} * \dot{\mathbb{P}}$ لذا $\mathbb{P}_* \triangleleft (\mathbb{R} * \dot{\mathbb{P}}) * \dot{Q}$ ، که نشان می دهد $V[K]^{\mathbb{P} * \dot{Q}}$ یک $\kappa.c.c$ – گسترش از $V^{\mathbb{P}_*}$ می باشد، پس $V^{\mathbb{P}_*} \models \square_{\kappa.c.c} \diamond_{\kappa.c.c} \phi(\dot{x})$. همچنین به کمک نشان دادن مقدماتی داریم $V_\delta^{\mathbb{P}_*} \models \square_{\kappa.c.c} \diamond_{\kappa.c.c} \phi(\dot{x})$. لذا $\langle \mathbb{P}_* * \dot{Q}, \phi(\dot{x}) \rangle \in I$ ، بنابراین پالایه $(V, A(\mathbb{P}_*, Q))$ – ژنریک H در $V[K]$ وجود دارد. فرض کنید $G_* = \mathbb{P}_* \cap K$ که به وضوح یک پالایه $(V, \mathbb{P}_*)$ – ژنریک می باشد و $G_* \in V[K]$. لذا با توجه به لم ۱۴.۱.۳ یک پالایه $(V[G_*], Q)$ – ژنریک G در $V[K]$ وجود دارد ($Q = \dot{Q}_{G_*}$) . و چون $\phi(\dot{x})$ در همه ی $\kappa.c.c$ – گسترش های $V_\delta[G_*][G]$ برقرار می باشد و لذا با نشان دادن مقدماتی در همه ی $\kappa.c.c$ – گسترش های $V[G_*][G]$ برقرار می باشد، اما $V[K]$ یک $\kappa.c.c$ – گسترش از $V[G_*][G]$ می باشد، لذا $V[K] \models \phi(x)$ ، که نشان می دهد

$$V[K] \models \square_{\kappa.c.c} \text{MP}_{\kappa.c.c}(H(\kappa)).$$

حال فرض کنید $\alpha < \kappa$ و

$$\phi(\alpha) \equiv \text{“}\alpha \text{ شمارا می باشد”}$$

لذا اگر C یک پالایه $(V[K], \text{Col}(\omega, \alpha))$ – ژنریک باشد، آنگاه $V[K][C] \models \phi(\alpha)$ یک $\kappa.c.c$ فورسینگ می باشد.) و همچنین در هر گسترش بعدی $(V[K][C])^\S$ خواهیم داشت

$$(V[K][C])^\S \models \phi(\alpha) \wedge \kappa = \aleph_1.$$

لذا $V[K] \models \kappa = \aleph_1$ ، بنابراین $V[K] \models \square_{\kappa.c.c} \text{MP}_{\kappa.c.c}(\mathfrak{V}^\omega)$.

□

برای اثبات طرف دیگر نیز به پیشنیازهایی نیاز داریم که در ادامه می‌آوریم.

تعریف ۱۶.۱.۳. گوییم کاردینال δ به اعداد حقیقی دسترس‌ناپذیر می‌باشد، اگر δ در $L[r]$ دسترس‌ناپذیر باشد، به ازای هر $r \in 2^\omega$.

گزاره ۱۷.۱.۳. $\aleph_1$ به اعداد حقیقی دسترس‌ناپذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر $\aleph_1 \neq \aleph_1^{L[r]}$ داشته باشیم $r \in 2^\omega$.

برهان. ($\Leftarrow$) فرض کنید $r \in 2^\omega$ وجود داشته باشد که $\aleph_1 = \aleph_1^{L[r]}$ ، پس $\aleph_1 = \omega^+$ در $L[r]$ و چون $\aleph_1$ دسترس‌ناپذیر نمی‌باشد، $\aleph_1$ در $L[r]$ نیز دسترس‌ناپذیر نمی‌باشد و لذا $\aleph_1$ دسترس‌ناپذیر به اعداد حقیقی نمی‌باشد.

($\Rightarrow$) فرض کنید به ازای هر r در 2^ω داریم $\aleph_1 \neq \aleph_1^{L[r]}$. چون $\aleph_1$ در V منظم می‌باشد و منظم بودن مطلق پایینی است لذا در $L[r]$ نیز منظم می‌باشد، بنابراین کافی است نشان دهیم برای هر r ، $\aleph_1$ در $L[r]$ قویاً حدی می‌باشد، یعنی " $\forall \kappa < \aleph_1 \ 2^\kappa < \aleph_1$ " در $L[r]$. اما با توجه به اینکه $L[r] \models GCH$ پس کافی است نشان دهیم $\aleph_1$ در $L[r]$ یک کاردینال حدی است. به برهان خلف فرض کنید که به ازای کاردینال $\kappa < \aleph_1$ در $L[r]$ داریم $\kappa^+ = \aleph_1$ ، لذا κ در $L[r]$ شمارا می‌باشد، پس می‌توانیم $\langle \kappa, r \rangle$ را در یک عدد حقیقی کد کنیم، فرض کنید s کدی برای $\langle \kappa, r \rangle$ باشد. حال داریم $L[r] \subseteq L[s]$ و با توجه به کدگذاری داریم $L[s] \models |\kappa| = \aleph_0$ که نشان می‌دهد $\aleph_1 = \aleph_1^{L[s]}$ که تناقض می‌باشد، بنابراین $\aleph_1$ در $L[r]$ قویاً حدی و لذا دسترس‌ناپذیر می‌باشد. □

لم ۱۸.۱.۳. خانواده $\{e_\alpha : \alpha \rightarrow \omega : \omega \leq \alpha < \omega_1\}$ از توابع با خواص زیر وجود دارد. به ازای هر $\alpha < \omega_1$

۱. e_α یک به یک می‌باشد.

۲. به ازای هر $\omega \leq \beta < \alpha$ ، $\omega \leq \beta < \alpha$ ، $|e_\alpha(\zeta) \neq e_\beta(\zeta)| < \omega$ ، $\zeta < \beta$.

به چنین دنباله‌ای از توابع یک دنباله تقریباً منسجم گوییم.

برهان. ([۲۹]) دنباله را استقرایی می‌سازیم و در هر مرحله از استقرا همواره فرض بر آن است که متمم برد توابع نامتناهی می‌باشد. e_ω را یک تابع یک به یک دلخواه در نظر بگیرید. فرض کنید e_α ساخته شده است، در حالت تالی به راحتی می‌توان $e_{\alpha+1}$ را با خواص خواسته شده یافت. فرض کنید α یک اردینال حدی باشد و فرض کنید دنباله اکیداً صعودی $\langle \alpha_n : n < \omega \rangle$ به گونه‌ای باشد که $\sup\{\alpha_n : n < \omega\} = \alpha$.

حال e_α را به صورت تکه تکه روی بازه‌های (α_n, α_{n+1}) تعریف می‌کنیم. فرض کنید e_α روی (α_0, α_0) برابر با e_{α_0} باشد. e_α را روی (α_0, α_1) برابر با e_{α_1} تعریف کنید مگر در نقاطی که مانع یک به یک شدن e_α می‌شود، در این نقاط با استفاده از نامتناهی بودن متمم برد توابع ساخته شده، تابع را تعریف کنید، همچنین با توجه به خواص توابع این تغییرات فقط در تعدادی متناهی صورت می‌گیرد. با ادامه این رود تابع e_α روی α تعریف می‌شود. به وضوح e_α به دست آمده یک به یک می‌باشد. کافی است شرط دوم را بررسی کنیم. فرض کنید $\beta < \alpha$ ، بنابراین n وجود دارد که $\beta < \alpha_n$. حال e_α را به α_n تحدید می‌کنیم. چون به تعدادی متناهی تغییرات در توابع e_{α_k} که $k < n$ به وجود آورده ایم لذا با توجه به فرض استقرا شرط دوم نیز برقرار می‌باشد. $\square$

با استفاده از لم‌های بالا قضیه زیر به دست می‌آید. قضیه زیر اولین بار توسط شلاه^۶ به اثبات رسیده است اما برهانی که در زیر می‌آید متعلق به تودورسویچ می‌باشد.

قضیه ۱۹.۱.۳. (تودورسویچ^۷ [۲۸]) اگر $c : \omega \rightarrow \omega$ یک تابع ژنریک برای فورسینگ C_ω باشد و

$$e = \{e_\alpha : \alpha \rightarrow \omega : \omega \leq \alpha < \omega_1\}$$

تقریباً منسجم باشد. قرار دهید

$$E = \{e_\alpha \restriction \beta : \beta \leq \alpha, e_\alpha \in e\}$$

آنگاه $(T(e, c), \subseteq)$ یک درخت سوسلین می‌باشد، که

$$T(e, c) = \{c \circ f : f \in E\}.$$

^۶Shelah

^۷Stevó Todorćević

برهان. فرض کنید $f \in T(e, c)$ و $\emptyset \neq A \subseteq \text{pred}(f)$ ، قرار دهید $\beta = \min\{\text{dom}(h) : h \in A\}$ و $g = \min(A)$. لذا $f \restriction_\beta = g$ واضح است که $\beta = \text{dom}(g)$ و $g \in A$ فرض کنید $\alpha < \omega_1$ هر ازای داریم $(T(e, c), \subseteq)$ یک درخت است. همچنین به ازای هر $\alpha < \omega_1$ داریم

$$T_\alpha = \{f \in T : \text{dom}(f) = \alpha\}.$$

چون دنباله e از طول ω_1 می باشد، لذا $T_\alpha \neq \emptyset$ به علاوه $T_{\omega_1} = \emptyset$ ، بنابراین $ht(T) = \omega_1$. اگر B یک زنجیر ناشمارا در T باشد، آنگاه $\bigcup B : \omega_1 \rightarrow \omega$ یک تابع یک به یک می باشد، که ممکن نیست، لذا طول هر زنجیر شمارا می باشد. لذا طول هر شاخه نیز شمارا می باشد. حال نشان می دهیم، به ازای هر $\alpha < \omega_1$ ، T_α شمارا می باشد. به ازای $\alpha < \omega$ حکم واضح است. فرض کنید $\omega \leq \alpha$ و T_α ناشمارا باشد. بنابراین $U \subseteq \omega_1$ بی کران وجود دارد که

$$A = \{c \circ e_\beta \restriction_\alpha : \beta \in U\}$$

ناشمارا می باشد. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$F : \{\beta \in U : \alpha < \beta \wedge c \circ e_\beta \in A\} \rightarrow \omega^{<\omega}$$

$$F(\beta) = \{\zeta < \alpha : c \circ e_\alpha(\zeta) \neq c \circ e_\beta(\zeta)\}$$

با توجه به شرط دوم تعریف دنباله تقریباً منسجم، F خوش تعریف می باشد و همچنین $\text{dom}(F)$ نیز ناشمارا می باشد. بنابراین $r \subseteq \omega$ متناهی و $I \subseteq U$ از اندازه $\aleph_1$ وجود دارند که $F[I] = r$. از طرفی مجموعه $\{c \circ e_\beta \restriction_r : \beta \in I\}$ شمارا می باشد، پس $J \subseteq I$ بی کران وجود دارد که

$$\forall \beta, \gamma \in J \quad c \circ e_\beta \restriction_r = c \circ e_\gamma \restriction_r$$

بنابراین

$$\forall \beta, \gamma \in J \quad c \circ e_\beta \restriction_\alpha = c \circ e_\gamma \restriction_\alpha$$

که تناقض می باشد.

همانطور که دیدیم در اثبات درخت بودن $T(e, c)$ ، ژنریک بودن c نقشی بازی نمی کند و در واقع

هر تابع $\omega \rightarrow \omega : c$ این خاصیت را دارد، حال با استفاده از ژنریک بودن c نشان می‌دهیم $T(e, c)$ یک درخت سوسلین است و بنابراین کافی است نشان دهیم هر پادزنجر در آن شمارا می‌باشد.

فرض کنید $I \subseteq \omega_1$ نامشمارا باشد، نشان می‌دهیم $\alpha, \beta \in I$ متمایز، وجود دارند که $c \circ e_\alpha$ و $c \circ e_\beta$ مقایسه‌پذیر می‌باشند. تعریف کنید

$$D_I = \{p \in \mathcal{C}_\omega : \exists \alpha, \beta \in I \ p \Vdash \star_{\alpha, \beta}\}$$

جایی که به ازای $\alpha < \beta$ ، $\star_{\alpha, \beta}$ یعنی

$$\forall \zeta < \alpha [e_\alpha(\zeta) \neq e_\beta(\zeta) \rightarrow (e_\alpha(\zeta) \in \text{dom}(p) \wedge e_\beta(\zeta) \in \text{dom}(p) \wedge p(e_\alpha(\zeta)) = p(e_\beta(\zeta)))]$$

اگر D_I در $\mathcal{C}_\omega$ چگال باشد و G یک پالایه $(V, \mathcal{C}_\omega)$ -ژنریک باشد، آنگاه $\exists p \in G \cap D_I$ و لذا $\alpha < \beta$ در I وجود دارند که $p \Vdash \star_{\alpha, \beta}$ بنابراین در $V[G]$ خواهیم داشت

$$c \circ e_\alpha(\zeta) = c \circ e_\beta(\zeta) \quad \forall \zeta < \alpha.$$

که نشان می‌دهد $c \circ e_\alpha \subseteq c \circ e_\beta$ و قضیه به اثبات می‌رسد.

با توجه به آنچه دیدیم فقط باقی می‌ماند نشان دهیم D_I چگال می‌باشد. فرض کنید $q \in \mathcal{C}_\omega$ داده شده باشد بنابراین $n \in \omega$ وجود دارد که $\text{dom}(q) \subseteq n+1$ ، حال قرار دهید $r = e_\omega^{-1}[n+1]$ مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید $\{e_\alpha \restriction_r : \alpha \in I\}$ به وضوح این مجموعه شمارا می‌باشد، لذا اردینال‌های $\alpha < \beta$ در I وجود دارند که $e_\alpha \restriction_r = e_\beta \restriction_r$. قرار دهید

$$t = \{e_\alpha(\zeta) : \zeta \in r \cup s\} \cup \{e_\beta(\zeta) : \zeta \in r \cup s\}$$

که در آن $s = \{\zeta \leq \beta : e_\alpha(\zeta) \neq e_\beta(\zeta)\}$ و می‌دانیم متناهی است. بنابراین $n+1 \cap t \neq \emptyset$ لذا می‌توان به راحتی q را به یک p با $\text{dom}(p) = n \cup t$ گسترش داد که $\forall \zeta \in s \ p(e_\alpha(\zeta)) = p(e_\beta(\zeta))$ لذا $p \in D_I$ بنابراین D_I چگال می‌باشد.

□

قضیه ۲۰.۱.۳. (شلاه-هرینگتون^{۱۷}) اگر MA برقرار باشد و ω_1 به اعداد حقیقی دسترس‌ناپذیر باشد، آنگاه ω_1 در L به طور ضعیف فشرده می‌باشد.

^{۱۷}Leo Harrington

□ برهان. نگاه کنید به [۱۷].

قضیه ۲۱.۱.۳. اگر $\Box_{c.c.c} \text{MP}_{c.c.c}(\mathcal{P}^\omega)$ برقرار باشد، آنگاه ω_1 به اعداد حقیقی دسترس ناپذیر می باشد.

برهان. با توجه به لم ۱۷.۱.۳ کافی است نشان دهیم $\aleph_1 \neq \aleph_1^{L[r]}$ ، به ازای هر $r \in \mathcal{P}^\omega$. لذا به برهان خلف فرض کنید که $r \in \mathcal{P}^\omega \cap V$ و $\aleph_1 = \aleph_1^{L[r]}$. فرض کنید $\{e_\alpha : \omega \leq \alpha < \omega_1\}$ ، $<_{L[r]}$ – کوچکترین دنباله تقریباً منسجم در $L[r]$ باشد و فرض کنید $T(c)$ درخت سوسلینی باشد که در قضیه ۱۸.۱.۳ ساخته شده است، که در آن c یک $(L[r], \mathcal{C}_\omega)$ – ژنریک می باشد. با توجه به اینکه رابطه‌ی خوش‌ترتیبی متعارف روی $L[r]$ ، در زبان $\mathcal{L}_\in(\{r\})$ مطلقاً تعریف پذیر می باشد، لذا $T(c)$ در زبان $\mathcal{L}_\in(\{r, c\})$ مطلقاً تعریف پذیر می باشد.

حال چون $T(c)$ یک درخت سوسلین می باشد، لذا $(T(c), \supseteq)$ یک $c.c.c$ – فورسینگ می باشد. حال فرض کنید ϕ گزاره زیر باشد؛

” $T(c)$ یک شاخه به طول ω_1 دارد.“

این گزاره در زبان $\mathcal{L}_\in(\{r, c\})$ قابل بیان است و همچنین $T(c) \models \phi$ ، از طرفی به ازای هر $c.c.c$ – فورسینگ $\mathbb{P}$ داریم $\mathbb{P} \models \phi$ ، $(V[c]^{T(c)})^\mathbb{P} \models \phi$ ، لذا ϕ یک جمله $c.c.c$ – ممکناً $c.c.c$ – ضروری می باشد، اما اگر $\Box_{c.c.c} \text{MP}_{c.c.c}(\mathcal{P}^\omega)$ برقرار باشد خواهیم داشت $V[c] \models \phi$ که نادرست می باشد. لذا فرض خلف باطل می باشد پس ω_1 به اعداد حقیقی دسترس ناپذیر است.

نتیجه ۲۲.۱.۳. اگر $\Box_{c.c.c} \text{MP}_{c.c.c}(\mathcal{P}^\omega)$ برقرار باشد، آنگاه ω_1 در L به طور ضعیف فشرده می باشد.

□ برهان. با توجه به قضیه بالا و قضیه شلاه – هرینگتون واضح می باشد.

(برهان قضیه ۱۱.۱.۳ $\Rightarrow ۲$). فرض کنید $\Box_{c.c.c} \text{MP}_{c.c.c}(\mathcal{P}^\omega)$ برقرار باشد، از قضیه ۲۱.۱.۳ می دانیم ω_1 به اعداد حقیقی دسترس ناپذیر است. بنابراین با قضیه شلاه و هرینگتون ω_1 در L به طور ضعیف فشرده است.

□

همانطور که قول داده بودیم، برهان قسمت دوم گزاره ۳.۱.۳ را در زیر می آوریم.

برهان قسمت دوم قضیه ۳.۱.۳. فرض کنید $V \models ZFC + MP_{ccc}(H(\omega_2))$. فرض کنید $\mathbb{P}$ یک $c.c.c$ - فورسینگ باشد و D خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های چگال $\mathbb{P}$ که $|\mathbb{P}| \leq \omega_1 = |D|$. حال فرض کنید جمله $\phi(p, d)$ بیانگر آن باشد که:

”پالایه g در p وجود دارد که $g \cap a \neq \emptyset$ به ازای هر $a \in d$.”

حال چون $|\mathbb{P}| < \omega_1 = |D|$ لذا $\mathbb{P}, D \in H(\omega_2)$ ، بنابراین $\mathbb{P}$ و D در حوزه پارامترهای $MP(H(\omega_2))$ قرار دارند، از طرفی اگر G یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ ژنریک باشد، آنگاه در هر گسترش بعدی از $V[G]$ داریم $G \cap D \neq \emptyset$ به ازای هر $D \in \mathcal{D}$. لذا $V \models \Diamond \Box \phi(\mathbb{P}, D)$ و بنابراین $V \models \phi(\mathbb{P}, D)$ لذا

$$MP(H(\omega_2)) \implies MA_{\omega_1}.$$

حال فرض کنید $V \models \Box MP(H(\omega_2))$ لذا در هر $c.c.c$ - گسترش $V^{\mathbb{P}}$ از V خواهیم داشت $V \models MA_{\omega_1}$. اما با توجه به قضیه ۱۹.۱.۳ اضافه کردن یک زیرمجموعه کوهن از ω توسط فورسینگ کوهن $\mathcal{C}_\omega$ ، یک درخت سوسلین اضافه می‌کند، اما فورسینگ کوهن $c.c.c$ می‌باشد و از طرفی MA_{ω_1} همه‌ی درخت‌های سوسلین را از بین می‌برد، بنابراین $MP_{ccc}(H(\omega_2))$ ناسازگار می‌باشد. $\square$

۲.۳ یک نسخه میانی از اصل بیشینگی همکینز

در این زیربخش یک نسخه جدید از اصل بیشینگی همکینز معرفی می‌کنیم، سپس سازگاری آن را به اثبات می‌رسانیم. در واقع این نسخه میانی $\Box_{ccc} MP(2^\omega)$ می‌باشد و به این دلیل به آن نسخه میانی گوئیم که از $\Box_{ccc} MP_{ccc}(2^\omega)$ قوی‌تر و از $\Box MP(2^\omega)$ ضعیف‌تر می‌باشد.

قضیه ۱.۲.۳. [۲۶] موارد زیر هم‌سازگار می‌باشند.

۱. کاردینال به طور ضعیف فشرده κ وجود دارد که $V_\kappa \prec V$.

۲. $\Box_{ccc} MP(2^\omega)$.

برهان. (۲ $\Rightarrow$ ۱) فرض کنید κ یک کاردینال به طور ضعیف فشرده باشد که $V_\kappa \prec V$. قرار دهید $\mathbb{P} = \text{Coll}(\omega, < \kappa)$ و فرض کنید G یک پالایه $(V, \mathbb{P})$ - ژنریک باشد. با توجه به قضیه ۷.۱.۳ داریم $V[G] \models \text{MP}(\aleph^\omega)$. حال فرض کنید $\mathbb{Q}$ یک فورسینگ دلخواه با خاصیت $c.c.c$ در $V[G]$ و H یک پالایه $(V[G], \mathbb{Q})$ - ژنریک باشد. نشان می‌دهیم $V[G][H] \models \text{MP}(\mathbb{R})$. فرض کنید $r \in \mathbb{R} \cap V[G][H]$ و $V[G][H] \models \Diamond \Box \phi(r)$. چون $\mathbb{P} * \mathbb{Q}$ خاصیت $\kappa.c.c$ دارد، بنابراین لم ۱۲.۱.۳ وجود یک فورسینگ $\mathbb{S} \triangleleft \mathbb{P} * \mathbb{Q}$ با خاصیت $\kappa.c.c$ را تضمین می‌کند که در آن $\kappa < |\mathbb{S}|$ و $r \in V^\mathbb{S}$. حال فرض کنید K یک پالایه $(V, \mathbb{S})$ - ژنریک باشد، پس $V[K] \subseteq V[G * H]$. چون $V[K] \models \Diamond \Box \phi(r)$ لذا $V[G * H] \models \Diamond \Box \phi(r)$. از طرفی داریم $V_\kappa[K] \prec V[K]$ پس $V_\kappa[K] \models \Diamond \Box \phi(r)$. بنابراین فورسینگ $\mathbb{T} \in V_\kappa[K]$ و پالایه $(V_\kappa, \mathbb{T})$ - ژنریک L وجود دارند که $V_\kappa[K][L] \models \Box \phi(r)$. از طرفی با توجه به قضیه ۳۱.۲.۱ یک تابع تصویر متعارف

$$\pi : \text{Coll}(\omega, < \kappa) \longrightarrow \mathbb{S} * \mathbb{T}$$

وجود دارد که نتیجه می‌دهد

$$V[G * H] \models \phi(r).$$

(۱ $\Rightarrow$ ۲) فرض کنید $V \models \Box_{c.c.c} \text{MP}(\mathbb{R})$ و فرض کنید $\mathbb{P}$ یک $c.c.c$ فورسینگ باشد که $MA + \neg CH$ را فورس می‌کند. بنابراین $V^\mathbb{P} \models \text{MP}(\mathbb{R}) + \Box_{c.c.c} \text{MP}_{c.c.c}(\mathbb{R})$ از طرفی با توجه به قضیه ۷.۱.۳ داریم $L_\delta \prec L$ که در آن $\delta = \omega_1^{V^\mathbb{P}}$ به اعداد حقیقی دسترس‌ناپذیر است، چون MA برقرار می‌باشد قضیه شلاه - هرینگتون نتیجه می‌دهد که ω_1 در L به طور ضعیف فشرده می‌باشد. لذا حکم اثبات می‌شود. $\square$

فصل ۴

فرای S۵

در این فصل ابتدا قضایای منطق موجهات فورسینگ فروپاشی را می‌آوریم. سپس در این رابطه سوالی از لوه و همکینز را مطرح می‌کنیم. این فصل به یک قضیه اختصاص دارد که به معنای قابل قبول به این سوال پاسخ می‌دهد.

۱.۴ کلاس فورسینگ‌های فروپاشی

قضیه ۱.۱.۴. ۳. S۴. $Force(\pi(X), Coll) = S۴ \cdot ۳$.

برهان. از قضایای ۲.۲.۲ و ۴.۱.۲ میدانیم

$$S۴ \cdot ۳ \subseteq Force(\pi(X), Coll) \subseteq Force(\pi(X), L, Coll) \subseteq Force(L, Coll).$$

لذا با توجه به قضیه ۳.۳.۲ کافی است نشان دهیم روی L یک $Coll$ – کنترلگر بلند وجود دارد. به ازای اردینال α فرض کنید r_α جمله « $\aleph_\alpha^L$ شماراست» باشد. از آنجا که می‌توان هر r_α را توسط $Coll$ فشرده بدون آنکه $r_{\alpha+1}$ فشرده شود و فشردن r_α باعث فشردن r_β به ازای $\alpha > \beta$ می‌شود، بنابراین

$$\langle r_\alpha : \alpha < Ord \rangle$$

یک $Coll$ – کنترلگر بلند روی L می‌باشد که طبق قضیه ۳.۳.۲ نتیجه می‌دهد $Force(L, Coll) \subseteq S۴ \cdot ۳$.

□

S۴. ۳

نتایج زیر با توجه به قضایای فصل دوم واضح می‌باشند.

نتیجه ۲.۱.۴. اگر $\Gamma \supseteq Coll$ ، آنگاه

$$S4 \cdot 2 \subseteq Force(\pi(X), L, \Gamma) \subseteq S4 \cdot 3$$

نتیجه ۳.۱.۴. اگر $\Gamma \supseteq Coll$ خطی باشد آنگاه $S4 \cdot 3 = Force(\pi(X), \Gamma) = S4 \cdot 2$.

به طور مشابه داریم:

نتیجه ۴.۱.۴.

۱. اگر κ در زبان $\mathcal{L}_\in(X)$ مطلقاً تعریف‌پذیر باشد، آنگاه $S4 \cdot 3 = Force(\pi(X), Coll_\kappa)$.

۲. اگر κ مطلقاً تعریف‌پذیر باشد، آنگاه $S4 \cdot 3 = Force(Coll_\kappa)$.

سوال ۵.۱.۴. (لووه-همکینز) آیا مدل N از ZFC وجود دارد که به ازای هر کاردینال λ اگر

H یک پالایه $(N, Col(\omega, \lambda))$ - ژنریک باشد، آنگاه N و $N[H]$ هم‌ارز مقدماتی باشند؟

اگر چنین مدلی وجود داشته باشد، آنگاه در این مدل هیچ $Coll$ - سویچی وجود ندارد و تمام $Coll$ - دکمه‌ها فشرده می‌باشند و در واقع MP_{Coll} در این مدل برقرار می‌باشد. طبیعتاً $S5 \subseteq Force(V, Coll)$.

مایلم قبل از بیان قضیه اصلی این فصل به دو نکته اشاره کنیم. اول اینکه در سال ۲۰۰۸ ویلیام میشل پاسخی به نسخه ضعیف‌تر سوال بالا را روی اینترنت قرار داد. اما مدتی بعد اشتباه‌های قابل توجی در آن اثبات پیدا شد. قضیه زیر بر مبنای ایده‌های میشل اما با تکنیکی متفاوت برهانی برای قضیه‌ای که میشل در پی اثبات آن بود به دست می‌دهد. نکته دوم اینکه فرض وجود کاردینال‌های بزرگ در اثبات قضیه زیر اجتناب‌ناپذیر می‌باشد، در واقع مطمئناً باید کاردینالی با قدرت بیشتر از کاردینال اندازه‌پذیر داشته باشیم. برای بحث بیشتر در مورد نکته دوم رجوع شود به [۲۵].

قضیه ۶.۱.۴. (قضیه اصلی- گلشنی [۷]) فرض کنید κ یک کاردینال $\kappa + 2$ - قوی باشد. آنگاه یک مدل N از ZFC وجود دارد که به ازای هر کاردینال تالی λ از N و هر پالایه $(N, Col(\omega, \lambda))$ - ژنریک H ، مدل‌های N و $N[H]$ هم‌ارز مقدماتی می‌باشند.

۲.۴ برهان قضیه اصلی

تعریف ۱.۲.۴. مجموعه مرتب جزئی $(I, <)$ را جهت‌دار گوییم، اگر به ازای هر i و j در I ، یک $k \in I$ وجود داشته باشد که $i \leq k$ و $j \leq k$.

گزاره ۲.۲.۴. اگر D یک مجموعه جهت‌دار و $\{\mathfrak{A}_i : i \in D\}$ یک خانواده از مدل‌ها باشد، آنگاه مدل $\mathfrak{A}$ وجود دارد که $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}$ به ازای هر $i \in I$.

برهان. نگاه کنید به [۱۹]. □

تعریف ۳.۲.۴. یک دستگاه جهت‌دار از مدل‌ها عبارت است از یک خانواده از مدل‌ها $\mathfrak{A}_i$ ، $i \in I$ ، به همراه یک خانواده از نشاندهای مقدماتی $e_{i,j} : \mathfrak{A}_i \rightarrow \mathfrak{A}_j$ که به ازای $i < j < k$ در I داریم $e_{i,k} = e_{i,j} \circ e_{j,k}$.

گزاره ۴.۲.۴. فرض کنید $\langle \{\mathfrak{A}_i : i \in I\}, \{e_{i,j} : i, j \in I\} \rangle$ یک دستگاه جهت‌دار از مدل‌ها باشد، مدل $\mathfrak{A}$ و خانواده $\{e_i : \mathfrak{A}_i \rightarrow \mathfrak{A} : i \in I\}$ از نشاندهای مقدماتی وجود دارند که $\mathfrak{A} = \bigcup_{i \in I} e_i(\mathfrak{A}_i)$ و $e_i = e_j \circ e_{i,j}$ همچنین $\mathfrak{A}$ در حد یکریختی یکتا می‌باشد.

برهان. نگاه کنید به [۱۹]. □

فرض کنید $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ خانواده‌ای از مدل‌ها باشد و U یک فرایالایه روی I باشد. مجموعه $A = \prod_{i \in I} A_i$ را در نظر بگیرید که در آن A_i مجموعه‌ی زمینه $\mathfrak{A}_i$ می‌باشد. رابطه $=_U$ را روی A به صورت زیر تعریف کنید:

$$f =_U g \text{ اگر و تنها اگر } \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in U.$$

چون U یک فرایالایه است واضح است که $=_U$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی می‌باشد، حال فرض کنید A خارج قسمت این رابطه هم‌ارزی باشد، یعنی $A = \prod_{i \in I} A_i / =_U$. حال با تعبیر مناسب از عناصر زبان روی A یک مدل جدید می‌سازیم. اگر $P(x_1, \dots, x_n)$ یک نماد رابطه‌ای باشد

$$P^{\mathfrak{A}}([f_1], \dots, [f_n]) \text{ اگر و تنها اگر } \{i \in I : P^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U$$

اگر $F(x_1, \dots, x_n)$ یک نماد تابعی باشد، قرار دهید

$$F^{\mathfrak{A}}([f_1], \dots, [f_n]) = [f].$$

جایی که $f(i) = F^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \dots, f_n(i))$ ، به ازای هر $i \in I$. اگر c یک ثابت باشد، قرار دهید $c^{\mathfrak{A}} = [f]$ جایی که $f(i) = c^{\mathfrak{A}_i}$ به ازای هر $i \in I$.

به $\mathfrak{A}$ فراضرب مدل های $\mathfrak{A}_i$ توسط U گوئیم و با نماد $Ult(\langle \mathfrak{A}_i : i \in I \rangle, U)$ نمایش می دهیم.

قضیه ۵.۲.۴. (قضیه واش^۱) فرض کنید U یک فرایپالایه روی I باشد و $\mathfrak{A}$ فراضرب $\{A_i\}$ ،

$$f_1, \dots, f_n \in \prod_{i \in I} A_i \text{ هر ازای هر } i \in I \text{، توسط } U \text{ باشد. اگر } \phi \text{ یک فرمول باشد، آنگاه به ازای هر } i \in I$$

$$\mathfrak{A} \models \phi([f_1], \dots, [f_n]) \text{ اگر و تنها اگر } \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \phi[f_1(i), \dots, f_n(i)]\} \in U$$

□

برهان. نگاه کنید به [۱۹].

در حالتی که به ازای مجموعه I و فرایپالایه U روی آن، هر $\mathfrak{A}_i$ برابر با یک $\mathfrak{A}$ باشند، به آن یک فراتوان توسط U گوئیم و با نماد $Ult(\mathfrak{A}, U)$ نمایش می دهیم.

نتیجه ۶.۲.۴. هر فراتوان از یک مدل $\mathfrak{A}$ با $\mathfrak{A}$ هم ارز مقدماتی می باشد.

قضیه ۷.۲.۴. اگر $j : V \rightarrow M$ یک نشانندن مقدماتی با $\text{crit}(j) = \kappa$ و U یک فرایپالایه κ – کامل روی κ باشد. آنگاه

$$Ult(V, U) = \{j(f)(\kappa) : f : \kappa \rightarrow V\}.$$

□

برهان. نگاه کنید به [۲۰].

تعریف ۸.۲.۴. کاردینال κ را در V یک کاردینال $(\kappa + 2)$ – قوی گوئیم، اگر یک نشانندن مقدماتی $j : V \rightarrow M$ وجود داشته باشد که:

$$1. \quad M \supseteq M^\kappa \text{ یک مدل درونی ZFC باشد،}$$

$$2. \quad \text{crit}(j) = \kappa$$

^۱Łós's Theorem

$$۳. j(\kappa) > \kappa^{++},$$

$$۴. V_{\kappa+2} \subseteq M.$$

حال نشان می‌دهیم می‌توان در تعریف بالا M را با یک M_E جایگزین کرد که آن را می‌توان بهتر شناخت و لذا کارکردن با M_E آسانتر خواهد بود.

فرض کنید κ یک کاردینال $(\kappa + 2)$ قوی باشد و $j : V \rightarrow M$ یک نشاندهنده مقدماتی که شاهی برای $(\kappa + 2)$ - قوی بودن κ باشد. به ازای هر $a \in [\kappa]^{<\omega}$ تعریف کنید

$$E_a = \{X \subseteq [\kappa]^{|a|} : a \in j(X)\}$$

لم ۹.۲.۴. E_a یک فرایالایه κ - کامل روی $[\kappa]^{|a|}$ می‌باشد.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم E_a یک پالایه می‌باشد. داریم:

$$j([\kappa]^{|a|}) = j(\{x \in \kappa : |x| = |a| < \omega\}) = \{x \in j(\kappa) : |x| = |a|\}$$

لذا $[\kappa]^{|a|} \in E_a$. همچنین به ازای $X \subseteq Y$ و $X \subseteq [\kappa]^{|a|}$ داریم $j(X) \subseteq j(Y)$. از طرفی به ازای X و Y دلخواه داریم $j(X \cap Y) = j(X) \cap j(Y)$ که نشان می‌دهد که E_a تحت اشتراک متناهی بسته می‌باشد. بنابراین E_a یک پالایه می‌باشد. چون به ازای هر دو مجموعه X و Y داریم $j(X \cup Y) = j(X) \cup j(Y)$ ، بنابراین $a \in j(X \cup Y)$ نتیجه می‌دهد که $a \in j(X)$ یا $a \in j(Y)$ ، پس E_a یک فرایالایه می‌باشد. فرض کنید $\{X_\alpha : \alpha < \lambda < \kappa\}$ یک خانواده از اعضای E_a باشد، داریم

$$j\left(\bigcap_{\alpha < \lambda} X_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha < j(\lambda)} j(X_\alpha) = \bigcap_{\alpha < \lambda} j(X_\alpha).$$

□

بنابراین E_a یک فرایالایه κ - کامل می‌باشد.

فرض کنید M_a فروپاشی موسستفسکی $Ult(V, E_a)$ باشد و j_a نشاندهنده مقدماتی متعارف باشد:

$$j_a : V \rightarrow Ult(V, E_a)$$

$$j_a(v) = [c_v]$$

که در آن c_v تابع ثابت با مقدار v می باشد. بدون کاسته شدن از کلیت با یکی کردن $Ult(V, E_a)$ و M_a می توان فرض کرد $j_a : V \longrightarrow M_a \cong Ult(V, E_a)$.
به ازای $a, b \in [\kappa]^{<\omega}$ که $a \subseteq b$ تعریف کنید

$$i_{ab} : M_a \longrightarrow M_b$$

که $i_{ab}([f]_{E_b}) = [f \circ F_{ab}]_{E_b}$ جایی که F_{ab} به صورت زیر تعریف می شود.
فرض کنید $b = \{b_1, \dots, b_n\}_<$ با ترتیب معمولی باشد. حال a را به صورت $\{b_{i_1}, \dots, b_{i_m}\}_<$ با همان ترتیب می نویسیم. F_{ab} تابعی می باشد که هر عضو مجموعه $[\kappa]^{|b|}$ را به عضوی در $[\kappa]^{|a|}$ می برد که اعضایش دارای یکی از اندیس های $i_1, \dots, i_m$ می باشد.
قرار دهید

$$E = \langle \{M_a\}_{a \in [\kappa]^{<\omega}}, \{i_{ab}\}_{a \subseteq b} \rangle.$$

به E گسترش دهنده بدست آمده از j گوئیم.
با استفاده از گسترش دهنده E مدل M_E را می سازیم که حد مستقیم E می باشد.

$$\mathcal{M}_E = \langle M_E, \{i_{aE}\}_{a \in [\kappa]^{<\omega}} \rangle = \varinjlim E.$$

به ازای نشان دادن مقدماتی $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ و $j : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ و مجموعه $X \in \mathcal{M}$ قرار دهید

$$j''X = \{j(a) : a \in X\}.$$

لم ۱۰.۲.۴. قرار دهید $j_E = i_{aE} \circ j_a$.

۱. j_E خوش تعریف می باشد.

۲. $\text{crit}(j_E) = \kappa$.

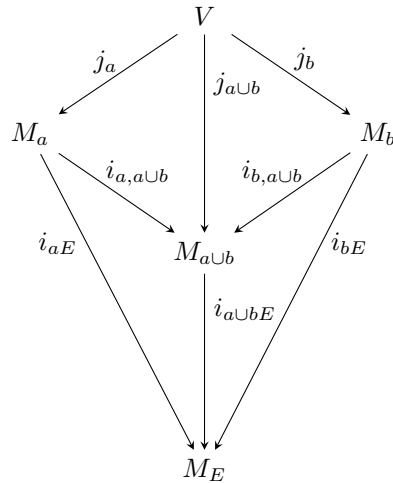
۳. $j(\kappa) > \kappa^{++}$.

۴. $M_E \supseteq V_{\kappa+\aleph_2}$.

۵. $M_E \supseteq M_E^\kappa$.

برهان.

۱. با توجه به خواص گسترش دهنده E ، واضح است که دیاگرام زیر جابجایی می باشد.



بنابراین تعریف j_E به a وابسته نمی باشد که نشان می دهد j خوش تعریف است.

۲. داریم

$$j_E(\kappa) = i_{aE}(j_a(\kappa)) > i_{aE}(\kappa) \geq \kappa.$$

چرا که $j_a(\kappa) > \kappa$ و $i_{aE}(\kappa) \geq \kappa$ از طرفی، اگر $\lambda < \kappa$ باشد، آنگاه

$$j_E(\lambda) = i_{\emptyset E}(j_{\emptyset}(\lambda)) = i_{\emptyset E}(j(\lambda)) = i_{\emptyset E}(\lambda) = \lambda.$$

۳. باتوجه به تعاریف نشاندن های مقدماتی واضح است.

۴. رجوع شود به [۲۰].

۵. رجوع شود به [۲۰].

□

گزاره ۱۱.۲.۴. (لم گسترش سیلور^۲) فرض کنید $j : M \rightarrow N$ یک نشانندن مقدماتی باشد که در آن M و N دو مدل درونی از ZFC می باشند. فرض کنید $\mathbb{P} \in M$ یک فورسینگ باشد. اگر G یک پالایه $(M, \mathbb{P})$ - ژنریک و H یک پالایه $(N, j(\mathbb{P}))$ - ژنریک باشند، آنگاه j را میتوان به یک نشانندن مقدماتی $j^* : M[G] \rightarrow N[H]$ گسترش داد، اگر و تنها اگر، $j''G \subseteq H$.

برهان. نگاه کنید به [۱۹]. □

تعریف ۱۲.۲.۴. فرض کنید V^* مدلی از $ZFC + GCH$ و κ یک کاردینال $\kappa + 2$ - قوی باشد که $j : V^* \rightarrow M^*$ شاهدی برای آن است. تعریف کنید $u_j(\circ) = \kappa$ و به ازای اردینال $\tau < \circ$ قرار دهید:

$$u_j(\tau) = \{X \subseteq V_\kappa^* : u_j \restriction_\tau \in j(X)\}$$

همچنین طول u_j را به صورت زیر تعریف کنید،

$$lh(u_j) = \min\{\alpha : u_j \restriction_\alpha \notin M^*\}.$$

قضیه ۱۳.۲.۴. $lh(u_j) \geq \kappa^+$.

برهان. نگاه کنید به [۵]. □

قضیه ۱۴.۲.۴. به ازای $\tau > \circ$ ، $u_j(\tau)$ یک فراپالایه κ - کامل روی V_κ^* می باشد.

برهان. چون

$$V_{\kappa+2} = V_{\kappa+2}^{M^*} \subseteq j(V_\kappa^*) = V_{j(\kappa)}^{M^*}$$

لذا $j(V_\kappa^*)$ تحت دنباله های با طول کمتر از یا مساوی با κ^+ بسته می باشد. بنابراین با استقرا به سادگی دیده میشود که $V_\kappa^* \in u_j(\tau)$. همچنین واضح است که $u_j(\tau)$ تحت اشتراک متناهی بسته می باشد. همچنین واضح می باشد که اگر $X \in u_j(\tau)$ و $X \subseteq Y$ آنگاه $Y \in u_j(\tau)$. از طرفی به ازای مجموعه $X \subseteq V_\kappa^*$ اگر $X \notin j(X)$ آنگاه به وضوح $u_j \restriction_\tau \in j(V_\kappa^* \setminus X)$.

^۲Jack Silver

لذا $u_j(\tau)$ یک فرایالایه می باشد. حال فرض کنید $\{X_\alpha : \alpha < \lambda < \kappa\}$ یک خانواده از اعضای $u_j(\tau)$ باشد. داریم

$$j\left(\bigcap_{\alpha < \lambda < \kappa} X_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha < j(\lambda)} j(X_\alpha) = \bigcap_{\alpha < \lambda} j(X_\alpha).$$

لذا اگر $u_j \restriction_{\tau} j(X_\alpha)$ به ازای هر $\alpha < \lambda$ ، آنگاه $j\left(\bigcap_{\alpha < \lambda < \kappa} X_\alpha\right)$ که نشان می دهد $\bigcap_{\alpha < \lambda} X_\alpha \in u_j(\tau)$ و لذا $u_j(\tau)$ یک فرایالایه κ - کامل می باشد. $\square$

در زیر مفهوم دنباله اندازه را معرفی می کنیم.

تعریف ۱۵.۲.۴. (دنباله اندازه)

۱. گوییم w یک دنباله اندازه می باشد، اگر قطعه آغازینی از یک u_j باشد، به بیان دقیق تر اگر

$$j : V^* \longrightarrow M^* \text{ و } \tau < lh(u_j) \text{ وجود داشته باشد که } w = u_j \restriction_{\tau}.$$

۲. به ازای دنباله اندازه w ، قرار دهید $\kappa(w) = u_j(\circ)$ که u_j دنباله اندازه ای می باشد که w قطعه آغازینی از آن است.

۳. دنباله $\langle w_1, \dots, w_n \rangle$ از دنباله های اندازه را صعودی گوییم، اگر $\kappa(w_1) < \dots < \kappa(w_n)$.

۴. دنباله اندازه w برای دنباله صعودی $\langle w_1, \dots, w_n \rangle$ از دنباله های اندازه مجاز است، اگر $\kappa(w_n) < \kappa(w)$.

۵. به ازای دنباله اندازه w می نویسیم $X \in w$ ، اگر و تنها اگر، به ازای هر اردینال ناصفر ζ داشته باشیم $lh(w) > \zeta$ و $X \in w(\zeta)$.

فرض کنید V^* مدلی از $ZFC + GCH$ و κ یک کاردینال $\kappa + 2$ - قوی در V^* باشد، که j شاهی برای آن است، قرار دهید $u = u_j \restriction_{\kappa^+}$ و دیاگرام زیر را در نظر بگیرید که در آن:

$$\tau \leq \tau' < \kappa^+ \quad \bullet$$

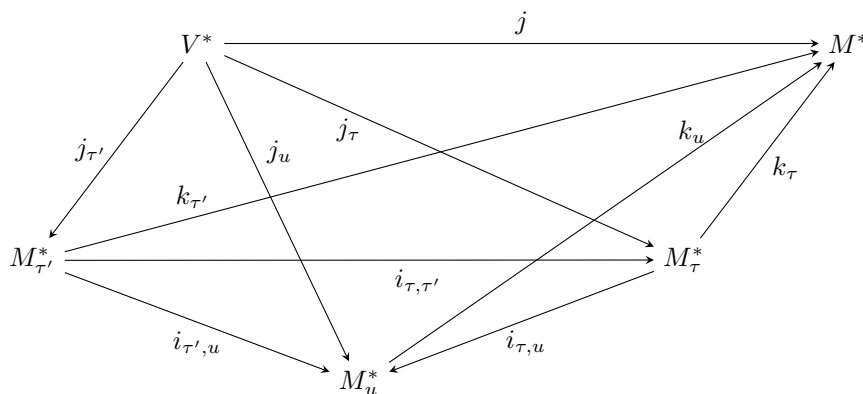
$$M_\tau^* \simeq Ult(V^*, u(\tau)) \quad \bullet$$

• $j_\tau : V^* \longrightarrow M_\tau^*$ نشانیدن مقدماتی متعارف می باشد.

$$k_\tau(j_\tau(f)(u \upharpoonright \tau)) = j_\tau(f)(u \upharpoonright \tau) \quad \bullet$$

$$i_{\tau,\tau'}(j_{\tau'}(f)(u \upharpoonright \tau')) = j_\tau(f)(u \upharpoonright \tau') \quad \bullet$$

$$\langle M_u^*, i_{\tau,u} \rangle = \varinjlim \langle \langle M_\tau^* : \tau < \kappa^+ \rangle, \langle i_{\tau,\tau'} : \tau' \leq \tau < \kappa^+ \rangle \rangle \quad \bullet$$



لم ۱۶.۲.۴.

$$crit(j_u) = crit(j_\tau) = crit(j_{\tau'}) = crit(j) = \kappa \quad . ۱$$

$$crit(i_{\tau',\tau}) = crit(k_{\tau'}) = crit(i_{\tau',u}) = (\kappa^{++})^{M_{\tau'}^*} \quad . ۲$$

$$crit(k_\tau) = crit(i_{\tau,u}) = (\kappa^{++})^{M_\tau^*} \quad . ۳$$

$$crit(k_u) = (\kappa^{++})^{M_u^*} \quad . ۴$$

برهان. برای برهان قسمت ۱ رجوع شود به [۱۹]. اثبات را تنها برای k_τ می آوریم، بقیه موارد به طور مشابه اثبات می شوند.

ابتدا نشان می دهیم $k_\tau(\kappa) = \kappa$. فرض کنید $f^* : \kappa \longrightarrow \kappa$ نمایشی برای κ^{++} در M^* باشد. از جابجایی دیاگرام داریم

$$k_\tau(j_\tau(f^*)) = j(f^*).$$

بنابراین $j_\tau(f^*) : j_\tau(\kappa) \longrightarrow j_\tau(\kappa)$ و $j_\tau(f^*) \restriction \kappa = f^*$ چرا که $\text{crit}(j_\tau) = \kappa$. داریم

$$M_\tau^* \models \forall \alpha < \kappa \ j_\tau(f^*)(\alpha) < \kappa.$$

با استفاده از مقدماتی بودن k_τ داریم

$$M^* \models \forall \alpha < k_\tau(\kappa) \ j(f^*)(\alpha) < k_\tau(\kappa).$$

از طرفی $k_\tau(\kappa) \leq k_\tau([id]_{u_\tau}) = \tau < \kappa^{++}$ بنابراین

$$M^* \models \forall \alpha < k_\tau(\kappa) \ j(f^*)(\alpha) < k^{++}.$$

از طرف دیگر $k_\tau(\kappa) \geq \kappa$ و $j(f^*)(\kappa) = \kappa^{++}$ بنابراین $k_\tau(\kappa) = \kappa$. همچنین $k_\tau((\kappa^+)^{M_\tau^*}) = \kappa^+$ و $k_\tau((\kappa^{++})^{M_\tau^*}) = \kappa^{++}$.

کافی است نشان دهیم $(\kappa^{++})^{M_\tau^*} < \kappa^{++}$. فرض کنید $\alpha < (\kappa^{++})^{M_\tau^*} < j_\tau(\kappa)$ بنابراین $f : V_\kappa^* \longrightarrow \kappa$ وجود دارد که $\alpha = j_\tau(f)(u \restriction \tau)$ ، لذا $j_\tau(f) : j(V_\kappa^*) \longrightarrow j(\kappa)$ از طرفی تنها به تعداد $\aleph^\kappa = \kappa^+$ تابع چون f وجود دارد، بنابراین $(\kappa^{++})^{M_\tau^*} \leq \sup_f \{j_\tau(f)(u \restriction \tau)\} < \kappa^{++}$ که حکم را اثبات می‌کند. $\square$

حال دیاگرام زیر را در نظر بگیرید که در آن:

$$\bullet \quad U = u_j(1) = u(1)$$

$$\bullet \quad i_U : V^* \longrightarrow N^* \simeq \text{Ult}(V^*, U)$$

$$\bullet \quad i_{U,\tau}(i_U(f)(\kappa)) = j_\tau(f)(\kappa)$$

$$\bullet \quad i_{U,u}(i_U(f)(\kappa)) = j_u(f)(\kappa)$$

$$\begin{array}{ccc}
 V^* & \xrightarrow{j_u} & M_u^* \\
 \downarrow i_U & \nearrow j_\tau & \uparrow i_{\tau,u} \\
 & i_{U,u} & \\
 N^* & \xrightarrow{i_{U,\tau}} & M_\tau^*
 \end{array}$$

همانند لم ۱۶.۲.۴ باتوجه به دیاگرام بالا داریم:

$$\kappa^+ < \text{crit}(i_{U,\tau}) = \text{crit}(i_{U,u}) = (\kappa^{++})^{N^*} < i_U(\kappa) < \kappa^{++}$$

تعریف ۱۷.۲.۴. قرار دهید:

$$\mathbb{R}_U = \text{Col}(\kappa^+, i_U(\kappa))^{N^*} . ۱$$

$$\mathbb{R}_\tau = \text{Col}(\kappa^+, j_\tau(\kappa))^{M_\tau^*} . ۲$$

$$\mathbb{R}_u = \text{Col}(\kappa^+, j_u(\kappa))^{M_u^*} . ۳$$

قرار دهید $\mathbb{P} = \text{Col}(\kappa^+, \kappa^{+3})$ و $V = V^*[G]$ که در آن G یک پالایه $(V^*, \mathbb{P})$ - ژنریک می باشد.

لم ۱۸.۲.۴. اگر $\mathbb{P}_U = i_U(\mathbb{P})$ ، $\mathbb{P}_\tau = j_\tau(\mathbb{P})$ و $\mathbb{P}_u = j_u(\mathbb{P})$ ، آنگاه:

$$۱. G_U = j''_\tau G \text{ یک پالایه } (N^*, \mathbb{P}_U) \text{ - ژنریک می باشد.}$$

$$۲. G_\tau = j''_\tau G \text{ یک پالایه } (M_\tau^*, \mathbb{P}_\tau) \text{ - ژنریک می باشد.}$$

$$۳. G_u = \bigcup_{\tau < \kappa^+} i''_{\tau,u} G \text{ یک پالایه } (M_u^*, \mathbb{P}_u) \text{ - ژنریک می باشد.}$$

برهان.

۱. فرض کنید $D \in N^*$ در $\mathbb{P}_U$ یک مجموعه باز و چگال باشد، پس $f \in V^*$ وجود دارد که

$$D = i_U(f)(\kappa) \text{ نشان می دهیم:}$$

$$D^* = \{\alpha < \kappa : f(\alpha) \text{ در } \mathbb{P} \text{ باز و چگال می باشد}\} \in U$$

کافی است نشان دهیم $\kappa \in i_U(D^*)$ داریم:

$$i_U(D^*) = \{\alpha < j(\kappa) : i_U(f)(\alpha) \subseteq i_U(\mathbb{P})\} .$$

چون $D \subseteq i_U(f)(\kappa) \subseteq i_U(\mathbb{P})$ باز و چگال می باشد، بنابراین $\kappa \in i_U(D^*)$ و لذا $D^* \in U$.

حال فرض کنید $p \in \bigcap_{\alpha \in D^*} f(\alpha)$ بنابراین

$$i_U(p) \in \bigcap_{\alpha \in i_U(D^*)} i_U(f)(\alpha).$$

از طرفی $\kappa \in i_U(D^*)$ ، لذا $i(p) \in i_U(f)(\kappa) = D$

۲. فرض کنید $D \in M_\tau^*$ یک زیرمجموعه باز و چگال از $\mathbb{P}_U$ باشد. لذا تابع $f: \kappa \rightarrow V^*$ در V^* وجود دارد که $D = j_\tau(f)(u \restriction_\tau)$. به طور مشابه داریم:

$$D^* = \{\bar{v} \in V_\kappa^* : f(\bar{v}) \text{ در } \mathbb{P} \text{ باز و چگال می باشد}\} \in U.$$

چون $\mathbb{P}$ خاصیت κ^+ - بسته دارد پس $\bigcap_{\bar{v} \in D^*} f(\bar{v})$ در $\mathbb{P}$ باز و چگال می باشد. فرض کنید $p \in G \cap \bigcap_{\bar{v} \in D^*} f(\bar{v})$ لذا $j_\tau(p) \in G_\tau \cap D$ که حکم را اثبات می کند.

۳. فرض کنید $D \in M_u^*$ یک زیرمجموعه باز و چگال از $\mathbb{P}_u$ باشد. بنابراین $\tau < \kappa^+$ و $D_\tau \in M_\tau^*$ وجود دارند که $D = i_{\tau,u}(D_\tau)$. حال با توجه به اینکه $i_{\tau,u}$ یک نشانندن مقدماتی است، D_τ نیز در M_τ^* یک مجموعه باز و چگال از $\mathbb{P}_\tau$ می باشد. بنابراین $G_\tau \cap D_\tau \neq \emptyset$. فرض کنید $p \in G_\tau \cap D_\tau$ حال داریم $i_{\tau,u}(p) \in G_u \cap D$ که حکم را نتیجه می دهد.

□

لم ۱۹.۲.۴. پالایه های ژنریک ذکر شده در لم قبل دارای خواص زیر می باشند:

$$1. i''_{U,\tau'} G_U \subseteq G_\tau.$$

$$2. i''_{\tau',\tau} G'_\tau \subseteq G_\tau.$$

$$3. i''_{\tau,u} G_\tau \subseteq G_u.$$

□

برهان. با توجه به دیاگرام واضح می باشد.

با استفاده از لم قبل و قضیه گسترش سیلور دیاگرام جابجایی زیر را به دست می آوریم.

$$\begin{array}{ccccc}
 V = V^*[G] & \xrightarrow{j_u} & M_u = M_u^*[G_u] & & \\
 \swarrow i_U & \downarrow j_{\tau'} & \nearrow i_{\tau',u} & \searrow j_{\tau} & \\
 N = N^*[G_U] & \xrightarrow{i_{U,\tau'}} & M_{\tau'} = M_{\tau'}^*[G_{\tau'}] & \xrightarrow{i_{\tau',\tau}} & M_{\tau} = M_{\tau}^*[G_{\tau}] \\
 & & & & \uparrow i_{\tau,u} \\
 & & & & M_u = M_u^*[G_u]
 \end{array}$$

لم ۲۰.۲.۴. پالایه‌های I_U ، I_{τ} و I_u در V وجود دارند که:

۱. I_U یک $(N^*[G_U], \mathbb{R}_U)$ - ژنریک می‌باشد.

۲. I_{τ} یک $(M_{\tau}^*[G_{\tau}], \mathbb{R}_{\tau})$ - ژنریک می‌باشد.

۳. I_u یک $(M_u^*[G_u], \mathbb{R}_u)$ - ژنریک می‌باشد.

۴. همچنین ژنریک بودن موارد بالا به‌گونه‌ای می‌باشد که دیاگرام جابجایی زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & M_u[I_u] \\
 & & \nearrow i_{\tau',u}^* & & \uparrow i_{\tau,u}^* \\
 N[I_U] & \xrightarrow{i_{U,\tau'}^*} & M_{\tau'}[I_{\tau'}] & \xrightarrow{i_{\tau',\tau}^*} & M_{\tau}[I_{\tau}]
 \end{array}$$

برهان. تنها برهان قسمت اول را می‌آوریم. بقیه موارد به طور مشابه اثبات می‌شود. ابتدا نشان می‌دهیم یک پالایه $(M_u^*, \mathbb{R}_u)$ - ژنریک وجود دارد. فورسینگ $\mathbb{P} \times \mathbb{R}_u$ را در نظر بگیرید. چون این فورسینگ κ^+ - بسته می‌باشد و κ^+ را روی κ^+ فرو می‌پاشد، بنابراین طبق قضیه ۳۱.۲.۱ داریم $\mathbb{P} \times \mathbb{R}_u \approx \mathbb{P}$. چون G یک پالایه $(V^*, \mathbb{P})$ - ژنریک می‌باشد. لذا $I_u \in V^*[G]$ وجود دارد که I_u یک پالایه $(V^*, \mathbb{R}_u)$ - ژنریک می‌باشد. همچنین I_u یک پالایه $(M^*, \mathbb{R}_u)$ - ژنریک نیز می‌باشد. حال قرار دهید

$$i_{U,u} = i_{\tau,u} \circ i_{\tau',\tau} \circ i_{U,\tau'}$$

و

$$I_U = \langle i_{U,u}^{-1}[I_u] \rangle.$$

که منظور از دومین عبارت پالایه تولید شده توسط نگاره وارون I_u می باشد. فرض کنید A یک پادزنجیر بیشینه از $\mathbb{R}_U$ در $N^*[G_U]$ باشد. بنابراین $i_{U,u}(A)$ یک پادزنجیر بیشینه از $\mathbb{R}_u$ در M_u^* می باشد. اما داریم $i_{U,u}(A) = i_{U,u}''A$ ، چرا که لم ایستون تضمین می کند $I_U \cap A \neq \emptyset$ و $A \in N^*$ و $|A| \leq |i_U(\kappa)| \leq \kappa^+$ که نتیجه می دهد $I_U \cap A \neq \emptyset$.
 $\square$

به ازای m و n طبیعی قرار دهید

$$j_u^\circ = id$$

$$j_u^n = j_u^{\circ, n}$$

$$j_u^{m,n} = j_u^{n-1,n} \circ \dots \circ j_u^{m+1,m+2} \circ j_u^{m,m+1}$$

همچنین فرض کنید R تابعی باشد که $i_U^*(R)(\kappa, i_U(\kappa)) = \mathbb{R}_U$ و دیاگرام جابجایی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{array}{ccccc}
 V & \xrightarrow{j_u = j_u^{0,1}} & M_u & \xrightarrow{j_u^{1,2}} & M_u^2 \\
 \downarrow i_U & \searrow j_{\tau_1} & \nearrow i_{U,u} & \searrow j_{\tau_2}^2 & \nearrow i_{U,u}^2 \\
 N & \xrightarrow{i_{U,\tau_1}} & M_{\tau_1} & \xrightarrow{i_U^2} & N^2 \\
 & & \nearrow i_{\tau_1,u} & \searrow i_U^2 & \nearrow i_{U,\tau_2}^2 \\
 & & & & M_{\tau_2}^2 \\
 & & & & \uparrow i_{\tau_2,u}^2
 \end{array}$$

تعریف ۲.۴.۲۱. (تعریف جدیدی برای دنباله اندازه) دنباله اندازه $\langle w_\alpha : \alpha < \kappa^+ \rangle$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$.w(\circ) = u(\circ) \bullet$$

$$.I(\tau) = I_\tau \bullet$$

• برای $w(\tau)$ ، $0 < \tau < \kappa^+$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$X \in w(\tau) \iff \langle \kappa, w(0), I(0), \dots, w(\tau'), I(\tau'), \dots : \tau' < \tau \rangle \in j_u(X).$$

همچنین فرض کنید $I(w)$ پالایه تولید شده توسط $\bigcup_{\tau < \kappa^+} i''_{\tau, w} I(\tau)$ باشد.

در ادامه منظور از w همواره، دنباله اندازه ساخته شده در تعریف بالا می‌باشد.

در زیر تعمیمی از فورسینگ ریدین^۳ $\mathbb{R}_w$ را معرفی می‌کنیم که در واقع پالایه‌های ژنریکی که تاکنون تعریف کردیم نقش به سزایی را در تعریف آن ایفا می‌کنند.
تعریف فورسینگ

تعریف ۲۲.۲.۴. $\mathbb{R}_w$ متشکل از عناصر به شکل زیر می‌باشد.

$$p = \langle \langle w_0, s^0, S^0, f^0, F^0 \rangle, \dots, \langle w_n, s^n, S^n, f^n, F^n \rangle \rangle$$

جایی که

۱. $w_0, \dots, w_n$ دنباله‌های اندازه می‌باشند.

۲. $w_n = w$.

۳. $\kappa(w_i) < \kappa(w_{i+1})$ به ازای هر $i \leq n-1$.

۴. $S^i \in w_i$ به ازای هر $i \leq n$.

۵. ه ازای هر $i \leq n$ ، $s^i \in V_{\kappa(w_i)}$ یک دنباله اندازه می‌باشد به طوری که $\kappa(s^i)$ دسترس‌ناپذیر می‌باشد.

۶. به ازای هر $i \leq n$ ، f^i یک تابع می‌باشد به طوری که:

$$\bullet \text{ } \text{dom}(f^i) = \{u \in S^i : lh(u) = 0\}$$

$$\bullet \text{ } f^i(u_1) \in R(\kappa(s^i), u_1)$$

^۳Radin Forcing

۷. به ازای هر $i \leq n$ ، F^i یک تابع است به طوری که:

- $\text{dom}(F^i) = \{\langle u_1, u_2 \rangle \in S^i \times S^i : lh(u_1) = lh(u_2) = \circ\}$
- $F^i(\langle u_1, u_2 \rangle) \in R(u_1, u_2)$
- $j_w^\circ(F^i)(\kappa(w_i), j_w(\kappa(w_i))) \in I(w)$

تعریف ۲.۴.۲۳. فرض کنید

$$p = \langle \langle w_\circ, s^\circ, S^\circ, f^\circ, F^\circ \rangle, \dots, \langle w_n, s^n, S^n, f^n, F^n \rangle \rangle \in \mathbb{R}_w$$

و $u \in S^i$ که در آن $\kappa(u) \geq \bigcup j_w(f^i)(\kappa(w_i))$ شرط $p_{\langle u \rangle}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

• اگر $lh(u) > \circ$ ، قرار دهید:

$$\begin{aligned} p_{\langle u \rangle} = & \langle \langle w_\circ, s^\circ, S^\circ, f^\circ, F^\circ \rangle, \dots, \\ & \langle w_{i-1}, s^{i-1}, S^{i-1}, f^{i-1}, F^{i-1} \rangle, \\ & \langle u, s^i, S^i \upharpoonright u, f^i \upharpoonright u, F^i \upharpoonright u \rangle, \\ & \langle w_i, u, S^i \setminus u, F^i(\kappa(u, -)), F^i \rangle, \\ & \langle w_{i+1}, s^{i+1}, S^{i+1}, f^{i+1}, F^{i+1} \rangle, \dots, \\ & \langle w_n, s^n, S^n, f^n, F^n \rangle \rangle \end{aligned}$$

• اگر $lh(u) = \circ$ ، قرار دهید:

$$\begin{aligned} p_{\langle u \rangle} = & \langle w_{i-1}, s^{i-1}, S^{i-1}, f^{i-1}, F^{i-1} \rangle, \\ & \langle u, s^i, \emptyset, f^i(\kappa(u)), \emptyset \rangle, \\ & \langle w_i, u, S^i \setminus u, F^i(\kappa(u, -)), F^i \rangle, \\ & \langle w_{i+1}, s^{i+1}, S^{i+1}, f^{i+1}, F^{i+1} \rangle, \dots, \\ & \langle w_n, s^n, S^n, f^n, F^n \rangle \rangle \end{aligned}$$

تعریف ۲۴.۲.۴. به ازای

$$p = \langle \langle w_0, s^0, S^0, f^0, F^0 \rangle, \dots, \langle w_n, s^n, S^n, f^n, F^n \rangle \rangle$$

و

$$q = \langle \langle w_0, t^0, T^0, g^0, G^0 \rangle, \dots, \langle w_n, t^n, T^n, g^n, G^n \rangle \rangle$$

در $\mathbb{R}_w$ گوییم:

۱. p یک توسیع پریکری^۴ از q می باشد، اگر به ازای هر $i \leq n$ داشته باشیم:

$$s^i = t^i \bullet$$

$$S^i \subseteq T^i \bullet$$

$$f^i \leq g^i \bullet$$

$$F^i \leq G^i \bullet$$

این نوع توسیع را با $\leq^*$ نشان می دهیم.

۲. p یک توسیع یک-نقطه ای از q است، اگر $i \leq n$ و $\langle u \rangle \in S^i$ وجود داشته باشند که $p \leq^* q_{\langle u \rangle}$. این نوع توسیع را با $\leq^1$ نشان می دهیم.

۳. به ازای عدد طبیعی n ، p یک توسیع n - نقطه ای از q است، اگر $p^0, \dots, p^n$ در $\mathbb{R}_w$ وجود داشته باشند که

$$p = p^n \leq^1 \dots \leq^1 p^0 = q.$$

۴. p گسترشی از q است ($p \leq q$)، اگر به ازای یک n ، p گسترش n - نقطه ای از q باشد.

فرض کنید G یک پالایه $\mathbb{R}_w$ - ژنریک باشد. قرار دهید

$$C = \{ \kappa(s) : p \text{ در } s, p \in G \}$$

تعریف ۲۵.۲.۴. فرض کنید $\mathbb{P}$ یک فورسینگ باشد و κ یک کاردینال.

^۴Prikry Extension

۱. به ازای $p \in \mathbb{P}$ گوییم زیرمجموعه D از $\mathbb{P}$ زیر p پیش-چگال است، اگر به ازای هر $q \leq p$ ، یک $d \in D$ وجود داشته باشد که $q \parallel d$.

۲. گوییم $\mathbb{P}$ دارای خاصیت κ - سره^۵ می باشد، اگر به ازای هر θ به اندازه کافی بزرگ، هر $\mathcal{M} \prec H(\theta)$ شامل $\mathbb{P}$ که $\mathcal{M}$ تحت دنباله های با طول کمتر از κ بسته است و $|\mathcal{M}| = \kappa$. گزاره زیر درست باشد.

به ازای هر $p \in \mathbb{P} \cap \mathcal{M}$ وجود دارد $q \leq p$ به طوری که اگر D زیر q چگال باشد، آنگاه $D \cap \mathcal{M}$ زیر q پیش-چگال است.

گزاره ۲.۴.۲۶. اگر فورسینگ $\mathbb{P}$ دارای خاصیت κ - سره باشد، آنگاه $\mathbb{P}$ حافظ κ^+ می باشد.

برهان. فرض کنید $f: \kappa \rightarrow \kappa^+$ یک تابع یک به یک و پوشا در $V[G]$ باشد. θ را به اندازه کافی بزرگ اختیار می کنیم که $\dot{f} \in H(\theta)$ حال $\mathcal{M} \prec H(\theta)$ را چنان انتخاب می کنیم که داشته باشیم $\mathcal{M}[G] \prec H(\theta)[G]$ ، بنابراین $f = \dot{f}[G] \in \mathcal{M}[G]$ که نتیجه می دهد $\kappa^+ = f''\kappa \subseteq \mathcal{M}[G]$ پس $|\mathcal{M}[G]| \geq \kappa^+$ ولی این در تناقض با این مطلب است که $|\mathcal{M}| = \kappa$. $\square$

قضیه ۲.۴.۲۷.

۱. $\mathbb{R}_w$ خاصیت $\kappa.c.c$ دارد.

۲. $\mathbb{R}_w$ ، κ - سره می باشد. بنابراین κ^+ را حفظ می کند.

۳. κ در $V[G]$ دسترس ناپذیر باقی می ماند.

۴. $(\mathbb{R}_w, \leq^*, \leq)$ خاصیت پریکری^۶ دارد. به این معنی که اگر σ یک جمله در زبان فورسینگ $\mathbb{R}_w$ باشد، آنگاه به ازای هر $p \in \mathbb{R}_w$ یک $q \leq^* p$ وجود دارد که $q \parallel \sigma$.

۵. C یک مجموعه ی بسته و بیکران در κ می باشد.

برهان. مورد ۱ را اثبات می کنیم. برای اثبات بقیه موارد رجوع شود به [۲۳] و [۲۴].

فرض کنید A یک پادزنجیر از اندازه κ^{++} باشد. هر $p \in A$ را به صورت $p = p_a \langle w, s, S, f, F \rangle$

^۵ κ -proper

^۶ Prikry Property

نمایش می‌دهیم. به ازای هر دو عضو $p = p_d \langle w, s, S, f, F \rangle$ و $p' = p_{d'} \langle w', s', S', f', F' \rangle$ در A میتوان بدون کاسته شدن از کلیت فرض کرد $p_d = p_{d'}$ و $s = s'$. چرا که تنها به تعداد $|V_\kappa^*| = \kappa$ عضو چون s و p_d وجود دارد. همچنین با توجه به تعریف می‌توان فرض کرد $w = w'$. همچنین تنها $2^\kappa = \kappa^+$ عضو چون f وجود دارد لذا می‌توان فرض کرد $f = f'$. حال به ازای هر دو عضو $p = p_d \langle w, s, S, f, F \rangle$ و $p' = p_d \langle w, s, S', f, F' \rangle$ قرار دهید $q = p_d \langle w, s, S \cap S', f, G \rangle$ که در آن G گسترش مشترک F و F' می‌باشد، چرا که آنها در پالایه قرار دارند. به وضوح q گسترش مشترک p و p' می‌باشد که تناقض می‌باشد. $\square$

به ازای فورسینگ $(\mathbb{P}, \leq)$ و $p \in \mathbb{P}$ تعریف کنید $\mathbb{P}/p = \{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}$.

قضیه ۲۸.۲.۴. (لم تجزیه) فرض کنید

$$p = \langle \langle w_0, s^0, S^0, f^0, F^0 \rangle, \dots, \langle w_n, s^n, S^n, f^n, F^n \rangle \rangle \in \mathbb{R}_w$$

و $m < n$. قرار دهید

$$p^{\leq m} = \langle \langle w_0, s^0, S^0, f^0, F^0 \rangle, \dots, \langle w_m, s^m, S^m, f^m, F^m \rangle \rangle$$

و

$$p^{>m} = \langle \langle w_{m+1}, s^{m+1}, S^{m+1}, f^{m+1}, F^{m+1} \rangle, \dots, \langle w_n, s^n, S^n, f^n, F^n \rangle \rangle$$

آنگاه:

۱. $p^{\leq m} \in \mathbb{R}_{w_m}$ و $p^{>m} \in \mathbb{R}_{w_m}$. همچنین نگاشت

$$i : \mathbb{R}_w/p \longrightarrow \mathbb{R}_{w_m}/p^{\leq m} \times \mathbb{R}_w/p^{>m}$$

وجود دارد که هم $\leq$ - یکرختی و هم $\leq^*$ - یکرختی می‌باشد.

۲. اگر $m+1 < n$ ، آنگاه یک نگاشت

$$i : \mathbb{R}_w/p \longrightarrow \mathbb{R}_{w_m} \times \text{Col}(\kappa(w_m)^+, \kappa(w_{m+1})) \times \mathbb{R}_{w_m}/p^{>m+1}$$

وجود دارد که هم $\leq$ - یکرختی و هم $\leq^*$ - یکرختی می‌باشد.

□

برهان. نگاه کنید به [۲۳] و [۲۴].

فیلتر $(V, \mathbb{R}_w)$ - ژنریک G را در نظر بگیرید. فرض کنید $\langle \kappa_i : i < \kappa \rangle$ یک شمارش صعودی از اعضای C و $\vec{u} = \langle u_i : i < \kappa \rangle$ یک شمارش از مجموعه‌ی s در یک $p \in G$ ظاهر شده است $\{s : i < j < \kappa \text{ داشته باشیم } \kappa(u_i) = \kappa_i < \kappa_j = \kappa(u_j)\}$. حال فرض کنید $\vec{F} = \langle F_i : i < \kappa \rangle$ دنباله‌ای باشد که در آن هر F_i یک فیلتر $(V, Col(\kappa_i^+, \kappa_{i+1}))$ - ژنریک باشد که توسط G به دست آمده است.

لم ۲۹.۲.۴.

$$V[G] = V[\vec{u}, \vec{F}] . ۱$$

۲. به ازای هر اردینال حدی $\alpha < \kappa$ ، پالایه‌های تولید شده $\langle \vec{u} \restriction_\alpha, \vec{F} \restriction_\alpha \rangle$ و $\langle \vec{u} \restriction_{[\alpha, \kappa)}, \vec{F} \restriction_{[\alpha, \kappa)} \rangle$ به ترتیب پالایه‌های $(V, \mathbb{R}_{u_\alpha})$ - ژنریک و $(V, \mathbb{R}_w)$ - ژنریک می‌باشد.

۳. به ازای هر $\gamma < \kappa$ و هر $A \subseteq \gamma$ که $A \in V[\vec{u} \restriction_\alpha, \vec{F} \restriction_\alpha]$ داریم، $A \in V[\vec{u} \restriction_\alpha, \vec{F} \restriction_\alpha]$ که در آن α کوچک‌ترین اردینالی است که $\gamma < \kappa_\alpha$.

برهان. تنها برهان قسمت یک را می‌آوریم.

از تعریف $\vec{u}$ و $\vec{F}$ واضح است که پالایه تولید شده $\langle \vec{u}, \vec{F} \rangle$ در $V[G]$ قرار دارد، پس داریم $V[\vec{u}, \vec{F}] \subseteq V[G]$. حال مجموعه‌ی $\bar{G}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $\bar{G}$ شامل تمام $p \in \mathbb{R}_w$ می‌باشد که دارای خواص زیر می‌باشند:

• به ازای هر u ، اگر u در p ظاهر شده باشد، آنگاه $\alpha < \kappa$ وجود دارد که $u = u_\alpha$.

• به ازای هر F ، اگر F در p ظاهر شده باشد، آنگاه α وجود دارد که $F \in F_\alpha$.

• به ازای هر $\alpha < \kappa$ ، $q \leq p$ وجود دارد که u_α در q ظاهر شده است.

• به ازای هر $\alpha < \kappa$ و به ازای هر $f \in F_\alpha$ ، $q \leq p$ وجود دارد که f در q ظاهر شده است.

واضح است که $G \subseteq \bar{G} \in V[\vec{u}, \vec{F}]$. از طرفی به سادگی دیده می‌شود $\bar{G}$ یک پالایه است (رجوع شود به [۷]). در این صورت $G = \bar{G}$ پس $V[G] \subseteq V[\vec{u}, \vec{F}]$. □

لم ۳۰.۲.۴. فرض کنید λ یک کاردینال تالی در $V[G]$ باشد و $\kappa_0 < \lambda < \kappa$. آنگاه $\lambda = \kappa_i^+$ به ازای یک $i < \kappa$.

□

برهان. با توجه به ساختار واضح می باشد.

لم زیر نقش مهمی را در اثبات بازی می کند. از اینرو آن را لم اساسی می نامیم.

لم ۳۱.۲.۴. (لم اساسی [۷]) فرض کنید σ یک جمله در زبان $\mathcal{L}_\in$ با پارامترهایی در V باشد. آنگاه کاردینال $\xi_\sigma < \kappa$ وجود دارد به قسمی که، اگر λ و λ' کاردینال های تالی در بازه (ξ_σ, κ) باشند، H و H' به ترتیب پالایه های $(V[G], Col(\omega, \lambda))$ - ژنریک و $(V[G], Col(\omega, \lambda'))$ - ژنریک باشند، آنگاه $V[G][H] \models \sigma$ اگر و تنها اگر $V[G][H'] \models \sigma$.

برهان. فرض کنید $\sigma \in \mathcal{L}_\in(V)$ و G یک پالایه $(V, \mathbb{R}_w)$ - ژنریک باشد. از لم ۲۹.۲.۴ داریم $V[G] = V[\vec{u}, \vec{F}]$. کاردینال $\kappa_0^+ < \lambda < \kappa$ را ثابت در نظر بگیرید. فرض کنید H یک پالایه $(V[G], Col(\omega, \kappa_0))$ - ژنریک باشد. قرار دهید

$$D = \{p \in \mathbb{R}_w : p_1 \parallel "V[G][H] \models \sigma"\}$$

که در آن p_1 شرطی می باشد که $p = p_0 \dot{\wedge} p_1$ ، $p_1 \leq^* 1_{\mathbb{R}_w}$ ، توجه داریم که وجود p_1 از قضیه ۲۸.۲.۴ به دست می آید. نشان می دهیم D در $\mathbb{R}_w$ چگال است. فرض کنید p دلخواه باشد، p را به صورت $p = p_0 \dot{\wedge} p_1$ می نویسیم. چون $\mathbb{R}_w$ خاصیت پریکری دارد لذا $p_1 \leq^* q_1$ وجود دارد که

$$q_1 \parallel V[G][H] \models \sigma''$$

حال قرار دهید $q = p_0 \dot{\wedge} q_1$ بنابراین $q \leq^* p$ و $q \in D$. لذا D چگال می باشد. حال فرض کنید $p = p_0 \dot{\wedge} p_1 \in G \cap D$ ، بنابراین $\alpha_\sigma < \kappa$ وجود دارد که $p_0 \in \mathbb{R}_{u_{\alpha_\sigma}}$. قرار دهید $\xi_\sigma = \kappa_{\alpha_\sigma}^+$. نشان می دهیم ξ_σ حکم لم را ارضا می کند. فرض کنید $\xi_\sigma < \lambda < \kappa$ یک کاردینال تالی باشد. با استفاده از لم ۳۰.۲.۴ $\alpha_\sigma < \alpha < \kappa$ وجود دارد که $\lambda = \kappa_\alpha^+$. به ازای پالایه $(V[G], Col(\omega, \lambda))$ - ژنریک H داریم

$$V[G][H] = V[\vec{u}, \vec{F}][H] = V[\vec{u} \restriction_\alpha, \vec{F} \restriction_\alpha][F_\alpha][\vec{u} \restriction_{[\alpha+1, \kappa)}, \vec{F} \restriction_{[\alpha+1, \kappa)}][H]$$

از طرفی

$$\mathbb{R}_w * \dot{Col}(\omega, \lambda) \approx \mathbb{R}_w \times Col(\omega, \lambda)$$

بنابراین داریم

$$V[G][H] = V[\vec{u} \restriction_\alpha, \vec{F} \restriction_\alpha][F_\alpha][H][\vec{u} \restriction_{[\alpha+1, \kappa)}, \vec{F} \restriction_{[\alpha+1, \kappa)}]$$

بنابراین $V[\vec{u} \restriction_\alpha, \vec{F} \restriction_\alpha][F_\alpha][H]$ یک مدل ژنریک از V توسط $\mathbb{R}_{u_\alpha} \times \dot{Col}(\lambda, \kappa_{\alpha+1}) \times \dot{Col}(\omega, \lambda)$ می‌باشد. چون این فورسینگ از اندازه $\kappa_{\alpha+1}$ می‌باشد و $\kappa_{\alpha+1}$ را روی ω فرو می‌پاشد، بنابراین $\mathbb{R}_{u_\alpha} \times \dot{Col}(\lambda, \kappa_{\alpha+1}) \times \dot{Col}(\omega, \lambda) \approx Col(\omega, \kappa_{\alpha+1}) - (V, Col(\omega, \kappa_{\alpha+1}))$. بنابراین پالایه وجود دارد که ژنریک K وجود دارد که

$$V[\vec{u} \restriction_\alpha, \vec{F} \restriction_\alpha][F_\alpha][H] = V[K]$$

پس

$$V[G][H] = V[K][\vec{u} \restriction_{[\alpha+1, \kappa)}, \vec{F} \restriction_{[\alpha+1, \kappa)}] = V[\vec{u} \restriction_{[\alpha+1, \kappa)}, \vec{F} \restriction_{[\alpha+1, \kappa)}][K]$$

چون p_* در پالایه تولید شده توسط $\langle \vec{u} \restriction_{[\alpha+1, \kappa)}, \vec{F} \restriction_{[\alpha+1, \kappa)} \rangle$ قرار دارد، بنابراین

$$V[G][H] = V[\vec{u} \restriction_{[\alpha+1, \kappa)}, \vec{F} \restriction_{[\alpha+1, \kappa)}][K] \models \sigma$$

اگر و تنها اگر،

$$p_* \Vdash "V[G][H] \models \sigma"$$

□

و این اثبات را به پایان می‌رساند.

اتمام برهان قضیه اصلی

برهان قضیه ۱.۴.۶. فرض کنید $\langle \phi_n : n < \omega \rangle$ یک شمارشی از $Sent(\mathcal{L}_\epsilon)$ باشد. به ازای هر

$n < \omega$ فرض کنید

$$\sigma_n \equiv "V_\kappa \models \phi_n"$$

فرض کنید λ_0 یک عضو تالی از C باشد که از $\sup_{n < \omega} \xi_{\sigma_n}$ بزرگتر است. قرار دهید $N = V_{\kappa}[G][H_0]$. جایی که H_0 یک پالایه $(V_{\kappa}[G], Col(\omega, \lambda_0))$ - ژنریک می باشد. نشان می دهیم N همان مدلی است که به دنبالش هستیم.

به ازای هر $n < \omega$ ، هر کاردینال تالی λ در N و هر پالایه H که $(N, Col(\omega, \lambda))$ - ژنریک می باشد، داریم:

$$N \models \phi_n \iff V[G][H_0] \models "V_{\kappa} \models \phi_n" \quad (۱)$$

$$\iff V[G][H_0][H] \models "V_{\kappa} \models \phi_n" \quad (۲)$$

$$\iff V_{\kappa}[G][H_0][H] \models \phi_n \quad (۳)$$

$$\iff N[H] \models \phi_n. \quad (۴)$$

(۱) با توجه به تعریف N برقرار می باشد، (۲) با توجه به لم اساسی و قضیه ۳۱.۲.۱ که تضمین می کند $Col(\omega, \lambda_0) \times Col(\omega, \lambda) \approx Coll(\omega, \lambda)$ (۳) و (۴) نیز واضح می باشند. $\square$

مراجع

- [1] Blackburn, Patrick; de Rijke, Maarten; Venema, Modal logic, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 53. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. xxii+554 pp. ISBN: 0-521-80200-8; 0-521-52714-7.
- [2] Chagrov, Alexander; Zakharyashev, Michael, Modal logic, Oxford Logic Guides, 35. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997. xvi+605 pp. ISBN: 0-19-853779-4.
- [3] Cummings, James. Iterated forcing and elementary embeddings. Handbook of set theory. Vols. 1, 2, 3, 775-883, Springer, Dordrecht, 2010.
- [4] Friedman, Sy-David; Golshani, Mohammad Killing GCH everywhere by a cofinality-preserving forcing notion over a model of GCH. Fund. Math. 223 (2013), no 2, 171-193.
- [5] Gitik, Moti Prikry-type forcings. Handbook of set theory. Vols. 1, 2, 3, 1351-1447, Springer, Dordrecht, 2010.
- [6] Golshani, Mohammad, an introduction to forcing available on <http://math.ipm.ac.ir/golshani/>.
- [7] Golshani, Mohammad, Mitchell's answer to a question of Hamkins and Löwe, submitted.
- [8] Golshani, Mohammad; Mohammadpour, Rahman, Cardinal collapsing and product forcing, submitted.
- [9] Hamkins, Joel David, Personal Communication.
- [10] Hamkins, Joel David, A simple maximality principle, J. Symbolic Logic 68 (2003), no. 2, 527-550.
- [11] Hamkins, Joel David, Some second order set theory, Logic and its applications, 36-50, Lecture Notes in Comput. Sci., 5378, Springer, Berlin, 2009.
- [12] Hamkins, Joel David, The set-theoretic multiverse, Rev. Symb. Log. 5 (2012), no. 3, 416-449.

- [13] Hamkins, Joel David, Structural connections between a forcing class and its modal logic, *Israel Journal of Mathematics*, April 2015, Volume 207, Issue 2, pp 617-651.
- [14] Hamkins, Joel David; Löwe, Benedikt The modal logic of forcing. *Trans. Amer. Math. Soc.* 360 (2008), no. 4, 1793-1817.
- [15] Hamkins, Joel David; Löwe, Benedikt, Moving up and down in the generic multiverse, *Logic and its applications*, 139-147, *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 7750, Springer, Heidelberg, 2013.
- [16] Hamkins, Joel D.(1-CUNYS); Woodin, W. Hugh(1-CA) The necessary maximality principle for c.c.c. forcing is equiconsistent with a weakly compact cardinal. *MLQ Math. Log. Q.* 51 (2005), no. 5, 493-498.
- [17] Harrington, Leo; Shelah, Saharon, Some exact equiconsistency results in set theory. *Notre Dame J. Formal Logic* Volume 26, Number 2 (1985), 178-188.
- [18] Inamdar C. Tanmay, On the modal logics of some set-theoretic constructions, Master's thesis, Universiteit van Amsterdam, 2013, ILLC Publications MoL-2013-07.
- [19] Jech, Thomas Set theory. The third millennium edition, revised and expanded. *Springer Monographs in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2003. xiv+769 pp. ISBN: 3-540-44085-2
- [20] Kanamori, Akihiro. The higher infinite. Large cardinals in set theory from their beginnings. Second edition. Paperback reprint of the 2003 edition. *Springer Monographs in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009. xxii+536 pp. ISBN: 978-3-540-88866-6
- [21] Kunen, Kenneth Set theory. An introduction to independence proofs. Reprint of the 1980 original. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 102. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983. xvi+313 pp. ISBN: 0-444-86839-9
- [22] Leibman, George. Consistency strengths of modified maximality principles. Thesis (Ph.D.)-City University of New York. 2004. 109 pp. ISBN: 978-0496-02175-8.
- [23] Merimovich, Carmi Extender-based Radin forcing. *Trans. Amer. Math. Soc.* 355 (2003), no. 5, 1729-1772 (electronic).
- [24] Merimovich, Carmi A power function with a fixed finite gap everywhere. *J. Symbolic Logic* 72 (2007), no. 2, 361- 417.
- [25] Mitchell, William, On a question of Hamkins and Loewe. Available on <http://people.clas.ufl.edu/wjm/publications/> .
- [26] Mohammadpour, Rahman. A Mid Version of Hamkins' Maximality Principle, Submitted.
- [27] Rittberg C. J. The modal logic of forcing. Master's thesis, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2010.

- [28] Todorčević, Stevo; Farah Ilijas, Some Applications of the Method of Forcing, YENI-SEI, Moscow, 1995.
- [29] <http://mathoverflow.net/questions/211684/constructing-an-omega-1-sequence-of-functions-that-almost-extend-all-previous/211696#211696>

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Hamkins' necessary maximality principle.....	اصل بیشینگی ضروری همکینز
Hamkins' maximality principle.....	اصل بیشینگی همکینز
$\mathcal{L}$ -Structure	– ساختار $\mathcal{L}$
Pattern	الگو
Levy Reflection Theorem	قضیه بازتاب لوی
Labeling.....	برچسب‌گذاری
Transitive Closure	بستار تعدی
Topless	بی‌سر
Persistent	پایا
Pre-linear order	پیش‌ترتیب خطی
Pre- Order	پیش‌جبر
Pre- Boolean algebra	پیش‌جبر بولی
Translation	ترجمه
Tarski-Vaught Test	تست تارسکی–وات
Cumulative hierarchy	سلسله مراتب انباشتگی
Switch.....	سوئیچ
Button.....	دکمه
Weak button	دکمه ضعیف
pushed button.....	دکمه فشرده
Unpushed button.....	دکمه نافشرده
Linear Property.....	خاصیت خطی
Necessary	ضروری

Necessarily	ضرورتاً
Necessitation	ضرورت
Generic	ژنریک
Directed	جهت‌دار
Collapsing	فروپاشی
Forcing	فورسینگ
Forcing equivalence	فورسینگ معادل
Frame	قاب
Volume control, Ratchet	کنترل‌گر
Modus Ponens	قیاس استثنایی
Stationary	مانا
Transitivity	متعدی
Closed unbounded set	مجموعه‌ی بسته و بی‌کران
Kripke model	مدل کریپکی
Projective absoluteness	مطلق‌بودن تصویری
Possibly	ممکناً
Modal logic	منطق موجهات
Modal	وجهی
Modality	وجهیت

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Button	دکمه
Closed unbounded set	مجموعه‌ی بسته و بی‌کران
Collapsing	فروپاشی
Cumulative hierarchy	سلسله مراتب انباشتگی
Directed	جهت‌دار
Forcing	فورسینگ
Forcing equivalence	فورسینگ معادل
Generic	ژنریک
Hamkins' maximality principle	اصل بیشینگی همکینز
Hamkins' necessary maximality principle	اصل بیشینگی ضروری همکینز
Kripke model	مدل کریپکی
Labeling	برچسب‌گذاری
Levy Reflection Theorem	قضیه بازتاب لوی
Linear Property	خاصیت خطی
$\mathcal{L}$ -Structure	ساختار $\mathcal{L}$
Frame	قاب
Modal	وجهی
Modality	وجهیت
Modal logic	منطق وجهات
Modus Ponens	قیاس استثنایی
Necessary	ضروری
Necessarily	ضرورتاً

Necessitation	ضرورت
Pattern	الگو
Persistent	پایا
Possibly	ممکنا
Pre- Boolean algebra	پیش جبر بولی
Pre-linear order	پیش ترتیب خطی
Pre- Order	پیش جبر
Projective absoluteness	مطلق بودن تصویری
Ratchet	کنترلگر
Stationary	مانا
Switch	سوییچ
Tarski-Vaught Test	تست تارسکی-وات
Topless	بی سر
Transitive Closure	بستار تعدی
Transitivity	متعدی
Pushed button	دکمه فشرده
Translation	ترجمه
Unpushed button	دکمه نافشرده
Volume control	کنترلگر
Weak button	دکمه ضعیف

Surname: Mohammadpour

Name: Rahman

Title: The Modal Logic of Forcing and Hamkins' Maximality Principle

Supervisor: Dr. Massoud Pourmahdian

Advisor: Dr. Mohammad Golshani

Degree: Master of Science

Subject: Pure Mathematics

Field: Mathematical Logic

Amirkabir University of Technology(Polytechnic of Tehran) Faculty Of Mathematics and Computer Science

Date: September 2015

Number of pages: 91

Keywords: Consistency, Forcing, Independenace, Large Cardinal, Maximality Principle, Modal Logic

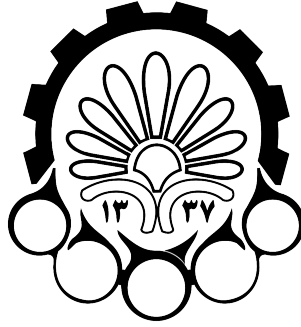
Abstract

In this thesis, we consider the interaction between forcing and modal logic. The thesis is based on some original papers of Joel Hamkins, Benedikt Löwe and Mohammad Golshani.

After giving the essential materials of set theory and modal logic, in chapter 2 we focus on the topic “Modal Logic of Forcing” introduced by Hamkins and Löwe. In particular we show that the modal logic of the class of all forcing notions is $S4 \cdot 2$. Furthermore, we consider various versions of this theorem by determining the modal logic of several classes of forcing notions.

Chapter 3 is filled up with the maximality principles introduced by Hamkins. We give new proofs of Hamkins' theorems which are much simpler than the original proofs and avoid the use of iterated forcing. In addition, we introduce a new maximality principle that is stronger than a maximality principle introduced by Hamkins and Woodin. We also show that to have this principle as an axiom, the existence of a weakly compact cardinal κ such that $V_\kappa \prec V$ is necessary.

Chapter 4 deals with a theorem of Mohammad Golshani, in direction to answering a question of Hamkins and Löwe. The proof of the main theorem deeply uses Radin forcing, a complicated powerful technique of set theory.



Amirkabir University of Technology (Polytechnic of Tehran)
Faculty Of Mathematics and Computer Science

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

The Modal Logic of Forcing and Hamkins' Maximality Principle

Supervisor

Dr. Massoud Pourmahdian

Advisor

Dr. Mohammad Golshani

by

Rahman Mohammadpour

September 2015